Для кофейников

Дж. Мэйсон, Л. Бёртон, К. Стэйси

Математика – это просто 2.0

Думай математически

Для кофейников

Дж. Мэйсон, Л. Бёртон, К. Стэйси

Математика – это просто 2.0

Думай математически

Перевод с английского Н.Ф. Орловой
под редакцией С.А. Кулешова

ТЕХНОСФЕРА
Москва
2015

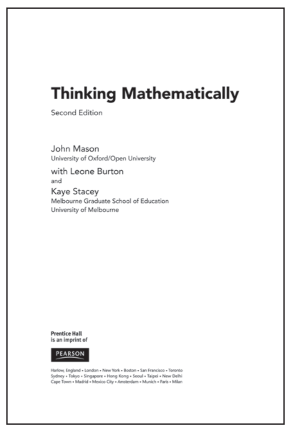
УДК 51
ББК 22.1
М97

М97 Мэйсон Дж., Бёртон Л., Стэйси К.
Математика – это просто 2.0. Думай математически
Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2015. – 352 с., ISBN 978-5-94836-401-8

«Думай математически» – идеальное пособие для тех, кто стремится развить свои математические способности или занимается обучением математическому мышлению других. Авторы предлагают читателю интересные задания, вовлекая каждого в дискуссию, в результате которой обретается бесценный опыт. Во второе издание включены 77 новых задач и новая глава. Книга открывает глубинные процессы математического мышления и подсказывает, каким образом пробудить интерес к математике и развить природные способности.

Книга окажется полезной всем, кто знаком с азами математики и стремится научиться решать как нестандартные математические задачи, так и жизненные проблемы.

УДК 51
ББК 22.1


Thinking Mathematically
Second Edition

John Mason
University of Oxford/Open University
with Leone Burton
and
Kaye Stacey
Melbourne Graduate School of Education
University of Melbourne

Prentice Hall
is an imprint of
PEARSON

Harlow, England • London • New York • Boston • San Francisco • Toronto
Sydney • Tokyo • Singapore • Hong Kong • Seoul • Taipei • New Delhi
Cape Town • Madrid • Mexico City • Amsterdam • Munich • Paris • Milan

ISBN 978-5-94836-401-8
ISBN 978-0-273-72891-7 (англ.)

Содержание

Предисловие к первому изданию

Вопреки названию, в книге речь идет не о математике вообще или каком-либо ее разделе. Наша цель состоит в том, чтобы показать, как приступить к решению той или иной задачи, как эффективно ее решить и что вынести из полученного опыта. Время и усилия, потраченные на изучение всего этого, окупятся сторицей, поскольку в результате вы приблизитесь к осознанию своего потенциала математического мышления.

Многолетний опыт работы с учениками и студентами убедил нас в том, что математическое мышление можно развить, если

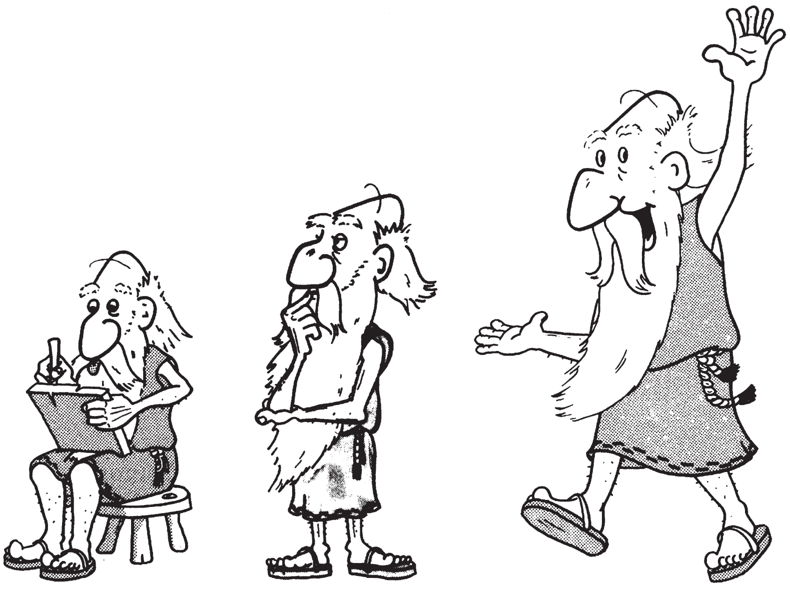
- подходить к решению задачи с полной ответственностью;
- анализировать полученный опыт;
- связывать свои ощущения с действиями;
- изучать процесс решения задачи и
- обращать внимание на то, как полученные знания согласуются с вашим личным опытом.

Следовательно, предлагая вам решить ту или иную задачу, мы обращаем ваше внимание на важные моменты процесса математического мышления и тем самым показываем вам, как анализировать этот опыт и использовать его для решения жизненных задач.

Как использовать книгу с максимальным эффектом!

Нашу книгу надо не просто читать, ее нужно именно использовать, поэтому ее ценность зависит от того, насколько интенсивно читатель работает над задачами, предложенными в тексте. Цель задач — предоставить вам еще одну возможность попрактиковаться, что даст вам возможность освоить наши советы. Если вы не станете решать задачи со всей серьезностью, все комментарии обратятся в пустые слова и в случае необходимости вы не сумеете воспользоваться нашими советами. От вас потребуются усилия трех типов: физические, эмоциональные и интеллектуальные.

Пожалуй, один из самых важных выводов, которые предстоит вам сделать, состоит в следующем: если вы оказались в тупике (или застряли) это вполне естественное состояние и неотъемлемая часть совершенствования мыслительного процесса. Однако, чтобы извлечь из этого состояния максимум пользы, подумать пару минут и продолжить чтение определенно недостаточно. Не спешите, обдумайте задачу и читайте дальше лишь в том случае, если испробовали все возможные подходы к решению. Время, потраченное на размышление и поиск разных подходов, потрачено с большой пользой. После каждой задачи под заголовком «ЗАСТРЯЛИ?» мы предлагаем вам предложения-подсказки на случай, если процесс затормозился. Поскольку разные варианты решения влекут за собой разные логические ходы, некоторые из подсказок могут противоречить друг другу или не имеют отношения к выбранному вами подходу, так что не следует думать, что каждая из подсказок выведет вас на верный путь!



Коварные вопросы, не приводящие к решению задачи, ни в коем случае не должны вызывать в вас чувства разочарования. Неудачная попытка решения научит бо́льшему, чем вопрос с готовым ответом, если вы всерьез думаете над задачей, используете предлагаемые в книге методы и размышляете над тем, что сделали. Основная цель нашей книги не имеет отношения к ответам. Самое важное — это прочувствовать обсуждаемые в ней процессы размышлений.

Чтобы подчеркнуть наш акцент на процессах, а не на ответах, «решение» в традиционном смысле дано далеко не во всех случаях. Вместо него мы предлагаем варианты решений, иногда сопровождаемые комментариями, а также неправильные начала, частично организованные идеи и тому подобное. Элегантные решения, встречающиеся в многочисленных сборниках математических задач, крайне редко возникают в чьем-либо мозгу в законченном виде при первой же попытке решить задачу. Как правило, к ним приходят в результате длительного и мучительного мыслительного процесса (а также отдыха от него), решения претерпевают массу изменений на этом пути и даже полное переосмысление, однако большинство новичков этого не понимают. В результате нашего неформального подхода вы приобретаете уверенность в себе и прогрессируете, ну а элегантность решения приходит со временем.

Итак, наш подход основан на следующих пяти принципах:

1. Вы *можете* мыслить математически.
2. Математическое мышление можно *развить* практикой и анализом.
3. Математическому мышлению *способствуют* чувство противоречия, напряжение и удивление.
4. Математическое мышление *укрепляется* в атмосфере пытливости, вызова и анализа.
5. Математическое мышление помогает *разобраться* в себе и окружающем мире.

Вы наверняка обратите внимание на то, что текст написан от первого лица единственного числа, хотя у книги три автора. Это отражает наш стиль работы, равно как тот союз, который возник в процессе создания книги.

Книга в первую очередь адресована студентам как руководство для развития математического мышления. Она представляет только один подход к решению этой задачи и не сопоставляет его со схемами, предложенными ранее другими авторами, например Дьёрдем Пойа. Если вам любопытно ознакомиться с работой этого автора, которая оказала на нас огромное влияние, загляните в список литературы.

Некоторые из приведенных в книге задач оригинальные, а многие позаимствованы у математического сообщества. Мы бы хотели выразить благодарность своим друзьям и коллегам, которые предоставили нам эти задачи, но в особенности их неизвестным авторам — за удовольствие, что они нам доставили.

Особую признательность мы выражаем:

Дьёрдю Пойа и Дж. Г. Беннетту за их энтузиазм;

Грэму Риду за рисунки ПИКСА, которые впервые появились в книге *Mathematics: A Psychological Perspective (Математика. Психологическая перспектива),* Open University Press, 1978;

Алану Шёнфилду за то, что указал на роль монитора, о чем речь идет в главе 7;

Майку Битхэму из Оксфордского университета за помощь в компьютерной обработке текста; многочисленным коллегам, и в особенности Джой Дэвис, Сюзи Гроувз, Питеру Стэйси и Коллетт Тэсс, а также огромному числу студентов в трех странах.

Мы предлагаем нашу книгу в помощь мыслительному процессу, в частности

Квентину и Лидии Мэйсон,

Марку Бёртону,

Кэрол и Эндрю Стэйси.

Предисловие ко второму изданию

Книга «Мыслим математически», опубликованная в 1982 г., и сегодня популярна во многих странах. Ею пользуются старшеклассники, абитуриенты, которые собираются изучать математику в университете, педагогических институтах, студенты математических факультетов. Цель нового издания — предложить ряд вопросов для исследования преподавателям начальной и средней школы, а также старшекурсникам-математикам. Они включены в новую главу 11. В первом издании вопросы (задачи) были выбраны для того, чтобы проиллюстрировать различные «процессы» или, как бы мы сформулировали сегодня, использование разных природных способностей с целью расширить и углубить понимание ключевых идей различных математических тем.

Кроме того, вы увидите, как обычные задачи, к которым подходят традиционно, могут порой преобразоваться в интригующие вопросы. А еще вы узнаете, что за самыми элементарными темами зачастую скрываются важные области высшей математики. В то же самое время мы воспользовались случаем и заменили язык, или терминологию, мыслительных процессов, использованный в оригинальном издании, на язык *природных способностей*, которым обладают все люди. Это позволило включить в книгу некоторые соображения и отличительные особенности, возникшие с тех пор, как было опубликовано первое издание.

Процессы и природные способности

В семидесятые годы и в начале восьмидесятых годов прошлого столетия был велик интерес к «процессам», с помощью которых делают те или иные вещи, и математическое мышление — яркий тому пример. Однако, хотя в последнее время интерес к вычленению процессов мышления и творчества вновь возрос, язык, с помощью которого они описываются, претерпел значительные изменения. Мы пришли к выводу, что целесообразнее для нас и для тех, с кем мы связаны математикой и педагогикой, мыслить категориями природных способностей, с которыми ученики и студенты приходят в класс. Таким образом, задача преподавателя состоит в том, чтобы помочь студентам использовать свои способности и развить их в контексте математического мышления.

Как и Калеб Гаттеньо, мы считаем, что основой действия является знание; без знания нет действия. Однако некоторые знания могут быть настолько интегрированы в нашу деятельность, что мы не осознаем, как они работают. Так, мы часто действуем автоматически, в силу привычки. Опять-таки, согласно Гаттеньо, математика как научная дисциплина возникает, когда люди осознают свои действия в определенном контексте (взаимоотношения и свойства в числах и пространстве) и выражают свое знание, чтобы получить «математику». Поэтому математику как свод книжных знаний можно рассматривать как формальное признание, выражение и анализ знаний, которые информируют математические действия в проблемных ситуациях. Чтобы стать преподавателем, необходимо быть в курсе знаний, которые генерируют математические действия, потому что именно они приводят к педагогическим навыкам. Следовательно, жизненно важно взращивать свое умение, занимаясь математическими задачами, которые выносят на поверхность важные математические сведения, которые могут информировать действия в будущем.

Знание тесно связано с познанием, действие тесно связано с поведением. Часто не принимают во внимание такой аспект человеческой психики, как эмоции, или аффективную сферу. В первом издании мы предположили, что если вы застряли, то это «вполне естественное состояние», в котором можно чему-то научиться, а при выражении эмоциональных наблюдений о состоянии «застряли» и в случае догадки (АГА!), хоть бы и преходящей, высвобождается энергия, которая и делает возможным прогресс. Все это вызывало положительные эмоции: удовольствие от поиска смысла с помощью ваших собственных способностей, волнующий миг открытия, эстетическое наслаждение от интересного результата и удовлетворение от найденного решения. В настоящем издании мы развиваем мысль о том, что развитие склонности распознавать проблемные ситуации в материальном мире, равно как и в мире математики («вопросительное отношение» из главы 8) дает существенный вклад в эмоциональную сферу.

Акцент на сотрудничество как обязательный компонент познания математики в настоящем издании отличает его от первоначальной книги, где признается значение совместной работы как способа открыть подходы, немыслимые в процессе единоличного рассуждения. В то же самое время жизненно важны периоды «самостоятельного мышления», во время которых рассматриваются разные возможности, которые либо разрабатываются, либо отбрасываются. Некоторые люди предпочитают начинать в одиночку, а потом, после определенного периода, обмениваются вариантами; другие же предпочитают начать с коллективной генерации идей, продолжить самостоятельно, а затем снова объединить усилия. Разумеется, хорошо, когда в результате совместных размышлений рождаются и формулируются соображения и наблюдения относительно характерных моментов исследования, даже если они могут случиться и в процессе индивидуального мышления. Присутствие других немаловажных лиц — существенный вклад в рождение стимула выражать и прояснять свои мысли, оно также помогает связывать их с мыслями других людей.

Мы также воспользовались случаем, чтобы дополнить новое издание извечными математическими темами, без которых немыслима математика. Краткое описание природных возможностей, тем и связанных с ними понятий вы найдете в новой главе 12.

Сила экспериментального подхода

Оригинальная книга представляла собой результат нашего собственного опыта как математиков-мыслителей, на которых огромное влияние оказала работа Дьёрдя Пойа. В 1967 г. Джон Мэйсон увидел на экране документальный фильм *Let Us Teach Guessing* («Давайте учить догадываться»), вскоре после того как он был отснят, где Джон, тогда еще старшеклассник, помогал учителю. В результате это привело к рождению нового подхода к преподаванию, который он потом реализовал и сформировал на основании опыта, полученного в школьные годы под руководством Джеффа Стила. К своему удивлению, много лет спустя Джон узнал, что Джефф по образованию был не преподаватель и не математик, а дирижер хора! Тем не менее благодаря его энтузиазму Джон с интересом изучал предмет в школе и поступил в университет с багажом азов математического мышления.

Приступив к своей первой работе в Открытом университете, Джон выяснил, что среди программных учебников есть одна из книг Дьёрдя Пойа. Когда Джона попросили организовать недельную летнюю школу для 7000 студентов на трех площадках, он включил в программу этот фильм наряду с занятиями, которые он назвал «*активное решение задач*». Джон наивно полагал, что все преподаватели математики, «обладая математическим мышлением, будут демонстрировать его ученикам», что естественным образом приведет учеников к рассмотрениям частностей и обобщениям, умению строить предположения и убеждаться в их истинности и тому подобное. Прошел не один год, пока он понял, что не все преподаватели имеют настолько хорошее математическое мышление, как он ранее предполагал. В результате появились курсы для преподавателей, призванные научить их математическому мышлению и анализировать полученный опыт с тем, чтобы они могли заострять внимание учеников на ключевых моментах. Тем временем и курс обучения претерпел изменения, а вместе с ним и программа летней школы, с упором на более простые задачи, которые, тем не менее, иллюстрируют «процесс» математического мышления или, другими словами, подталкивают учеников спонтанно использовать свои природные способности, необходимые для математического мышления.

В 1979 г. Джон впервые стал преподавать на курсах совместно с Леоне Бёртон, которая уже обучала учителей математики начальной школы работать с учениками в математическом ключе и исследовала результаты таких занятий на обучаемости детей. Команда преподавателей курса хотела, чтобы курс был практическим, поэтому для расширения экспериментальной базы были введены специальные дни для «собственного мышления». Идея заключалась в следующем: чтобы понять и почувствовать ученика, необходимо понимать и чувствовать соответствующие аспекты собственного мышления. Проблема состояла в том, каким образом выбирать задачи и комментарии для разделов «собственное мышление». Чтобы сделать правильный выбор, Леоне и Джон задумали написать книгу, а потом на другой стороне света к ним присоединилась Кэй Стэйси, которая была также воодушевлена подходом Пойа к открытию математики и в течение нескольких лет использовала его на подготовительных курсах для преподавателей математики начальной и средней школы, где она вместе с Сюзи Гроувз практиковала свои новаторские подходы к решению задач. В основе книги «Мыслим математически» лежит один из принципов, используемых в ее курсе, а именно делать и рассказывать — жизненно важно для того, чтобы подготовиться записать, а запись помогает организовать дела и рассказ таким образом, чтобы на основании догадок и полученного опыта сформировать знание для будущих действий. В нашем случае написание книги выкристаллизовало и организовало наше собственное мышление относительно того, какой именно опыт будет наиболее полезен преподавателям.

Как авторы мы объясняем неослабевающий интерес к нашей книге именно ее экспериментальной основой, которая присутствует и в новом издании. Смысл нового издания заключается в том, чтобы помочь преподавателям сделать опыт математического мышления основой обучения. Развитие вашего математического мышления, обсуждение любой математической темы значительно улучшаются, если сначала совместно обсуждать близкие к математике темы, а потом искать другой совместный опыт, на который можно опереться. Иными словами, все великие педагоги, которые занимались преподаванием математики, согласны в том, что обучение улучшается, если ученикам предлагать задачи, провоцирующие активность, в которой знакомые действия адаптированы и модифицированы таким образом, чтобы принять вызов. Отрабатывать задачи, которые вы можете решить, используя знакомые приемы, нецелесообразно, разве что вы хотите развить высокую скорость. Деятельность производит опыт, но, как мог бы сказать Эммануил Кант,

> *последовательность опытов не умножает опыта этой последовательности.*

Необходимо нечто большее. Пойа называл этот этап «*взгляд назад*» (*looking back*). Мы решили назвать его этапом обзора, что точнее термина «*анализ/размышление*» (*reflecting*), который мы тоже используем. Слово *reflection* имеет много значений. Джим Уилсон как-то сказал, что из всех четырех этапов, которые вычленяет Пойа, об этом этапе больше всего говорят, но меньше всего им пользуются. Большинство педагогов придерживаются мнения, что для того чтобы учиться на основании опыта, необходимо несколько отвлекаться от погружения в деятельность. В конце концов,

> *на основании опыта, пожалуй, не поймешь одной вещи — мы не слишком часто учимся на основании одного лишь опыта.*

Однако педагоги расходятся в следующих моментах: необходимые время, степень и инициатива отступления от действия. Очевидно, что если отвлечься слишком рано, все будут испытывать состояние фрустрации, и это вряд ли произведет полезный эффект. С другой стороны, если предоставить ученикам возможность «учиться на собственном опыте», результат будет неудовлетворительным для всех, кроме наиболее одаренных в плане математики учеников. Для большинства учеников учиться постигать математику — это научное исследование, а не просто естественное усилие над собой. Как говорил Лев Выготский, чтобы оценить опыт, большинству людей необходимо, чтобы рядом был кто-то более опытный, хотя бы некоторое время. Калеб Гаттеньо и некоторые другие математики считают, что обучение на самом деле происходит во время сна, когда мозг сам решает, что ему забыть или хотя бы что опустить. Как бы там ни было, если студенты занимаются анализом (намеренным размышлением), обзором, реконструкцией и повторением, у них гораздо больше вероятность в будущем постичь некие тайны. «Наука замечать», которую Джон Мэйсон сформулировал на основании своего опыта с Дж. Г. Беннеттом, возникла как попытка дать философски обоснованный метод исследования своей собственной практики, но она в равной мере относится и к обучению студентов.

Чтобы учиться на основании опыта, чтобы новые возможности приходили на ум в нужный момент, необходимо настроить себя замечать возможности соответствовать ситуациям, а не реагировать на них, сделать выбор в пользу осознанного действия, а не попадать в наезженную колею. Таким образом, предлагая задачи и следующие за ними подсказки, можно помочь людям научиться использовать свои природные способности. Чем больше ученики настраиваются и осознают свои природные способности, тем более гибкими и эффективными становятся эти способности. Они становятся, на языке Выготского, «действиями для себя», которые включаются сами, а не просто «действиями в себе», которые активирует учитель или какая-либо подсказка к задаче. Все это объясняет суть как предыдущего, так и настоящего издания: предлагаются вопросы, над которыми следует работать. За ними следуют подробные подсказки и комментарий. Однако от них мало толку или нет толку вовсе, если вы не отработаете их все, может, за достаточно длительный период времени, потом проанализируете и попытаетесь найти соответствие между прилагаемым комментарием и вашим собственным опытом. Наша цель — помочь вам научиться размышлять, а, попав в тупик, начинать все заново. Получить «ответ» — не всегда самый ценный результат потраченных усилий. Скорее, намного важнее и ценнее то, что вы замечаете в процессе — как вы застряли, как прогрессируете, строите предположения, используете свои природные способности, знакомитесь с математическими темами и т.п., а также те маленькие вспышки озарения и приятное волнение, которые вы испытываете, когда используете эти способности и достигаете прогресса. Предлагаемые вам задачи — это питательная среда для возбуждения деятельности; как правило, сами математические результаты не имеют значения. Иными словами, эта книга ставит задачу не преподать тот или иной объем математических знаний, а, скорее, показать читателям, какими способами можно использовать свои собственные природные способности, чтобы заставить их служить во имя исследования и понимания математических тем и явлений.

Поговорим о сложности задач. Первоначальное впечатление от вопроса может привести к ощущению «слишком сложный» или «недостаточно сложный». Работая над вопросом, надо понять следующее: как сделать что-либо менее сложным, чтобы добиться успеха (как правило, с помощью уточнений), или более сложным, определив некоторые *размеры возможного варьирования* и меняя их или же расширяя *диапазон допустимых изменений* этих черт. Выбирает уровень сложности для себя каждый самостоятельно в соответствии с текущим моментом, но хочется верить, что когда-нибудь у вас возникнет желание вернуться и заняться более сложной задачей. Суть в том, что поставленные вопросы послужат началом для математического опыта, а читатели и их учителя адаптируют степень сложности таким образом, чтобы опыт был продуктивен, и не будут зацикливаться исключительно на том, чтобы получить ответы к определенным задачам.

Благодарности

Когда мы работали над оригинальной книгой, мы полагали, что математические вопросы имеют отношение исключительно к миру математики и нет необходимости знакомить читателя с подроб-

ностями их происхождения. Однако с возрастом мы заинтересовались источниками задач, а также тем, как они трансформируются со временем. Когда мы были абсолютно уверены в источнике той или иной математической задачи, мы вводили их в новое издание. Если же такой ссылки нет, то источник либо утрачен, либо попал к нам от разных коллег по математическому сообществу, переходя из рук в руки, либо мы считаем, что сочинили это сами. Мы благодарны за комментарии по поводу новых ссылок Эве Нолл и Ами Мамоло.

Посвящение

Нашу первую книгу мы посвятили нашим детям, которые с тех пор, как и следовало ожидать, стали взрослыми. К несчастью, Леоне умерла от рака еще до того, как мы приступили к работе над новым изданием, поэтому мы посвящаем эту книгу ей. Как сказал ее сын Марк,

> *книги Леоне Бёртон были всегда посвящены мне, ее сыну. Эта же книга посвящается маме и ее памяти. Без всякого сомнения, я получил замечательный дар — решать задачи и мыслить математически; неважно, от кого он мне достался — от матери или Джона Мэйсона, принесшего к нам в дом первый компьютер, когда я был еще ребенком, чтобы я мог «поиграть в Лого».*

Джон Мэйсон, Оксфорд, апрель 2010
Кэй Стэйси, Мельбурн, апрель 2010

ГЛАВА I

КАЖДЫЙ МОЖЕТ НАЧИНАТЬ

Эта глава познакомит вас с занятиями, которые запустят мыслительный процесс, над каким бы вопросом вы ни работали. Так что не надо пугаться вопроса из области математики и не стоит с тоской на лице смотреть на чистый лист бумаги. Пускаться во все тяжкие по первому пути, который взбредет на ум, в надежде, что грубая сила победит, тоже неумно с точки зрения тактики. Однако есть и продуктивные ходы.

Экспериментирование[1]

Лучше всего начать с практики, например вот с такой задачки:

Склад

На складе вы получите 20%-ю скидку, но вам придется заплатить 15%-й налог с оборота. Как вы думаете, что лучше посчитать сначала — скидку или налог?

Как подступиться к такому вопросу? Для начала нужно точно понять, о чем вас спрашивают, но это может произойти не сразу, а только после некоторых усилий. Надеюсь, вам пришло в голову посчитать, что к чему для товара стоимостью, скажем, £100.

ПРИСТУПАЙТЕ, ЕСЛИ ЕЩЕ НЕ ПРИСТУПИЛИ

[1] Автор использует термин specializing, т.е. конкретизация, или специализация, но, по словам В.И. Арнольда, математика — наука экспериментальная, поэтому здесь термин «specializing» переведен как экспериментирование. — *Прим. ред.*

Удивлены результатом? Большинство людей удивляются, и именно это удивление питает математическое мышление. А теперь посмотрим, таков же результат для товара стоимостью, скажем, £120?

ПОПРОБУЙТЕ И УВИДИТЕ!

Запишите ваши подсчеты и ваши соображения. Это единственный способ развивать мыслительные способности.

ПОПРОБУЙТЕ И УВИДИТЕ!

А теперь, можно с помощью калькулятора, решите оба примера. Вы преследуете сразу две цели: получить представление, какой может быть ответ, и в то же самое время получить ощущение, почему ваш ответ может быть правильным. Другими словами, решив примеры, вы наполните вопрос смыслом для себя и, может быть, начнете видеть скрытую модель для всех частных случаев, что и послужит ключом к окончательному решению вопроса.

Какую же модель, или схему, может скрывать под собой этот вопрос? Может, у вас есть опыт решения подобных задач и вы знаете, что делать. Если так, то подумайте, как вы могли бы побудить кого-либо менее искушенного взяться за эту задачу, затем прочитайте мои предложения. Важно проработать все мои доводы, потому что именно там вводятся и иллюстрируются важные моменты математического мышления.

Как окончательная цена зависит от порядка вычисления скидки и налога? В примерах, которые вы решили, должна прослеживаться схема. Если ее нет, то проверьте свои расчеты! А будет ли такой же результат для других цен? Если вы не уверены, попробуйте другие примеры. Когда будете уверены, ищите объяснение (или читайте ниже).

ПРОБУЙТЕ НА ДРУГИХ ПРИМЕРАХ, ПОКА НЕ БУДЕТЕ УВЕРЕНЫ

Многое зависит от формы, в которой вы делаете расчеты. Обычная форма для скидки и последующего налога следующая:

подсчитайте скидку:	для £100 скидка составляет £20,
вычтите ее из цены:	$\pounds 100 - \pounds 20 = \pounds 80$,

подсчитайте налог:	15% от £80 — это £12,
добавьте налог и получите окончательную цену:	$\pounds 80 + \pounds 12 = \pounds 92$.

Попробуйте найти другие способы подсчета, пока не найдете тот, что показывает, почему ваш результат всегда правильный. Например, вы хотите найти форму подсчета, которая не зависит от начальной цены. Чтобы сделать это, попробуйте посчитать, какой процент от исходной цены вы платите, когда налог уже вычтен и какой процент от исходной цены вы платите, когда добавлен налог.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

В любом случае вы узнаете, что:

(а) вычесть 20% из цены — все равно что заплатить 80%, т.е. вы платите 0,80 от цены;

(б) добавить 15% к цене — все равно что заплатить 115%, т.е. вы платите 1,15 от цены.

Затем для любой исходной цены, скажем, £100, посчитав

сначала скидку:	вы платите $1{,}5 \times (0{,}80 \times \pounds 100)$,
сначала налог:	вы платите $0{,}8 \times (1{,}15 \times \pounds 100)$.

Записав подсчет в такой форме, вы убедитесь, что порядок вычисления не имеет значения, потому что в итоге мы умножаем исходную цену на два числа в любом порядке. Если исходная цена £P, то, посчитав

сначала скидку:	вы платите $1{,}5 \times 0{,}80 \times \pounds P$,
сначала налог:	вы платите $0{,}8 \times 1{,}15 \times \pounds P$,

и они всегда равны.

Обратите внимание, сколь важно отстраниться от деталей подсчета и посмотреть на его форму или вид. Подобная мыслительная деятельность является основой для развития вашего математического мышления.

«*Склад*» иллюстрирует несколько важных аспектов математического мышления, на два из которых я хочу обратить ваше внимание. Во-первых, есть особые процессы, которые помогают математическому мышлению. В данном случае процесс, на который делается упор, — это ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ, что подразумевает обращение к примерам, чтобы выяснить все про вопрос. Выбранные вами примеры особенные — в том смысле, что они представляют собой частные случаи более общей ситуации в самом вопросе. Во-вторых, если вы ЗАСТРЯЛИ, ничего сверхъестественного в этом нет и, как правило, можно найти тот или иной выход. В данном случае это ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ. Это простой способ, использовать который может каждый, и, когда вопрос ставит людей в тупик, предложения типа

А вы не пробовали на конкретном примере?

и

Что произойдет в этом отдельном случае?

сталкивают их с мертвой точки.

Следующий пример, взятый нами из сборника Banwell, Saunders and Tahta (1986), иллюстрирует другие формы экспериментирования.

Полоска бумаги

Представьте себе длинную узкую полоску бумаги, вытянутую перед вами слева направо. Представьте, что взялись за ее концы и положили тот конец полоски, что у вас в правой руке, поверх левого. А теперь плотно прижмите полоску и сложите пополам, чтобы получилась складка. Повторите всю операцию полностью на получившейся полоске еще два раза. Сколько всего получится складок? А сколько будет складок, если операцию повторить 10 раз?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Экспериментируйте в уме, сосчитав складки после двух сложений.

– Может, рисунок поможет укрепить мысленный образ.
– Экспериментируйте, попробовав сложить полоску бумаги.
– Попробуйте сделать три сложения, а потом четыре сложения. Ищите схему.
– Что вы хотите найти? Будьте внятны и точны.
– Есть ли нечто, имеющее отношение к складкам, что можно подсчитать более простым способом?
– Проверьте все предположения на новых примерах!

Я не собираюсь давать полного решения этого вопроса. Если вы ЗАСТРЯЛИ, не огорчайтесь. Оказаться в положении «ЗАСТРЯЛИ» — это здорово, если рассматривать эту ситуацию как возможность чему-либо научиться. Может, вы вернетесь к этому вопросу с новой энергией, когда одолеете следующую главу! Прежде чем покончить с этим вопросом, попробуйте мысленно до пяти сложений с помощью рисунков или с настоящей бумажной полоской. Сосчитайте складки и начертите таблицу с результатами. Если в «*Складе*» конкретизация означает обращение к числовым примерам, то в «*Полоске бумаги*» надо использовать рисунки или настоящие бумажные полоски и экспериментировать.

Важно использовать то, чем вы можете уверенно манипулировать. Это могут быть физические предметы или математические, например диаграммы, числа или алгебраические символы.

Экспериментирование само по себе вряд ли решит для вас любой вопрос, но оно наверняка подтолкнет вас к действиям и настроит на нужный лад. Вопрос теряет свой пугающий внешний вид и становится уже не таким неприступным. Более того, частные случаи должны помочь вам почувствовать, в чем именно состоит вопрос, и это натолкнет на верную догадку. Дальнейшая тщательная конкретизация с упором не на «что», а на «почему» может привести к осознанию того, что на самом деле происходит.

Следующий вопрос относится к более знакомой области.

Палиндромы

Палиндромом называется число, например 12321, если оно читается одинаково — как слева направо, так и справа налево. Один мой друг уверяет, что все четырехзначные палиндромы делятся на 11. Так ли это?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Найдите несколько четырехзначных палиндромов.
– Вы верите моему другу?
– Что вы хотите показать?

Вариант решения

Помните, что это всего лишь вариант и в полировке он не нуждается, — это всего лишь один из способов размышления над вопросом. Единственно разумный путь — начать с экспериментирования. Я хочу прочувствовать, о каких числах идет речь. Что же такое палиндромы?

747 — это палиндром,

88 и 6 — тоже палиндромы.

В вопросе речь идет лишь о палиндромах с четырьмя разрядами, т. е. таких числах, как 1221, 3003, 6996 и 7557. Что же мне нужно узнать? Мне нужно узнать, все ли такие числа делятся на 11.

ПРОВЕРЬТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Попробовав на отдельных числовых примерах, я убедился в том, что такой результат вполне возможен. Однако заметьте: я не могу быть уверен в том, что мой результат *всегда* верен на основании исключительно экспериментирования, разумеется, если я не собираюсь проверить *все* четырехзначные палиндромы. Поскольку их всего около 90, целесообразнее поискать скрытую модель.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

Я взял для примера четыре конкретных случая:

$$1221/11 = 111,$$

$$3003/11 = 273,$$

$$6996/11 = 636,$$

$$7557/11 = 687,$$

но не нашел в них никакой очевидной модели. Это наводит на мысль об исключительно важном моменте относительно экспериментирования. Выбирать примеры наугад — неплохой способ прояснить вопрос и понять, может ли утверждение или догадка быть верной, но если мы ищем модели, успех более вероятен, если экспериментирование осуществлять систематически. Как я могу действовать систематически в данном случае?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Какой самый маленький четырехзначный палиндром?
– Какой следующий за ним самый маленький?
– Каким образом из одного палиндрома сделать другой?

Один способ состоит в следующем: начать с самого маленького четырехзначного палиндрома (то есть с 1001) и продолжать по нарастающей в числовом порядке:

$$1001, 1111, 1221, 1331, \ldots .$$

Проверим утверждение моего друга:

$$\begin{aligned} 1001/11 &= 91, \\ 1111/11 &= 101, \\ 1221/11 &= 111, \\ 1331/11 &= 121. \end{aligned}$$

Это не только подтверждает утверждение моего друга, но и предполагает нечто большее. Обратите внимание: каждый из приведенных палиндромов больше предыдущего на 110, а каждое частное больше предыдущего на 10.

АГА! Теперь я понимаю, почему утверждение моего друга верно. Разница между последовательными палиндромами всегда 110. Самый маленький четырехзначный палиндром (1001) точно делится на 11, равно как и 110. Поскольку все последующие палиндромы получаются из 1001 прибавлением 110, все четырехзначные палиндромы должны делиться на 11.

Таким образом, вопрос решен, осталось только «причесать» решение и красиво сформулировать.

Или не решен? Покрывает ли решение все конкретные случаи, которые я использовал? Присмотритесь внимательнее! Если все палиндромы можно получить, последовательно прибавляя 110 к 1001, то у всех палиндромов в разряде единиц будет один. Но ведь это не так! 7557 — тоже палиндром, а в разряде единиц стоит 7. Где же ошибка? Экспериментирование привело к модели (что последующие палиндромы отличаются на 110), на основании которой я выстроил свое решение. Но эта модель не работает для всех палиндромов, поскольку предсказывает нечто ложное (все палиндромы не оканчиваются на один). Ошибка заключается в том, что мы на основании всего лишь трех разностей скоропалительно сделали общий вывод. К счастью, конкретизация снова нам поможет: на этот раз выявить недостаток модели. Посмотрите на нижеследующий перечень палиндромов:

Палиндромы	1881	1991	2002	2112	2222	2332
Разности	110	11	110	110	110	

На этот раз я приступлю с большей осторожностью и, скорее, с недоверием, нежели с доверием. Судя по модели, последующие палиндромы отличаются от предыдущих на 110, за исключением тех случаев, когда меняется тысячный разряд (и тогда разность 11). Дальнейшая конкретизация дает результаты, согласующиеся с этим, и умножает уверенность в том, что это и есть искомая модель. Таким образом, конкретизация снова подтвердила нам то, что модель может быть верной. А теперь пришло время искать общую причину, почему новая модель работает, в результате чего должно получиться нечто вроде следующего.

> Последующие палиндромы с одинаковыми тысячными разрядами, чтобы быть палиндромами, должны иметь такие же разряды единиц. Таким образом, числа отличаются только вторым и третьим разрядом, каждый из которых больше единицы. Следовательно, разность составляет 110.
>
> Последующие палиндромы, которые отличаются тысячными разрядами, получаются в результате прибавления 1001 (чтобы увеличить разряд тысяч и единиц) и вычитания 990 (чтобы уменьшить второй и третий разряды с девяти до нуля). Но, как видно из примеров, $1001 - 990 = 11$.
>
> В обоих случаях разность делится на 11; таким образом, поскольку самый маленький четырехзначный палиндром (1001) делится на 11 (это так), то и все остальные тоже делятся.

А теперь вернемся назад и посмотрим, каким образом я использовал частные случаи:

– Они помогли мне осознать вопрос, заставив уяснить, что такое палиндром.
– Они также привели меня к обнаружению формы четырехзначного палиндрома.
– Я сумел убедиться на примерах в том, что утверждение моего друга верно.
– Позднее в результате экспериментирования выявилась модель рассуждений, и я получил представление о том, почему этот результат верен.
– Проверяя верность модели (а она не была верна), я воспользовался другими частными случаями.

Именно потому что конкретные примеры можно использовать так эффективно, так легко и столь разнообразно, она и является основой математического мышления.

Аргументация, приведенная в моем решении, никоим образом не является образчиком элегантности. Первая попытка редко похожа на варианты решений, которые вы найдете в учебниках. Если вы достаточно продвинуты в математике и уверенно обращаетесь с буквами, заменяющими произвольные числа, то намного быстрее получите решение.

Может, вы обратили внимание на то, что все четырехзначные палиндромы имеют вид $ABBA$, где A и B — цифры. Такое число имеет следующее значение:

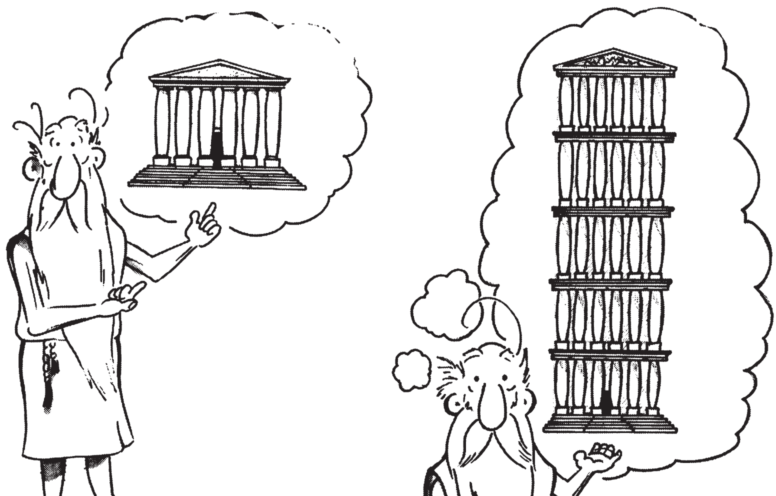
$$\begin{aligned}1000A + 100B + 10B + A &= (1000+1)A + (100+1)B = \\ &= 1001A + 110B = \\ &= 11 \times 91A + 11 \times 10B = \\ &= 11(91A + 10B).\end{aligned}$$

(Если вам подобное рассуждение с символами представляется слишком сложным, проследите его на частном примере, положив $A = 3$ и $B = 4$. Затем повторяйте вычисления с другими конкретными значениями для A и B, пока не прочувствуете схему, выраженную алгебраическими символами.)

Элегантные решения, подобные этому, явно не имеют отношения к частным случаям, поскольку с помощью символов дают общую аргументацию, подходящую для всех четырехзначных палиндромов сразу. Однако, чтобы придумать это решение, я должен быть достаточно близко знаком с математическими объектами задачи (а именно четырехзначными палиндромами, переменными A и B и десятичной записью чисел), чтобы общая форма $ABBA$ стала частной и внушала доверие. Я должен с легкостью манипулировать как палиндромами, так и заменяющими их символами. В этом суть экспериментирования. Обращение к знакомым, внушающим доверие объектам и использование их для исследования существа вопроса, создают ощущение уверенности и легкости в незнакомых ситуациях.

Обобщаем

Говоря о частных случаях, немыслимо избежать обратной стороны медали, т. е. процесса обобщения: исходя из отдельных примеров строить предположения об обширном классе предметов.



Обобщение — *источник жизненной силы* математики. Если конкретные результаты могут сами по себе быть полезными, то общий случай представляет собой истинно математический результат. Например, в задаче «*Склад*» мы знаем, что будет с товаром стоимостью £100, но эта информация менее важна, чем то, что окончательная цена абсолютно не зависит от порядка вычисления скидки и налога.

Обобщение начинается, когда вы чувствуете скрытую схему, даже если не можете ее сформулировать. Посчитав скидку и налог для нескольких цен, я заметил, что порядок подсчета не влияет на конечный результат. Это и есть скрытая схема, или обобщение. Я предположил, что порядок вычисления никогда не повлияет на результат. Когда подсчеты были записаны в удобной форме, было несложно ввести символ P (price — цена) для начальной цены и показать, что обобщение верно.

Обобщение на этом не должно заканчиваться. А что если скидка и цена изменятся? Может, иногда порядок вычисления все-таки имеет значение?

ЕСЛИ ВЫ ЕЩЕ ЭТОГО НЕ СДЕЛАЛИ,
ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Я надеюсь, что по форме вычисления, полученной ранее, вы поняли, что конкретные проценты не имеют отношения к рассуждениям. Часть силы символов в математике состоит в том, чтобы выражать подобную модель. В данном случае обозначим скидку как дробь D, обозначим налоговую ставку как дробь V, а исходную цену обозначим через P. Итак, если

сначала считаем скидку:	вы платите $P(1-D)(1+V)$,
сначала считаем налог:	вы платите $P(1+V)(1-D)$.

Они всегда равны, поскольку порядок, в котором мы перемножаем числа (а значит, и символы, которые их заменяют), не меняет конечного результата. Привлечение символов позволяет представить рассуждение в кратком виде, и можно одновременно иметь дело с целыми классами примеров (в данном случае любыми ценами, налоговыми ставками и скидками). Однако использовать символы не так просто, как может показаться, — символы должны стать такими же знакомыми и значимыми, как числа, которые они заменяют.

«*Склад*» в простой форме иллюстрирует постоянное взаимодействие частностей и обобщения, что составляет значительную часть математического мышления. Частные случаи привлекаются для получения данных, на основании которых можно сделать обобщение. Сформулировав схему, которую вы почувствовали, мы делаем предположение (догадались или кто-то подсказал), которое дальнейшие частные случаи могут подтвердить или опровергнуть. Процесс подтверждения предположения требует дальнейшего обобщения, причем акцент смещается с догадки, которая может оказаться верной, к пониманию того, почему она может быть верна. Решая «*Склад*», я сначала обобщил результат, предположив, что изменение порядка вычисления не влияет на окончательный результат («что»). Для подтверждения своего предположения мне пришлось заняться методом вычисления («почему»).

«*Палиндромы*» иллюстрируют два других важных аспекта обобщения. Частные случаи должны быть систематическими, тогда они способствуют обобщению, поскольку модель более очевидна не на выбранных наугад, а на связанных между собой примерах. Однако тут есть скрытая угроза. Иногда модель кажется очевидной, и так заманчиво убедить себя в ее верности, но в действительности она верна лишь отчасти. В «*Палиндромах*» была упущена разница в 11 между некоторыми последовательными палиндромами, поскольку не проверили примеры, где менялись тысячные разряды. Надо быть осторожным и не хвататься за кажущуюся очевидной модель или обобщение, не проверив их на большом количестве примеров. Это основа математического мышления. В равной мере опасно бросаться с головой в предположение и отмахиваться от догадки. В главах 5 и 6 речь и пойдет об этой тонкой грани между готовностью поверить в обобщение и нежеланием шагнуть в неизведанное.

Делаем заметки

Прежде чем мы перейдем к другим примерам экспериментирования и обобщения, я хочу показать вам способ записи математического опыта. Метод этот вводится сейчас, потому что вы должны начать записывать свои наблюдения, чтобы они не потерялись и потом можно было их проанализировать и изучить. Запись наблюдений поможет вам подмечать их, а это способствует развитию математического мышления. Старайтесь записывать три вещи:

– все важные мысли, которые приходят вам в голову, когда вы ищете ответ на вопрос;
– что вы пытаетесь делать;
– ваши ощущения по этому поводу.

Само собой разумеется, это не так просто, но попробовать стоит. В частности, это здорово помогает, когда вы попадаете в тупик; так и пишите — ЗАСТРЯЛИ! Признать это равнозначно первому шагу, чтобы выбраться из этого состояния.

Записывая свои ощущения и математические идеи, которые приходят вам на ум, вы заполняете пустоту белого листа, который лежит перед вами, когда вы приступаете к задаче.

Как только начало положено, мыслям становится свободнее. Потом очень важно записывать, что вы пытаетесь сделать, поскольку можно сбиться с выбранного пути и забыть, почему вы начали выполнять то или иное сложное вычисление. Нет ничего хуже, чем отвлечься на миг от какого-нибудь занятия и осознать, что вы понятия не имеете, что делаете и почему!

Возьмите себе за правило: делайте записи в процессе работы над любой из предложенных в книге задач. *Пусть вас не пугает* большой объем вещей, которые надо записывать. Из главы в главу я буду подсказывать вам, что именно нужно записывать. Самый подходящий момент — начать прямо сейчас, так что попытайтесь делать записи, когда приступите к работе над следующей задачей. *Избегайте подробно описывать* то, что вы делаете. Вам нужны краткие записи, которые помогут вспомнить конкретный момент. Не забывайте про частные случаи и обобщение и сравните свой отчет с моим лишь тогда, когда сделаете все, что можете. Мой отчет наверняка окажется более формальным, чем ваш, и для удобства некоторые фразы я даю прописными буквами.

Лоскутное одеяло

Нарисуйте квадрат и проведите прямую линию прямо через него. Начертите еще несколько прямых линий в любом расположении таким образом, чтобы квадрат разделился на несколько частей. Задача состоит в раскрашивании всех участков так, чтобы смежные были раскрашены в разные цвета. (Участки, имеющие лишь одну общую точку, смежными не считаются.) Сколько различных цветов понадобится, чтобы раскрасить такой разделенный на куски квадрат?

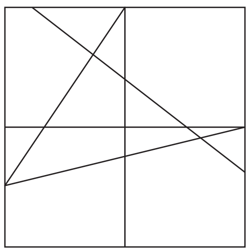
ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС.
ЗАПИШИТЕ МЫСЛИ И ОЩУЩЕНИЯ,
ОБРАЩАЯСЬ К МОИМ КОММЕНТАРИЯМ,
ТОЛЬКО ЕСЛИ ВЫ ЗАСТРЯЛИ

ЗАСТРЯЛИ?

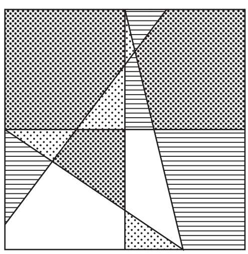
– Проясните вопрос с помощью конкретных примеров — постарайтесь раскрашивать в определенном порядке.
– Что вы ЗНАЕТЕ? Как получилось такое расположение?
– Что вам НУЖНО узнать?
– Следуйте системе!

Вариант решения

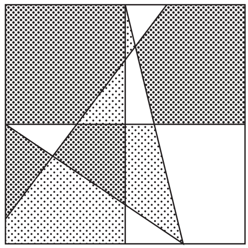
О чем спрашивается в задаче? Попробуйте на отдельном примере, т. е. экспериментируйте, чтобы понять, что происходит.



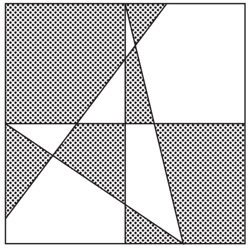
Эти пять прямых образовали 13 участков. Я ЗНАЮ, что мне надо раскрасить их таким образом, чтобы смежные имели разные цвета. Вот один из способов, если использовать четыре цвета:



Мне НУЖНО найти минимальное число цветов, которые необходимы при любом расположении линий. Четыре — это действительно минимальное число цветов, необходимых для этого? ПОПРОБУЙТЕ использовать только три цвета:

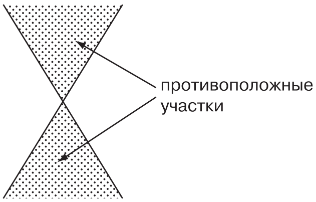


Получилось! Попробуйте еще, используя только два цвета.

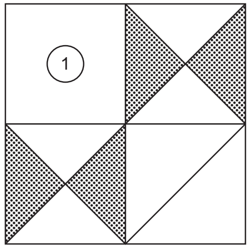


Опять получилось! Очевидно, что одного цвета недостаточно, поэтому для данного конкретного расположения достаточно двух цветов.

Раскрашивая области, я обратил внимание на то, что «противоположные» участки все время раскрашивал одним и тем же цветом (обобщение!).

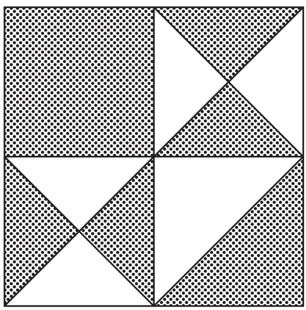


А всегда ли достаточно двух цветов? ПРОВЕРЬТЕ на другом примере — старайтесь использовать два цвета и не забывайте о «противоположном» правиле (опять конкретизация!).



АГА! «Противоположное» правило не работает. Когда темные участки раскрашены, используя «противоположное» правило, участок (1) не может быть ни темным, ни белым. И с другими участками та же проблема. Либо мне нужно больше двух цветов, либо я должен отказаться от «противоположного» правила. Так какой же путь мне выбрать?

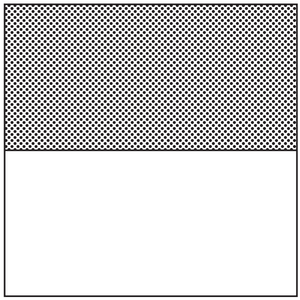
ПОПРОБУЙТЕ раскрасить снова двумя цветами и откажитесь от «противоположного» правила.



В процессе этой успешной попытки я заметил, что как только один участок раскрашен, работать с остальными легко. Участки, смежные с раскрашенным, должны непременно быть другого цвета — «смежное» правило. «Противоположное» правило не работает, но теперь я делаю предположение, что любое расположение участков можно раскрасить только двумя цветами (обобщаю, чтобы найти, ЧТО может быть верно).

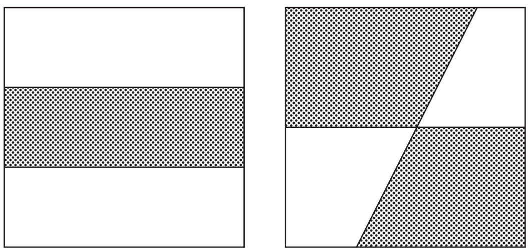
В настоящий момент у меня не так много оснований полагать, что мое предположение верно. ЗАСТРЯЛИ! Как мне убедить себя, что оно верно всегда? АГА! экспериментируем, следуя системе.

Одна линия:



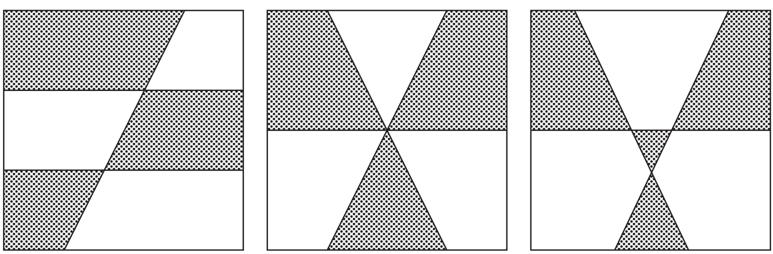
двух цветов достаточно

Две линии:

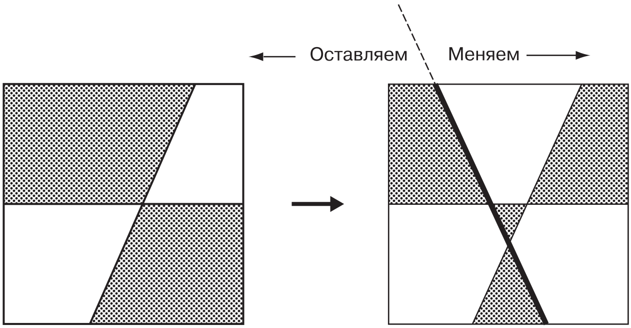


двух цветов достаточно

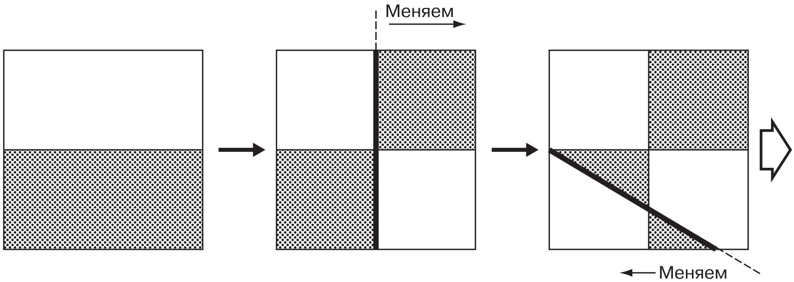
Три линии:



АГА! Поскольку я действую по системе, следя за тем, что происходит, когда я добавляю новую линию, я начинаю понимать, почему двух цветов всегда достаточно (обобщаю, чтобы понять ПОЧЕМУ). Когда я добавляю новую линию (скажем, третью), некоторые из старых участков разрезаются на две части. Теперь все участки (целые и разрезанные куски) по одну сторону новой линии я оставляю в том же цвете. По другую сторону новой линии я должен изменить цвет всех участков. Посмотрите, как это работает для трех линий:



Проверьте еще раз: проверяйте этот метод, раскрашивая первый пример (еще экспериментирование).



Это работает для данного примера и, я думаю, будет работать всегда. Весь квадрат раскрашен соответствующим образом, потому что

– участки по обе стороны новой линии раскрашены как нужно, поскольку смежные участки раскрашены другим цветом по сравнению со старой раскраской;
– смежные участки вдоль новой линии также раскрашены поразному.

Таким образом, весь квадрат целиком с добавленной новой линией раскрашен должным образом.

А может, мне просто повезло, что новый метод дал ту же раскраску квадрата, что и мои первые трудоемкие попытки? А что бы было, если бы я добавил линии в другом порядке, используя новый метод? Получилась бы новая раскраска? И вообще, сколько разных вариантов раскраски возможно в этом примере? А что если вместо прямых линий были бы кривые? А если бы речь шла о плоскостях в пространстве? Настоятельно рекомендую рассмотреть некоторые ситуации, поскольку чтобы полностью понять вопрос, необходимо рассмотреть вариант решения в более широком контексте.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

Еще один важный способ полностью понять и оценить вариант решения — это не пожалеть времени и «обозреть» то, что вы уже сделали. Записи, которые вы делаете в процессе работы над тем или иным вопросом, бесценны: вы не поверите, как мало людей помнят то, что они делали. *Не следует* тратить время на восстановление того, что вы «должны» были бы сделать. *Значительно важнее* просмотреть то, что вы *уже сделали*. Может, у вас возникнет желание сравнить свои записи с моими. Наверняка вы запишете значительно меньше, чем я, — на самом деле мои записи со временем значительно выросли. Однако каждое слово, выделенное прописными буквами, появилось из первоначальной стенографической записи рассуждений. Вероятно, вы выберете другие примеры. Пытаясь найти нужный вариант раскраски, вы могли найти другую модель или правило, наподобие моего правила «противоположности» или «смежности». Самое важное — заметить его и постараться сформулировать. Когда модель записана на бумаге, ее можно изучить со всей придирчивостью, что невозможно сделать, пока она существует лишь у вас в голове. Как выяснилось, правило «противоположности» оказалось несущественным, но проверить его, выяснить, нужно оно или нет, и видоизменить стало возможным лишь в процессе его формулирования. Обратите внимание на использование экспериментирования:

– случайно, чтобы прочувствовать вопрос;
– систематически, чтобы подготовить почву для обобщения;
– искусно, чтобы проверить правильность обобщения.

Вариант решения также демонстрирует несколько разных способов использования обобщения. Обобщение частных случаев (ЧТО) привело к предположению, что любой расклад участков можно раскрасить двумя цветами. Методы обобщения привели к правилу «противоположности» (которое оказалось ложным), к правилу «смежности» (которое оказалось верным) и в конечном итоге к способу раскраски, основанному на введении линий поочередно, по одной. Этап убеждения, обозначенный лишь в общих чертах, привел к дальнейшему обобщению, с упором на «ПОЧЕМУ».

Перед «*Лоскутным одеялом*» я предложил, чтобы вы записывали свои мысли, ощущения и идеи. Может, вы по той или иной причине решили, что это необязательно, и не стали этого делать. Если вы ничего не записывали, то упустили возможность узнать что-нибудь о себе самом и о природе мышления. Рекомендую не жалеть времени и прорабатывать все вопросы самым тщательным образом. Если же вы делали записи, думаю, что это оказалось не таким простым занятием. Поначалу это на самом деле кажется лишним и утомительным, но внутренняя дисциплина на этой стадии непременно в будущем принесет плоды. Чтобы этот процесс упростить и сделать максимально эффективным, я постараюсь разъяснить, что именно надо записывать. Конкретные детали или модель впоследствии могут стать каркасом для развития вашего математического мышления.

Этот каркас будет постоянно помогать вам — при условии, что вы воспримете его и включите в свой арсенал. В противном случае он окажет вам лишь временную незначительную помощь.

Этот каркас, или матрица, состоит из ряда ключевых слов. Когда вы используете эти слова, они насыщаются ассоциациями из прошлого математического опыта, и посредством этих ассоциаций они могут напомнить вам о стратегии, которой вы пользовались ранее. В этой главе мы вводим четыре ключевых слова, в главе 2 мы продолжим вводить новые. Всю матрицу ключевых слов будем называть РУБРИКОЙ, следуя средневековой римской традиции писать заглавие закона красным на полях сводов законов (от латинского ruber — красный). Процесс записи своих мыслей я называю записью с помощью РУБРИК.

Предлагаю начать пользоваться в записях и процессе мышления следующими четырьмя ключевыми словами:

«ЗАСТРЯЛИ!», «АГА!», «ПРОВЕРЯЙТЕ» и «АНАЛИЗИРУЙТЕ».

Как только вы поймете, что зашли в тупик, так и пишите — ЗАСТРЯЛИ! Это поможет вам продвигаться вперед, поскольку вы начнете думать и напишете, почему же вы застряли. Например:

Я не понимаю. . . .

Я не знаю, что делать с. . . .

Я не представляю, каким образом. . . .

Я не могу понять, почему. . . .

АГА! Как только вам придет в голову некая мысль или догадка, сразу же записывайте их. Таким образом, мысль не будет утрачена. Часто людям приходят в голову хорошие мысли, но они их теряют и потом не могут вспомнить. В любом случае довольно приятно написать «АГА» (= так вот в чем дело!). А потом напишите:

Попробую. . . .

Может быть, ...

Но почему. . . .

ПРОВЕРЯЙТЕ

– Незамедлительно проверяйте все расчеты и аргументацию.
– Проверьте все догадки на частных случаях (экспериментирование).
– Убедитесь в том, что ваше решение на самом деле удовлетворяет исходному вопросу.

АНАЛИЗИРУЙТЕ

Когда вы сделаете все, что могли или хотели сделать, потратьте время на то, чтобы проанализировать все, что произошло. Даже если вам кажется, что вы не слишком далеко продвинулись, всегда помогает записать все, что вы сделали, чтобы потом вы могли вернуться к этому со свежим взглядом и эффективно использовать. К тому же процесс подведения итогов очень часто помогает ликвидировать «затор». В частности, следует иметь в виду следующие вещи:

– записывайте ключевые мысли;
– записывайте ключевые моменты, которые остались у вас в памяти;
– подумайте, какой позитив можно вынести из данного опыта.

Я настоятельно рекомендую, работая над любым вопросом, взять за правило пользоваться записью с РУБРИКАМИ. Вы можете пользоваться другими словами по своему усмотрению, самое главное — чтобы эти слова вызывали в вас много ассоциаций и вы могли воспользоваться наиболее подробными советами, предложенными в этой и последующих главах. Может, вы не в состоянии удержать в памяти все полезные советы, которые вам предлагают. Вместо того чтобы зависеть от кого-нибудь, кто поможет вам выйти из тупика своим своевременным советом, вы сумеете опереться на свой собственный опыт. РУБРИКА — это способ воспользоваться этим опытом, и в главе 7 мы обсудим, как связывать подробные советы с ключевыми словами (РУБРИКАМИ).

Пользуясь РУБРИКАМИ, не надо быть буквальным или догматичным. Постепенно, с опытом фразы-рубрики будут появляться наиболее естественным путем, обозначая, что следует сделать, и предлагая конкретные шаги. Иногда не надо торопиться записывать мысль на бумаге — дайте ей возможность сформироваться, а то она ускользнет от вас. Впрочем, как правило, запись ключевых слов помогает формулированию мыслей. И еще один практический совет: не записывайте свои мысли беспорядочно, в разных местах листа бумаги. Сначала вести записи с помощью рубрик кажется сложным занятием, но если вы приложите старания, это принесет плоды.

Однако хватит о РУБРИКАХ! Исследуйте следующий вопрос, записывая мысли и варианты решения под РУБРИКАМИ. Не забывайте про экспериментирование и используйте обобщение на основании частных случаев.

Шахматные клетки

Существовала точка зрения, что на обычной шахматной доске 204 квадрата. Можете ли вы подтвердить эту точку зрения?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС — ЗАПИСЫВАЙТЕ, ИСПОЛЬЗУЯ РУБРИКИ

ЗАСТРЯЛИ?

– Как правило, принято считать, что на шахматной доске 64 квадрата.

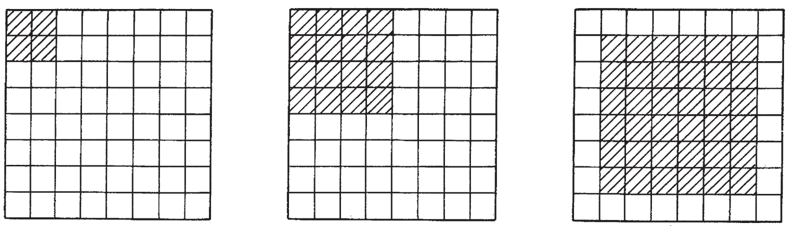
– О каких же еще квадратах идет речь?

– Если вы чувствуете, что запутались и ситуация слишком усложняется, используйте конкретные примеры! Представьте, что доски меньшего размера.

– Следует считать квадраты по определенной системе, однако есть масса способов сосчитать квадраты. Попробуйте найти хотя бы два разных способа, прежде чем воспользоваться одним из них.

Вариант решения

Что бы это могло значить? Похоже, я ЗАСТРЯЛ: ведь на обычной шахматной доске 64 квадрата — 8 рядов и 8 столбцов. АГА! Понятно: речь идет и о более крупных квадратах, например:

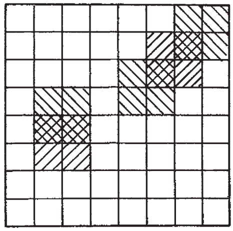


Итак, если следовать новой интерпретации «квадрата», мне НУЖНО сосчитать число квадратов 1×1 (их 64), 2×2, 3×3 и так далее до 8×8 (такой квадрат всего 1). Мне надо заполнить следующую таблицу:

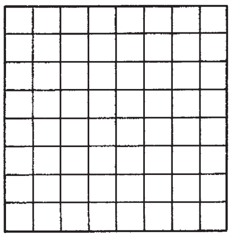
Размер	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
Количество	64							1

и показать, что всего квадратов 204. Во всяком случае это похоже на правду!

ПОПРОБУЙТЕ сосчитать квадраты 2×2. Взгляните на них, обратите внимание, что они находят друг на друга.



Чтобы их сосчитать, мне понадобится систематический подход. Сколько квадратов касается верхней линии шахматного поля?



Я насчитал семь. Сколько квадратов касается следующей горизонтальной линии? Сосчитайте их: снова семь. Ну-ка, а сколько квадратов касается следующей горизонтали? Опять семь?! А что я имею в виду, когда говорю «касается» линии? Я подразумеваю, что верх маленького квадрата лежит на линии, в противном случае, я бы насчитал вдвое больше. Дальнейший подсчет дает снова семь. АГА! — в каждом ряду 7 квадратов (обобщение). Вдоль скольких линий нужно считать? Всего у нас 9 горизонтальных линий, но квадраты 2×2 не касаются нижней линии; значит, в итоге у нас 49 квадратов (7 квадратов, касающихся каждого из 7 рядов).

Размер	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
Количество	64	49						1

АГА! Думаю, я вижу модель: 64 — это 8×8, 49 — это 7×7. Итак, можно предположить, что у нас будет $36 = 6 \times 6$ квадратов 3×3 (обобщение и предположение).

ПРОВЕРЬТЕ, пересчитав квадраты 3×3. Сколько из них касается верхней линии? Я насчитал 6, но теперь я понял причину (обобщение). У нас 9 вертикальных линий, пересекающих верхнюю линию, и каждая точка пересечения может быть левым верхним углом квадрата 3×3 — за исключением трех точек с правого края. Следовательно, у нас $(9-3)$ квадратов размером 3×3, касающихся верхней линии, и, сделаем обобщение, будет $(9-K)$ квадратов размером $K \times K$, касающихся верхней линии. Кроме того, будет $(9-3)$ горизонтальных линий, которых касаются верхушки квадратов 3×3 (всего 9, и нижние 3 использовать нельзя). Следовательно, $(9-K)$ линий могут касаться $K \times K$ квадратов. Итак, всего их должно быть $36 = (9-3) \times (9-3)$ квадратов размером 3×3 и будет $(9-K) \times (9-K)$ квадратов размером $K \times K$.

Теперь я могу заполнить всю таблицу. К счастью, мои предыдущие результаты (для 1×1, 2×2 и 8×8) отлично вписываются и моя догадка подтвердилась (ПРОВЕРКА).

Размер	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
Количество	64	49	36	25	16	9	4	1

Как бы меня ни радовала эта таблица, я еще не закончил! Мне НУЖЕН суммарный результат числа клеток на доске, который составляет

$$64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204.$$

В результате АНАЛИЗА я заметил, что данный ответ в обобщенном виде распространяется на доски с N рядами и N столбцами. На такой доске число квадратов $K \times K$ можно определить, если заметить, что в каждом ряду $(N+1-K)$ квадратов размером $K \times K$ и есть $(N+1-K)$ рядов, так что число квадратов размером $K \times K$ составляет $(N+1-K) \times (N+1-K)$. В таком случае число квадратов всех размеров составляет

$$(1 \times 1) + (2 \times 2) + (3 \times 3) + (4 \times 4) + \cdots + (N \times N).$$

Ключевая идея заключалась в систематическом подходе к подсчету квадратов размером 2×2. В результате обобщения этой идеи мы получили желаемый результат. Мне запомнился переход от путаницы и неуверенности в том, что же делать со всеми этими находящими друг на друга квадратами размером 2×2, к простоте и спокойствию подсчитывания тех, что касаются линии.

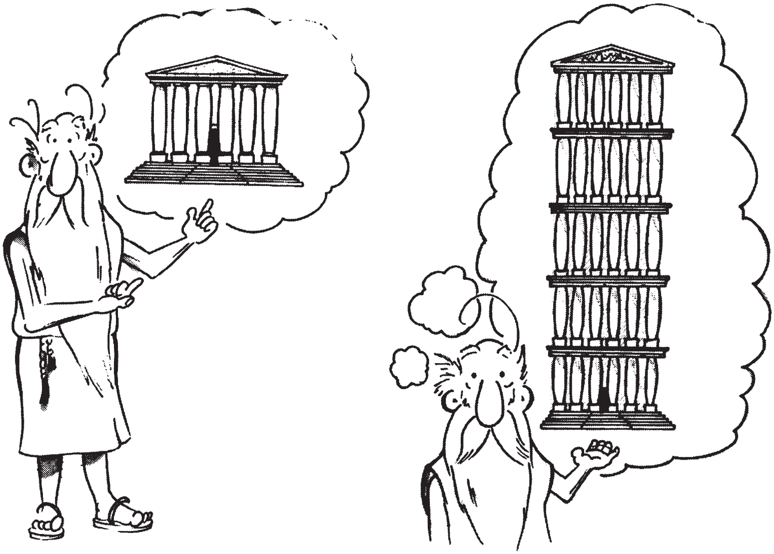
А теперь сравните свои записи с моими. Существует много разных способов решить эту задачу, и может, моя система подсчета отличается от вашей. Например, можно разным цветом пометить положение центров квадратов разных размеров, что в результате даст красивую геометрическую модель, отражающую арифметический результат.

Внимательно изучите свой вариант решения и найдите, где вы использовали экспериментирование и обобщение. Особое внимание обратите на разные способы, где в моем варианте использовалось обобщение. Самый простой случай — когда я заметил, что в каждом ряду одинаковое число квадратов 2×2. На более высоком (или глубоком?) уровне, разбираясь с квадратами 3×3, я обнаружил модель, соединяющую квадрат размером $K \times K$ с числом квадратов в каждом ряду $(9 - K)$ и числом рядов (тоже $9 - K$). Это позволило мне избежать отдельных подсчетов для квадратов 4×4, 5×5, 6×6 и 7×7. И наконец, я смог обобщить суммарный результат, когда понял, как размер шахматного поля (8×8) вошел в вычисления, что привело к полю размером $N \times N$. Есть ли подобные случаи обобщения в ваших записях? Мой вариант решения типичен для результатов, полученных с использованием РУБРИК, хотя опять-таки он более формален и сложен по сравнению с записями, сделанными на скорую руку. Пожалуй, основная характеристика моего варианта решения — большое число вспомогательных вопросов, которые с моей точки зрения целесообразно записывать.

Надеюсь, мой вариант решения иллюстрирует то, что смысл РУБРИК не в том, чтобы буквально следовать им или вмешиваться в ваш процесс мышления. Скорее, это способ организации, записи и накапливании математического опыта. Если это помогает, когда у вас мозг кипит, это уже хорошо. Если это подсказывает вам, что делать, когда вы застряли, это тоже большой плюс.

Обзор и предварительный просмотр

В этой главе вы познакомились с двумя фундаментальными математическими процессами: экспериментированием и обобщением. Не стоит с тоской смотреть на чистый лист, равно как кидаться на первую пришедшую в голову мысль. Любой из нас, если ему задать вопрос, может попробовать ответить на него на каком-нибудь конкретном примере, который приблизит и упростит вопрос. Не стоит браться за примеры, которые сами по себе абстрактны и отвлеченны. Идея в том, чтобы осознать вопрос с помощью конкретных примеров, внушающих вам уверенность в себе, не пытаясь решить сам вопрос. Тогда и только тогда дальнейшее экспериментирование поможет вам ощутить, что происходит. Ну а затем может возникнуть и вариант решения.



Обобщение — это попытка сформулировать общий смысл нескольких частных случаев. А это значит, что необходимо замечать определенные черты, характерные для нескольких отдельных примеров, и игнорировать частности. Как только обобщение сформулировано, оно превращается в предположение, которое предстоит исследовать, чтобы понять, верно это предположение или нет. Именно в этом процессе и состоит суть математического мышления.

ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ подразумевает выбор примеров

– случайный, чтобы прочувствовать вопрос;
– систематический, чтобы подготовить почву для обобщения;
– искусный, чтобы проверить обобщение.

В случае если модель не проявляется, экспериментирование упрощает вопрос, делая его более конкретным или более специальным до тех пор, пока не станет возможным продвижение вперед.

ОБОБЩЕНИЕ подразумевает выбор модели, которая приводит к следующему:

– ЧТО представляется верным (предположение);
– ПОЧЕМУ это похоже на правду (подтверждение);
– ГДЕ это может быть верно, т. е. более общая постановка вопроса (еще один вопрос!).

Способ записи своих мыслей с помощью РУБРИК был предложен для того, чтобы помочь вам замечать, фиксировать и таким образом учиться на основании своего собственного опыта математического мышления. Даже если этот способ записи поможет сделать ваши записи более организованными, это уже весьма существенный результат. По мере углубления в книгу вы не раз убедитесь в его потенциале.

Итак, на данный момент мы ввели следующие слова-рубрики:

«ЗАСТРЯЛИ!», «АГА!», «ПРОВЕРЬТЕ» И «АНАЛИЗИРУЙТЕ».

РУБРИКУ можно представить себе в виде каркаса, вокруг которого возводится здание. Кроме того, такой способ записи способствует проверке и анализу вашего решения, что необходимо для улучшения математического мышления.

Процессы | Рубрика

ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ

- случайно
- систематически
- искусно

ОБОБЩЕНИЕ

- что кажется вероятным
- почему это кажется вероятным
- где это кажется вероятным

ПРОВЕРЬТЕ

АНАЛИЗИРУЙТЕ

При обсуждении вопросов этой главы были затронуты многие из тем последующих глав. В главе 2 речь пойдет об этапах мыслительного процесса, а также будут расширены РУБРИКИ. Будет подробно рассказано о том, как правильно подойти к вопросу и как оценить то, что проделано. Центральный этап, собственно «штурм» вопроса, будет освещен в последующих главах. Все три этапа основаны на фундаментальных процессах ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЯ и ОБОБЩЕНИЯ.

Может, у вас возникнет желание закрепить эти понятия, пытаясь выполнить некоторые задания из главы 10, например следующие, которые тесно связаны с вопросами из этой главы:

«Внутри и снаружи» (стр. 228)
«Фред и Фрэнк» (стр. 222)
«Делимость» (стр. 217)
«Скоростная ловушка» (стр. 252)
«Умножение на пальцах» (стр. 220)
«Суммы квадратов» (стр. 255)

См. главу 11, где есть другие вопросы, входящие в программу обучения.

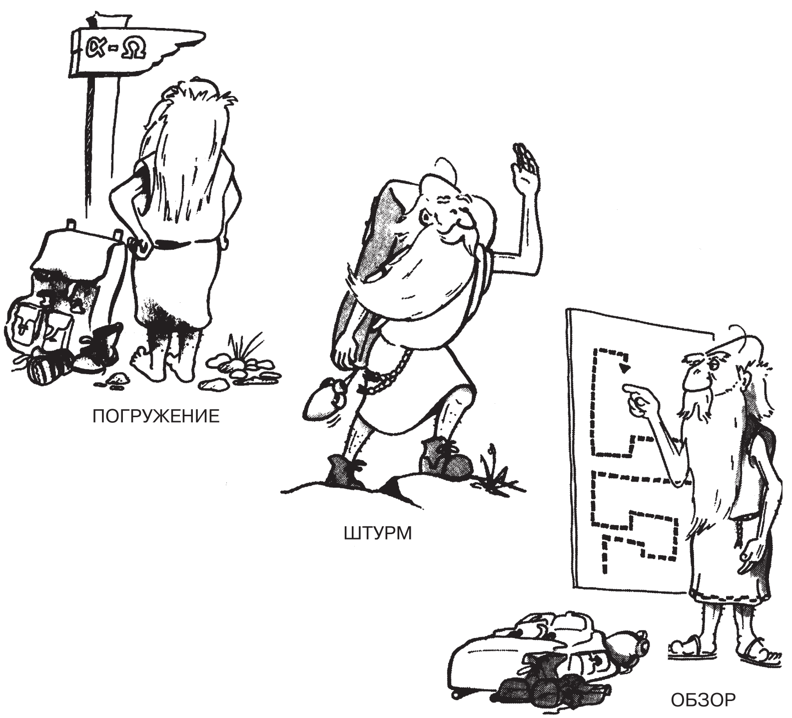
Справочная литература

Banwell, C., Saunders, K. and Tahta, D. (1986) *Starting Points for Teaching Mathematics in Middle and Primary Schools*, updated edn. London: Oxford University Press.

ГЛАВА 2

ЭТАПЫ РАБОТЫ

В этой главе мы разделим процесс работы над вопросом на три этапа, а именно погружение, штурм и обзор. Переход от одного этапа к другому соответствует изменению ваших ощущений относительно вопроса и отражает продвижение вперед либо его отсутствие. Если вы научитесь распознавать указанные этапы в своем мышлении, это поможет вам узнавать соответствующие действия.

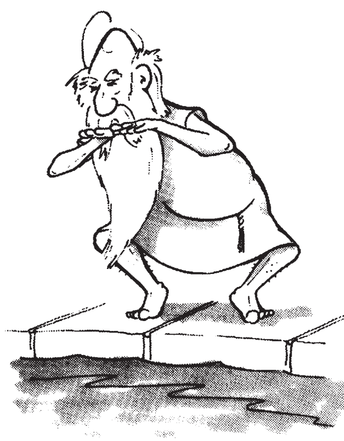


Может показаться, что из трех этапов самым важным является штурм, поскольку в нем происходит основной объем математических действий. Однако на самом деле это не так. Большинство людей не могут должным образом решать вопросы именно из-за того, что не уделяют должного внимания этапу погружения и обзора. Штурм может увенчаться успехом, только если вы надлежащим образом подошли к вопросу и в прошлом потратили время на то, чтобы научиться чему-либо на опыте, анализируя ключевые моменты мышления. В этой главе мы сосредоточимся на погружении и обзоре, а штурмом займемся в последующих главах.

Три этапа

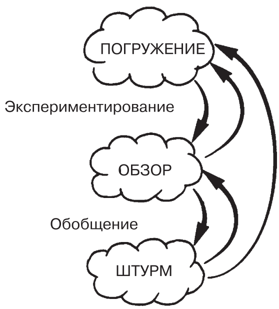
Вернемся к одному из заданий в предыдущей главе, например «*Склад*». Даже после прочтения вопроса два-три раза у вас могло возникнуть ощущение, что вы не до конца уверены в том, в чем же именно суть вопроса. Большинству людей требуется определенное время и усилия, чтобы уяснить вопрос и приступить к штурму. Первый этап, погружение, начинается от прочтения вопроса и заканчивается в тот момент, когда мы приступаем к его решению.

Некоторые люди так торопятся начать, что хватаются за первую мысль, пришедшую в голову, и бросаются в атаку, не осмотрев «поле боя» и не оценив, что к чему. Если вопрос не поддается сходу (зачастую потому, что не был правильно понят), придется начинать все снова. Следовательно, стоит научиться начинать наиболее эффективным способом.



Основные усилия по поиску решения затрачиваются на этапе штурма. Они могут привести к полному решению либо закончиться неполным решением, состоящим из предположений и нерешенных вопросов. В любом случае работа не должна прекращаться вплоть до завершения последнего этапа, обзора, во время которого мы проверяем проделанную работу, анализируем процессы и трудности и, если это возможно, экстраполируем (расширяем) решение.

Например, в задаче «*Склад*» этап погружения заключался в том, что я пришел к предположению, что порядок вычисления не имеет значения. Во время штурма я попытался доказать, что это предположение верно для любой цены, а на этапе обзора проанализировал, как именно я использовал экспериментирование, и расширил вопрос на любые скидки и процентные ставки.



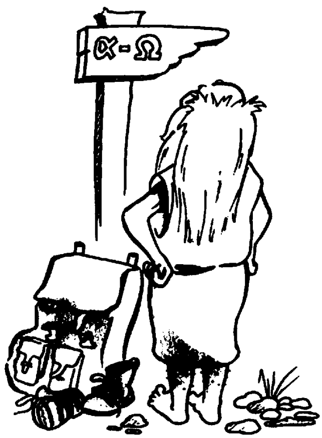
Эти три этапа естественным образом возникают из основных процессов, приведенных в главе 1. Во время этапа погружения мы часто начинаем с экспериментирования, чтобы до конца уяснить суть вопроса. На этапе штурма мы ищем решение вопроса, используя опять-таки экспериментирование и обобщение. Именно на этом этапе чаще всего случаются моменты «ЗАСТРЯЛИ!» и «АГА!».

Попытки разобраться с трудностями могут ограничиться этапом штурма, а могут снова вернуть вас к этапу погружения в задачу. Прежде чем закончить с задачей, необходимо осуществить третий этап, обзор. Обнаруженная ошибка или несоответствие могут снова вернуть вас к погружению или штурму, а если возникнет новый интересный вопрос, например в результате обобщения решения, весь процесс начинается снова.

Эти три этапа представляют собой скелет для последующего обсуждения решения. В этой главе я займусь погружением и штурмом, предложу дополнительные слова для РУБРИК, которыми вы пользуетесь для записи процессов и идей. Более сложный этап штурма послужит темой последующих глав.

Этап погружения

Важно признать, что этап погружения существует и без него никак не обойтись. Многие люди читают вопрос один или два раза и потом резко устремляются к окончательному решению, что вряд ли возможно. Работая на этапе погружения, мы готовим почву для эффективного штурма, а значит, этот этап настолько важен, что не стоит жалеть о потраченном времени.



Погружение начинается, когда передо мной поставлен вопрос. Как правило, вопрос бывает в письменном виде, так что главный совет относительно этапа погружения сводится к следующему: *внимательно читайте условие!* В некоторых случаях вопрос возникает в процессе работы над какой-то задачей или из ситуации, выходящей за пределы математики. Тогда цель этапа погружения состоит в том, чтобы точно сформулировать вопрос и решить, что нужно делать. В любом случае направления движения довольно-таки прямолинейные. Разобраться с вопросом можно двумя способами: восприняв данную информацию и выяснив, в чем именно состоит вопрос. Во время погружения часто происходит техническая подготовка к основному штурму, например, выбор обозначений (формы записи) или средства записи результатов экспериментирования.

Следовательно, весьма эффективно структурировать работу на этапе погружения, ответив на три вопроса:

– Что я ЗНАЮ?
– Что мне НУЖНО узнать?
– Что я могу ВВЕСТИ?

Вам надо включить эти вопросы в ваши записи с использованием РУБРИК. Порядок, в котором вы на них отвечаете, не имеет значения, поскольку они тесно связаны. Итак, памятуя о «ЗНАЮ«, «НУЖНО УЗНАТЬ» и особенно «ВВЕСТИ», постарайтесь дать ответ на следующий вопрос.

Коза на привязи

Коза пасется на привязи длиной 6 метров, прикрепленной к наружному углу сарая размером 4 на 5 метров. На какой площади коза может съесть траву?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– ВВЕДИТЕ схематичный рисунок.
– Запишите, что вы ЗНАЕТЕ.
– Четко определите, что вам НУЖНО узнать.
– Разделите то, что вам НУЖНО узнать, на удобные для работы части.

Моим первым порывом было ввести схематичный рисунок, на котором отметить данную информацию и ее простейшие следствия. Рисунок — один из наиболее мощных инструментов для усвоения информации и может быть полезен не только для вопросов из области геометрии, но и для огромного количества других ситуаций. Разобравшись с тем, что мне известно, я понял: сопоставив то, что я ЗНАЮ, с тем, что мне НУЖНО УЗНАТЬ, можно разделить всю искомую площадь на более простые части (форма экспериментирования), с которыми легко работать, а потом суммировать.

В следующих разделах вы найдете советы по погружению в более подробном виде.

Погружение 1: что я ЗНАЮ?

«*Коза на привязи*» четко иллюстрирует, что у того, что я ЗНАЮ, есть два аспекта. Есть то, что я ЗНАЮ из условия и то, что я ЗНАЮ из предыдущего опыта. Читая условие задачи, я получил информацию о сарае и козе, а нарисовав схему и нанеся на нее информацию, я тут же вспомнил факты и умения, которыми обладаю из своего предыдущего опыта. Если такой спонтанной реакции не происходит, я задаю себе вопрос, видел ли я нечто подобное, и в результате часто возникает идея. Если вы хотите, чтобы у вас появлялись ассоциации из прошлого, используйте РУБРИКИ для записи процессов и анализируйте записи на заключительном этапе.

На этапе погружения оба аспекта «что я ЗНАЮ?» получают ответ в результате извлечения из текста условия всей существенной информации, переваривания ее и записи соответствующих идей. Поскольку одного лишь знакомства с информацией вряд ли достаточно для решения вопроса, предлагаю несколько простых способов усвоения имеющейся информации.

«Читайте условие внимательно» — очевидный совет, которым, увы, часто пренебрегают. Мы не только игнорируем информацию, но еще и бросаемся решать задачу, не поняв ее до конца или поняв неверно. Из-за неверно понятого условия появилось немалое число логических шуток, математических загадок и головоломок, например вот эта классическая:

По дороге в Сент-Джон
Встретил мужа и семь жен.
У каждой по семь сумок,
В каждой сумке семь Мурок,
У каждой семеро котят.
Котята, кошки, сумки и жены —
Сколько их всех шло до Сент-Джона?

Не спешите начинать считать — лучше обратите внимание на направление движения автора загадки и встречной компании. Приведу еще один излюбленный иллюстративный пример.

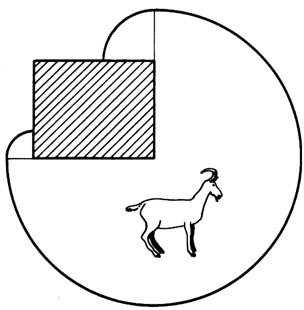
Сколько грязи в яме шириной 3 фута 6 дюймов, длиной 4 фута 8 дюймов и глубиной 6 футов 3 дюйма? Если вы сторонник метрической системы, то размеры ямы 1,06 м на 1,42 м на 2,01 м.

И многие начинают перемножать величины!

Еще один способ воспринять информацию из условия — это экспериментирование, введенное в главе 1. И в «*Полоске бумаги*» и в «*Палиндромах*» экспериментирование использовалось для понимания условия, а конкретнее найти точный вид четырехзначного палиндрома или понять правила складывания бумажной полоски. Цель экспериментирования — ощутить, в чем состоит вопрос, и обрести уверенность и чувство узнавания предметов, о которых идет речь в задаче.

Один из лучших способов проверить, насколько хорошо вы поняли вопрос, — это записать его на бумаге или пересказать кому-нибудь своими словами. Это не значит, что вы должны запоминать формулировку наизусть или переписывать ее слово в слово. Скорее, вы должны найти, в чем суть вопроса, и записать его по-своему. Если вы хорошо усвоили информацию, то должны быть в состоянии перестроить вопрос.

ПОПРОБУЙТЕ ПЕРЕФОРМУЛИРОВАТЬ СУТЬ «КОЗЫ НА ПРИВЯЗИ»



Я переформулировал вопрос «*Козу на привязи*» следующим образом: коза перемещается вокруг сарая последовательными круговыми дугами. Мне нужно найти суммарную площадь секторов. Размеры как таковые не суть важны.

Иногда информация, заключенная в условии, настолько велика и сложна, что вряд ли кто сумеет ее восстановить в подробностях. В подобных случаях стоит потратить некоторое время на то, чтобы информацию классифицировать, рассортироватьи организовать.

Для этого очень полезно строить схемы или составлять таблицы, которые наглядно и систематизированно передадут информацию. Цель состоит в представлении данных задачи в таком виде, чтобы при ее решении можно было с легкостью выбрать и воспользоваться соответствующими «кусками» информации.

Посмотрите на информацию, заключенную в следующей задаче, и попытайтесь представить ее в удобной форме, почувствовав то, что несет в себе каждое предложение, и лишь потом приступайте к решению.

Завтрак дам

Пять дам завтракают, сидя за круглым столом. Миз Осборн сидит между Миз Льюис и Миз Мартин. Эллен сидит между Кэти *и Миз Норрис. Миз Льюис сидит между Эллен и Эллис. Кэти и Дорис — сестры. Слева от Бетти сидит Миз Паркс, а справа от нее — Миз Мартин. Сопоставьте имена и фамилии.*

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– ВВЕДИТЕ схему круглого стола.
– Запишите на диаграмме все, что вы ЗНАЕТЕ о соседках каждой из дам.
– Какую информацию вы не использовали?

Вариант решения

Информация о соседках Миз Осборн, Эллен, Миз Льюис и Бетти позволяет определить, кто где сидит, хотя тут вперемешку имена и фамилии. Информация о том, что Миз Паркс сидит слева от Бетти, ориентирует относительно направления «посадки» дам. В процессе выяснения пяти имен и пяти фамилий становится ясные, что фраза «Кэти и Дорис — сестры» дает нам только очередное имя Дорис.

Вот что значит понять, что вы знаете: изучить внимательно каждое утверждение, чтобы уяснить его значение для решения.

Вопросы типа «*Завтрак дам*» довольно часто встречаются в сборниках головоломок, и представление информации в виде схем и таблиц — весьма эффективный способ их решения. Головоломки подобного рода представляют интерес, поскольку дают опыт системного использования и записи информации. Это зачастую очень важно на этапе штурма более сложных вопросов. После сбора большого объема информации и разбора нескольких частных случаев стоит сделать перерыв и «организовать» информацию, записав ее наиболее связным образом.

Умение извлекать и усваивать информацию важно не только для собственно математического мышления. Не так давно я купил новую швейную машинку. Пролистал руководство по эксплуатации и выяснил, что в полной мере начал понимать инструкции лишь тогда, когда перешел к делу — сел за машинку с руководством, тканью и нитками. То же самое имеет место в математике.

Успех достигается лишь активным подходом — рисуйте схемы, экспериментируйте, составляйте таблицы, переформулируйте вопрос и все проверяйте.

Погружение 2: что мне НУЖНО узнать?

Вопрос «Что мне НУЖНО узнать?» направляет мое внимание на определение того, что мне предстоит сделать, чтобы

найти ответ

или

доказать, что некое утверждение верно.

Главная причина трудностей, возникающих при решении задачи, кроется именно в отсутствии четкой формулировки того, что необходимо найти или доказать, однако, как правило, «жертва» не подозревает, что корень зла как раз в этом. Минимизировать подобный эффект поможет запись с РУБРИКАМИ. Например, в вопросе, подобном «*Шахматным клеткам*», провоцирующем многочисленные дополнительные вопросы, как то:

сколько всего квадратов 2×2 на шахматном поле,

или

у скольких квадратов 2×2 верхние ребра лежат на этой линии,

они могут ускользнуть, если их не записать как то, что мне НУЖНО в данный момент.

Иногда ответить на вопрос «Что мне НУЖНО?» довольно просто. В таких задачах, как, например, «*Коза на привязи*» и «*Полоска бумаги*», два этапа — прояснение, что надо делать, и усвоение информации — тесно связаны. Когда необходимо найти число, как в «*Козе на привязи*», целесообразно ввести символ A или area (площадь), чтобы дать четкое название тому, что другим образом сформулировано в предложении. Важно точно представлять себе, что именно стоит за символом, чтобы потом избежать путаницы, в данном случае между суммарной площадью и площадью отдельных секторов. Подобным образом важно четко представлять, что именно вы считаете важным!

В вопросе типа «*Лоскутное одеяло*» понять, что именно требуется, довольно сложно, несмотря на то (а может, именно по этой причине), что формулировка вопроса предельно точна. В подобном случае определить, что именно требуется, поможет экспериментирование.

Опять-таки крайне важно читать условие со всем вниманием. Вопрос «Что мне НУЖНО?» требует особой тщательности в отношении возможной многозначности или неверной интерпретации. Рассмотрим пример из книги «Математические головоломки и развлечения» (*Amusements in Mathematics*, Dudeney, 1958), который основан на интерпретации понятий «дробная доля» и «превышение».

Дроби

«Послушай, Джордж, — сказал кузен Реджинальд. — На какую дробную долю четыре четвертых превышают три четвертых?»

«На одну четвертую!» — хором крикнули все присутствующие.

«Ну-ка, давай еще примерчик», — предложил Джордж.

«Охотно, но лишь тогда, когда получу верный ответ на первый вопрос», — сказал Реджинальд.

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Вариант Реджинальда — одна третья, поскольку три неважно чего (в нашем случае четвертые части), если их увеличить на одну третью, становятся четырьмя. Все ответили на вопрос так, словно в вопросе речь шла о пироге.

В вопросе о делении пирога на «дробные части» —

«четыре четверти»

и

«три четверти».

Может, этот вопрос не стоит принимать во внимание, поскольку он некорректно сформулирован, однако в математическом мышлении часто встречаются случаи настоящей многозначности, неверного истолкования и недостаточно четкой формулировки. Например, вопрос, сколько квадратов на шахматной доске, имеет два правильных ответа — 64 и 204, в зависимости от разных интерпретаций. Очень важно научиться замечать возможность многозначности и разных интерпретаций. Есть немало случаев, когда в процессе выбора более точного определения того или иного понятия, которое ранее считалось очевидным, бывал сделан решающий шаг к открытию новой области математики. Так, интуитивная идея о непрерывной кривой при более тщательном исследовании вылилась в целую отрасль математики[1].

Ответить на вопрос «Что мне НУЖНО?» порой не так просто, как кажется на первый взгляд. Когда этот вопрос возникает естественным образом в процессе поиска ответа на другой, самое главное — решить точно, что именно вам нужно. Это иногда требует большого напряжения. Подобным образом вопрос из повседневной жизни, как следующий, можно решить разными способами, в зависимости от того, как его интерпретировать.

Конверты

Оказывается, у меня закончились все конверты. Как сделать конверт своими руками?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

- Вы когда-нибудь рассматривали, как сделаны обычные конверты?
- Какого размера бумага нужна для изготовления конверта для данного размера письма?
- А мне вообще нужен конверт?
- Какими свойствами должен обладать конверт?

Есть много разных вариантов подхода к этому вопросу, все зависит от вашего восприятия. Я часто размышлял над разнообразием размеров, форм и типов конвертов. В конечном итоге я разобрал один конверт и пришел в восторг от его формы. Потом я стал думать, насколько целесообразна эта форма и тому подобное. С другой стороны, а ведь можно и вовсе обойтись без конверта? Положить письмо внутрь листа бумаги, немного скотча — и вопрос решен!

[1] Математический анализ. — *Прим. ред.*

Погружение 3: что я могу ВВЕСТИ?

Задачи «*Коза на привязи*» и «*Завтрак дам*» немыслимо решить без схематичного рисунка. Очень часто требуется ввести другие элементы, например графики или таблицы, чтобы организовать данные и символы, заменяющие те или иные предметы. Бывает, что есть вещи, которые явно не выражены, однако тоже требуют названий. Иногда вопрос, на первый взгляд, корявый и бестолковый, становится понятным при перенесении в другой контекст. Рисунки к задачам «*Коза на привязи*» и «*Завтрак дам*» помогают расширить ваше внутреннее видение и извлечь необходимые данные. В «*Полоске бумаги*» из главы 1 намного удобнее обращаться с настоящей бумажной полоской, чем представлять все манипуляции мысленно, хотя попробовать сначала проделать необходимые манипуляции мысленно — отличная гимнастика для ума. Мыслительная работа готовит почву для рисунка и, наоборот, вдумчивая манипуляция с физическими предметами помогает вашей способности манипулировать ментальными образами.

В теории все это просто, а на практике далеко не всегда все именно так. Часто вызывает затруднение выход за пределы вопроса, но дополнительные предметы или мысли на самом деле возникают, когда то, что вы ЗНАЕТЕ, и то, что вам НУЖНО узнать, переводится в контекст, соответствующий вашему опыту и уверенности в себе. Цель расширения словаря РУБРИК понятием «ВВЕДИТЕ» — развить в вас свободное отношение к введению новых полезных элементов. Это вы в ответе за вопрос, а не наоборот. Чтобы понять, какие именно вещи могут оказаться полезными, стоит разобраться, что к чему:

Обозначение:	выбор, чему дать название, и какое именно.
Организация:	запись и расположение того, что вы ЗНАЕТЕ.
Представление:	выбор элементов, которыми легче манипулировать, и замена ими элементов вопроса.

Следующий пример иллюстрирует все три аспекта понятия «ВВЕДИТЕ».

Кубы в кубе

У меня есть восемь кубиков. Два из них раскрашены красным цветом, два белым, два синим и два желтым, а во всем остальном *они одинаковые. Я хочу собрать их в один большой куб так, чтобы на каждой грани присутствовали все цвета. Сколько есть разных способов составить такой куб?*

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС —
СНАЧАЛА С ВООБРАЖАЕМЫМИ,
А ПОТОМ С НАСТОЯЩИМИ КУБИКАМИ

ЗАСТРЯЛИ?

– Экспериментируйте: можете найти хотя бы один вариант расположения?
– Что вы ЗНАЕТЕ? Вам понятны условия?
– Что вам НУЖНО? Какие два больших куба считаются разными?
– Какое представление можно ВВЕСТИ? Прежде чем использовать восемь цветных кубиков, попробуйте нарисовать кубик или диаграммы его граней или попробуйте рассмотреть подходящую коробку — вдруг, это поможет вам представить ситуацию, хотя бы мысленным взором.
– ВВЕДИТЕ способ описания/записи вариантов решений.

Анализируя, я прихожу к выводу, что вопросы с трехмерным измерением, как правило, легче решать с помощью физических предметов. Пожалуй, основные шаги в данном случае — это найти одно решение, заметить расположение цветов и потом осознать, что значит «разный». Я решил, что два куба разные, если как их ни поворачивай, расположение цветов на них не совпадает. Разумеется, в зависимости от того, что вкладывать в понятие «различный», получаются разные ответы. Если использовать для представления этого вопроса настоящие кубики, особенно важно тщательно записывать разные варианты решений (физически, в виде картинок или символов), чтобы их можно было сравнивать. Позднее, когда я проверял решение, имело значение удобное обозначение. Таким образом, все три аспекта «ВВЕДИТЕ» (представление, обозначение и организация) важны для решения задачи.

К сожалению, большинство взрослых считают, что использовать нечто конкретное для решения задач типа «*Кубы в кубе*» или «*Полоска бумаги*» (глава 1, стр. 22) — это детская игра, а не приемлемая методика для взрослого человека, который должен уметь «мыслить абстрактно». В сущности, если использовать соответствующее представление, даже самое простое, то зачастую на первый взгляд трудный вопрос превращается в легкий. Помните, что цель математика-мыслителя — найти хорошее решение, а не решить задачу хоть как-то. Все, что может помочь, можно и нужно использовать. Если просто смотреть на ящик в углу комнаты, можно существенно продвинуться в решении «*Кубов в кубе*», даже если не прикасаться к нему руками. Каким-то образом, если вы смотрите на ящик, это расширяет ваш мысленный экран, умножает вашу способность мысленно видеть предметы и манипулировать ими. Столь же мощный результат довольно часто дает простое представление при решении следующего вопроса, «*Шустрые тосты*», который, как правило, сначала пытаются решить абстрактно. Быстро решить этот вопрос часто помогают листики бумаги, которые заменяют тонкие куски хлеба. И опять же присутствие бумаги, даже если вы ее не касаетесь, умножает способность мысленно видеть и облегчает анализ ряда возможностей.

Шустрые тосты

Три куска хлеба надо поджарить в тостере. Тостер вмещает два куска, но за один раз поджаривается только одна сторона. Поджарить хлеб с одной стороны можно за 30 секунд, 5 секунд занимает вставить или вынуть кусок, и 3 секунды уходит на то, чтобы перевернуть кусок. За какое кратчайшее время можно поджарить три куска хлеба?

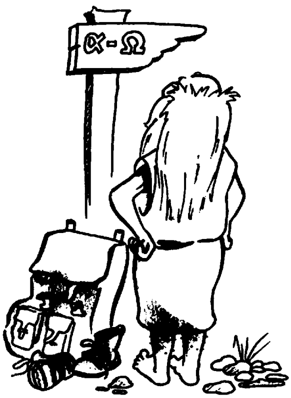
ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Осторожно, не скрывается ли тут многозначность?
– Это можно сделать менее чем за 140 секунд.
– Какие временны́е периоды можно сократить?

Когда вы найдете эффективный способ поджарить три куска хлеба, попробуйте расширить результат на большее число кусков с использованием тостера большей мощности. Общий результат демонстрирует несколько интересных закономерностей.

Погружение: подведение итогов



Итак, работа на этапе погружения основана на решении трех вопросов:

– Что я ЗНАЮ?
– Что мне НУЖНО узнать?
– Что я могу ВВЕСТИ?

Чтобы ответить на вопросы «Что я ЗНАЮ?» и «Что мне НУЖНО узнать?», следует внимательно читать условие (чтобы не упустить часть информации и заметить многозначность) и разбирать частные случаи для осознания обоих вопросов: «Что мне НУЖНО знать?» и «Что я ЗНАЮ?». Важно хотя бы почувствовать, какого типа информация заключается в формулировке и как ее можно использовать. Попробуйте воспроизвести условие (необязательно во всех подробностях) — это полезный тест, чтобы понять, осознаете ли вы на самом деле, что вам НУЖНО узнать. Особенно помогает записывать ключевые моменты вопроса своими словами, поскольку списывать вопрос в том виде, в каком он был поставлен, как правило, — пустая трата времени. ВВЕДЕНИЕ диаграмм, символов и схем значительно облегчает погружение в вопрос, а ВВЕДЕНИЕ обозначений, средств записи или рисунков обеспечит вам отличную позицию для начала этапа штурма.

Пожалуй, сейчас подходящий момент попробовать следующие задачи из главы 10: «*Работа*» (стр. 230), «*Циклические цифры*» (стр. 214) и «*Домино Глэйзера*» (стр. 224). Обращайте особое внимание на рубрику «ВВЕДИТЕ».

Этап штурма

Когда вы почувствуете, что полностью осознали вопрос, начинается этап штурма. Этап завершается, когда вы решите задачу или забросите ее вовсе. Математические действия, которые могут происходить на этом этапе, сложные и самые разнообразные; подробнее о них пойдет речь в последующих главах. Наиболее характерные состояния для этого этапа — «ЗАСТРЯЛИ?» и «АГА!», а основные математические процессы — это предположение (глава 4) и убедительное подтверждение, или доказательство (глава 5). Они, в свою очередь, зависят от экспериментирования и обобщения.

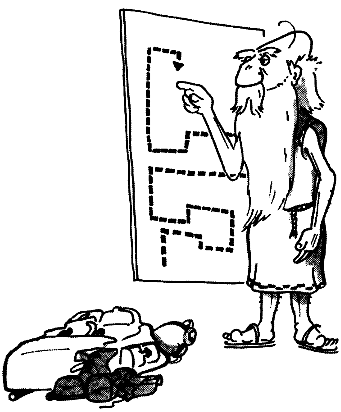
Во время штурма можно прибегать к нескольким различным подходам, формулировать и опробовать несколько планов. Когда осуществляется новый план, работа может продвигаться с большой скоростью. С другой стороны, когда испробованы все идеи, для этого этапа характерны длительные периоды ожидания новой догадки или поиска нового подхода. Такие периоды ожидания и обдумывания являются темой главы 6.

Какое-то время сосредоточьтесь на признании того факта, что вы оказались в тупике, и примите его со спокойствием: это не приговор, не напрягайтесь. В конце концов, ведь лишь попав в состояние «застряли» и приняв это, вы сможете научиться выбираться из подобного тупика. Научиться этому вам поможет этап обзора, которым слишком часто пренебрегают.

Этап обзора

Когда вы достигнете удовлетворительного решения или будете готовы сдаться, важно обсудить свою работу. Как следует из самого названия, пришло время вернуться назад и спокойно рассмотреть все свои действия, чтобы развить свои мыслительные способности и попытаться поместить свое решение в более общий контекст. Итак, вы возвращаетесь назад, чтобы ПРОВЕРИТЬ, что вы сделали, и ПРОАНАЛИЗИРОВАТЬ ключевые моменты — с тем чтобы потом *расширить* процессы и результаты на более общий контекст. Стоит добавить в РУБРИКИ новое понятие — «РАСШИРИТЬ», которое наряду с «ПРОВЕРИТЬ» и «ПРОАНАЛИЗИРОВАТЬ» и составляет сущность этапа обзора:

– ПРОВЕРЬТЕ решение;
– ПРОАНАЛИЗИРУЙТЕ ключевые идеи и ключевые моменты;
– РАСШИРЬТЕ на более общий контекст.



Наилучший способ извлечь пользу из этапа обзора — это записать свое решение и дать кому-нибудь прочитать его. Памятуя об этих трех процессах, вернитесь к своим записям в задаче «*Шахматные клетки*» и приведите их в связный вид, чтобы кто-нибудь, кто еще не приступал к этому вопросу, мог понять, *что* вы сделали и *почему*. В результате у вас могут возникнуть новые идеи для доработки своего решения и расширения его на другие задачи.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

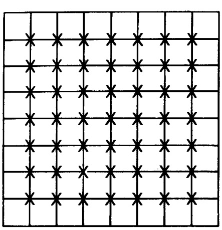
Если вы не поленились и пересмотрели свои записи, то наверняка заметили контраст между вашей оценкой «*Шахматных клеток*» и «*Палиндромов*», которые не получили подобного внимания. Если вы из относительного хаоса своих записей с помощью РУБРИК сделаете понятный для всех отчет о том, что вы сделали и почему, вы не только почувствуете удовлетворение от конечного результата, но и заметите ключевые моменты. Вы должны научиться отличать главное от второстепенного; таким образом, начался процесс АНАЛИЗА. Продолжайте в том же духе! Записывая заново подробности решения и восстанавливая аргументацию, вы обеспечиваете тщательную ПРОВЕРКУ. Просматривая детали и стараясь прояснить их для кого-нибудь еще, вы готовите почву для РАСШИРЕНИЯ вашего понимания вопроса и того, что из него следует. Сделайте над собой усилие и постарайтесь поступать подобным образом со всеми задачами из этой книги. Это требует внутренней дисциплины, но по-другому не получится, если вы хотите развивать свои мыслительные способности, и поверьте — это окупится сторицей.

Обзор 1: ПРОВЕРЬТЕ решение

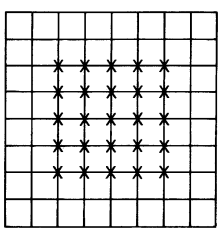
В процессе обзора «*Шахматных клеток*» я обнаружил, что мне предстоит несколько типов ПРОВЕРОК, а именно:

– ПРОВЕРИТЬ, нет ли ошибок в арифметических и алгебраических вычислениях;
– ПРОВЕРИТЬ аргументацию, чтобы убедиться в том, что вычисления «сработали» именно так, как я и думал;
– ПРОВЕРИТЬ следствия предположений и убедиться в их верности ($9 - K$ клеток размером $K \times K$, касающихся верхней линии, значит, для $K = 8$ есть один квадрат размером 8×8, что проверяется);
– ПРОВЕРИТЬ, что я действительно ответил на исходный вопрос, а не на вспомогательный.

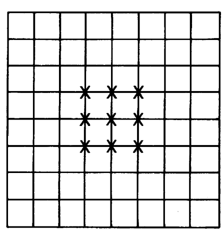
Первые две ПРОВЕРКИ были проведены в свое время, однако ПРОВЕРКА впопыхах менее надежна, нежели та, что происходит через какое-то время, на спокойную голову. В любом случае искать ошибки, точно повторяя то, что было сделано ранее, — плохой способ ПРОВЕРКИ, как известно каждому с опытом бухгалтерской работы. Зная, что у вас уже есть решение, вы можете натолкнуться на новые, более простые варианты, что сделает решение более четким и умножит ваше знание. Например, в «*Шахматных клетках*» вместо того, чтобы фиксировать верх квадрата, сосредоточьтесь на центрах квадратов, что приведет к геометрическим схемам с арифметическим содержанием.



Центры квадратов
2×2



Центры квадратов
4×4



Центры квадратов
6×6

Второй тип проверки, ПРОВЕРКА следствий, представляет собой мощный инструмент. Помните, как в «*Палиндромах*» именно ПРОВЕРЯЯ следствия своего вывода, я обнаружил ошибку. Если бы последующие палиндромы отличались на 110, то это бы означало, что все они оканчиваются на 1, что смехотворно!

Следуя совету записывать решение аккуратно, искать новый путь и следствия результатов, вы проверите свое решение, но как можно быть абсолютно уверенным в том, что вы не допустили ошибки? Этот анализ в этом вам не поможет. Известны случаи, когда результаты и доказательства, признаваемые математическим сообществом как правильные в течение многих лет, оказывались несвободными от ошибок. Таким образом, ПРОВЕРКА — это трудная задача, и мы вернемся к ней в главе 5, когда речь пойдет об убеждении.

Обзор 2: анализируем ключевые идеи и ключевые моменты

Пожалуй, именно АНАЛИЗ — самый важный процесс для развития математического мышления. Вопреки избитой фразе я не учусь на опыте; т.е. до тех пор пока не проанализирую то, что я сделал. Чтобы АНАЛИЗ не стал пустым времяпровождением, предлагаю его структурировать, обозначив в решении ключевые идеи и ключевые моменты. Например, в «*Шахматных клетках*» ключевых идей было две: 1) понять, что я могу сосчитать квадраты 2×2, опираясь на число тех, что касаются данной линии, и 2) заметить модель числа квадратов (64, 49, ...). Ключевые моменты были следующие:

– понять необходимость систематического подсчета;
– использовать дальнейшие частные случаи для проверки предполагаемой модели (64, 49, ...);
– использовать частные случаи, чтобы понять, почему обобщение верно.

Это четко врезалось мне в память. В следующий раз, когда я буду подсчитывать кусочки, я вспомню «*Шахматные клетки*», потому что я не поленился и зафиксировал все это на этапе обзора. В следующий раз, когда мне надо будет понять, верно ли то или иное обобщение, я снова прибегну к экспериментированию.

Вспоминать *ключевые идеи* и эффективно их использовать — хороший способ наращивать свой опыт, свой багаж математических трюков. Письменный отчет процесса мышления с использованием РУБРИК или аналогичных слов очень помогает вспоминать *ключевые моменты*, и вы можете научиться «фотографировать» их с тем, чтобы они сохранились в первоначальном виде. Со временем эти «фотографии» могут стать вашим личным наставником, напоминая вам, когда вы окажетесь в тупике, о ключевых идеях, отработанных ранее. Как делать подобные снимки и использовать их с тем, чтобы вспомнить соответствующий опыт, вы узнаете в главе 7.

Обзор 3: переносим на более широкий контекст

Возвратимся снова к «*Шахматным клеткам*». Анализируя свою работу, я увидел связь между шириной шахматной доски (скажем, N клеток) и числом клеток размером $K \times K$, стоящих в ряд, а именно $N+1-K$. Когда я начал осознавать, почему это так, я понял, что этот результат можно использовать для определения числа клеток на «доске» любого размера. Подобное РАСШИРЕНИЕ не является надуманным, а естественным образом возникает из моего растущего понимания. РАСШИРЕНИЕ происходит одновременно с АНАЛИЗОМ. Например, попытка расширить результат «*Палиндромов*» на палиндромы с числом разрядов, отличным от четырех, приводит к обнаружению зависимости решения от того, что четыре — это число четное. Расширение провоцируется вопросом типа:

А почему именно четыре? А что если ...?

Когда я оглядываюсь назад, чтобы понять, что же именно было важно, мое понимание возрастает, а иной раз то, что ранее получилось с большим трудом, преподносит неожиданные «бонусы» — новые результаты при минимальных затратах. Так, после «*Шахматных клеток*» следующий ниже вопрос не представляет особой трудности.

Шахматные прямоугольники

Сколько всего прямоугольников на шахматной доске?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Что вам НУЖНО узнать?
– Попробуйте сначала на маленькой доске (экспериментируйте).
– По какой системе лучше всего сосчитать прямоугольники?
– Изучите метод, использованный для подсчета квадратов на любой доске, и обобщите.
– *Расширяйте*! Обобщите размер доски!

Итак, конкретный ответ — 204 квадрата на шахматной доске — перенесен в более широкий контекст. Это особый случай более широкой модели. Одно из свойств интересного вопроса заключается в том, что у него есть несколько расширений, которые увеличивают диапазон оригинала. Вы только тогда понимаете результат полностью, когда он формулируется более широко. Очень часто это происходит путем удаления или ослабления допущений, например:

Почему именно обычная шахматная доска? Пусть будет $N \times N$ квадратов.

Почему считаем только квадраты? Считаем прямоугольники.

Почему начинаем с квадрата? Считаем прямоугольники в прямоугольнике.

А потом

Почему считаем только те квадраты, у которых края параллельны исходному?

Почему работаем только в двух измерениях?

и так далее. Задание «*Сосчитай треугольники*» из главы 10 — пример еще одного направления для расширения «*Шахматных клеток*».

«*Полоска бумаги*» (стр. 22) из главы 1 достойна РАСШИРЕНИЯ, хотя бы ради того, чтобы избавиться от ощущения «Ну нашел я ответ, и что дальше?». Памятуя об этапах погружения и обзора, сейчас самое время поработать над «*Полоской бумаги*» еще. Что будет, если каждый раз складывать ее втрое? Что будет, если развернуть сложенную полоску и рассмотреть складки?

В процессе размещения вопроса в более широком контексте, т.е. при обобщении, обнаруживается его значимость для более широкой сферы вещей. Есть и еще одно преимущество РАСШИРЕНИЯ решения. Математическое мышление начинается лишь тогда, когда вопрос вас по-настоящему захватывает. А наиболее захватывающий вопрос — всегда именно ваш собственный вопрос, либо потому что он стал вашим в результате экспериментирования или на этапе погружения, либо потому что он возник в результате вашего опыта. Любопытно, что некоторые наиболее интересные и занимательные вопросы возникли в процессе обобщения на первый взгляд скучных результатов. РАСШИРЕНИЕ — хороший источник для ваших собственных вопросов. В главе 8 речь пойдет о том, как стать «самому себе вопросником». Еще один способ расширить «*Полоску бумаги*» см. в задании «*Внутри и снаружи*» в главе 10, стр. 228.

Практикуемся в обзоре

Ну а теперь попробуйте расколоть еще один орешек, причем записывайте все свои шаги с помощью РУБРИК. Сам вопрос не представляет особого труда, так что сосредоточьтесь на обзоре.

Ползучие бяки

Росс коллекционирует ящериц, жуков и червяков. Червяков у него больше, чем ящериц и жуков вместе взятых. Всего в коллекции 12 головок и 26 ножек. Сколько ящериц у Росса?

ЗАСТРЯЛИ?

- Экспериментируйте.
- Что вы ЗНАЕТЕ?
- Что вам НУЖНО узнать?
- Что вы можете ВВЕСТИ, чтобы облегчить решение?
- Сколько всего неизвестных? Сколько уравнений? Что еще можно сделать?

Вариант решения

Мне НУЖНО узнать число ящериц. Я ЗНАЮ, что головок всего 12. АГА! Значит, всего особей 12. Еще я ЗНАЮ, что ножек 26.

У ящериц по четыре ножки у каждой (предположим, что все особи в добром здравии), у жуков — по 6 ножек, а у червяков нет ножек вовсе. Итак, 26 ножек приходятся на жуков и ящериц. Например, если бы ящерица была одна, то на жуков пришлось бы 22 ножки (экспериментирование). АГА! Но это невозможно, потому что в таком случае получилось бы

$$22/6 = 3 + 2/3 \text{ жука.}$$

Попробуем с двумя ящерицами. Тогда получается 18 ножек у жуков, значит, их всего три и, следовательно, 7 червяков. У нас появился ответ на вопрос, если я смогу показать, что других вариантов решения нет. ЗАСТРЯЛИ! Потому что я не могу найти метод. Может, ВВЕСТИ символы и составить уравнения? АГА! Мне не нужно этого делать. Если бы ящериц было 7, то ножек бы было слишком много, значит, 6 ящериц — это максимум. Теперь надо проверить каждый случай по таблице. Это единственная возможность!

Число ящериц	1	2	3	4	5	6
Число жуков	$3\frac{2}{3}$	3	$2\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
Число червяков		7			6	
Больше червяков, чем ящериц и жуков?		да			нет	

Этап штурма завершен. Я проверил аргументы и расчеты и ответил на исходный вопрос. Теперь попробую сделать обзор своего решения. Для удобства обозначим число ящериц как L (lizard — ящерица), число жуков — как B (beetle — жук), а число червяков — как W (worm — червь). Определенно ключевая идея состоит в том, что L, B и W — неотрицательные целые числа, потому что все особи у нас должны быть целыми и невредимыми. Эта мысль пришла мне в голову в процессе экспериментирования. Экспериментируя систематически, я получил ответ на вопрос, но хорош ли этот метод для всех случаев? Пожалуй, нет: будь числа значительно больше (скажем, 260 ножек) или будь нам известна не сумма ножек, а разность, тогда пришлось бы изобретать другой метод. Хотя тогда могла бы быть модель в значениях L, которая дала бы приемлемые значения B. Да, я вижу модель, связывающую L и B в моей таблице. Когда L увеличивается на 1, B уменьшается на $2/3$; таким образом, в ряду B в каждой третьей колонке целое число. Может, эту модель можно использовать для решения подобной задачи с более крупными числами? Я также заметил, что мне повезло, что у червяков нет ножек. Это позволило мне сосредоточиться исключительно на L и B, а потом уже считать W. А что если вместо червяков были бы пауки?

В процессе АНАЛИЗА моего решения возникли следующие новые вопросы:

(а) Как бы я решал подобную задачу, будь вместо 26 и 12 более крупные числа?

(б) Как бы я решал подобную задачу с ящерицами, жуками и пауками?

Оба эти вопроса заслуживают исследования, а возникли они в результате критического обзора решения исходной задачи. Пока они сформулированы не лучшим образом, поскольку возникли естественным образом из решения другой задачи.

Следовательно, большая часть этапа погружения в новый вопрос будет направлена на более точную формулировку. В первую очередь необходимо задать себе вопрос «Что мне НУЖНО узнать?»

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

У этапа «обзор» есть и еще одна немаловажная функция. Для математического мышления крайне важно уметь распознавать аналогичные вопросы. Один из способов наращивать это умение — решив задачу, сделать паузу, чтобы обдумать, как данный метод можно использовать в других ситуациях. Попробуйте различать ключевые идеи и поверхностные аспекты вопроса. Очевидно, что в данном конкретном случае есть много других контекстов, помимо ящериц и жуков, которые приведут к аналогичным вопросам. Например, мне могут сказать суммарное число колес на машинах и мотоциклах на парковке или суммарную номинальную стоимость марок известного достоинства. Более строгое обобщение повлечет вопросы относительно типа информации, подобной данным о ящерицах и жуках, но, тем не менее, приведет к единственному решению.

Несмотря на несомненные плюсы, которые несет в себе этап обзора, им часто пренебрегают. В чем же причина? Дело в том, что после приятного возбуждения от удачного штурма часто возникает раздражение от перспективы проверки результата, в котором вы твердо уверены. Кроме того, если вы не приняли вопрос как свой, есть соблазн бросить его как можно скорее и заняться другим — в погоне за баллами. А это значит, что упущена ценная возможность узнать что-то новое о мыслительных процессах, а также узнать еще больше о сущности математики.

Обзор: подведение итогов

Я высказал предположение, что работа во время этапа обзора крайне важна для развития вашего математического мышления. Этот этап основывается на трех взаимосвязанных процессах.

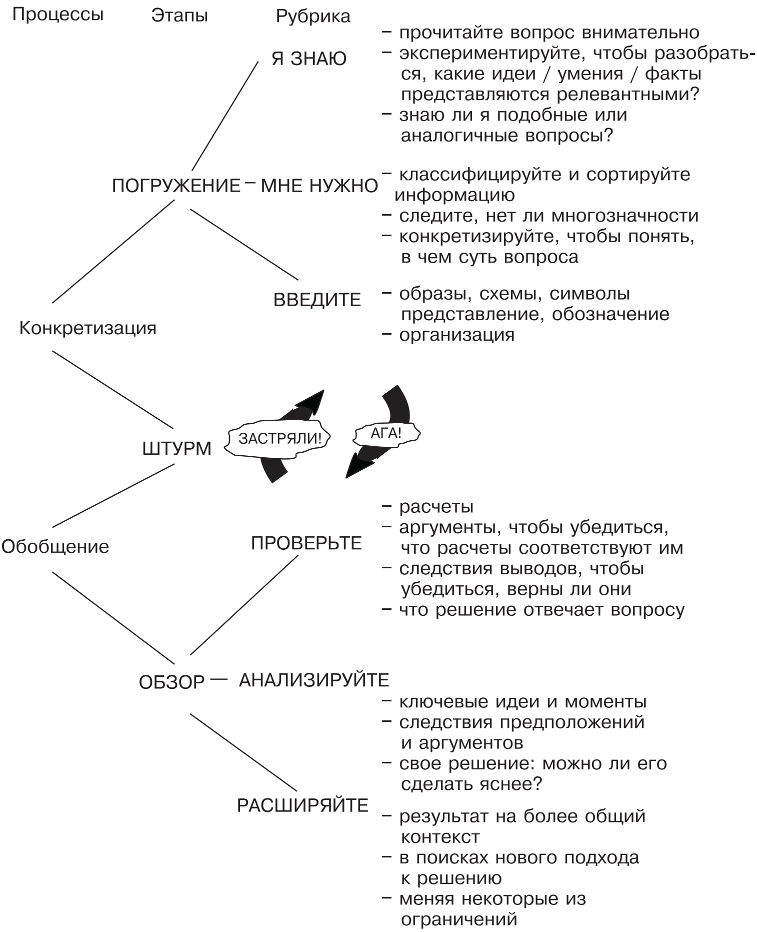
1. ПРОВЕРЬТЕ решение.
2. ПРОАНАЛИЗИРУЙТЕ ключевые идеи и моменты решения.
3. ПРОДОЛЖИТЕ решение на более обширный контекст.

Начните этап обзора с записи своего решения (даже неполного) и дайте прочитать кому-нибудь еще. Это автоматически приведет ко всем четырем типам ПРОВЕРКИ, особенно если вы пытаетесь найти новый путь, и обязательно высветит ключевые идеи. Попытки вспомнить и «сфотографировать» эти ключевые моменты необходимы для накапливания объема математического опыта. РАСШИРЕНИЕ решения, как правило, происходит естественным путем, либо по мере роста вашего интереса к какому-либо новому аспекту, либо если ваше понимание подсказывает новое использование того, что вы обнаружили. АНАЛИЗ — это главный процесс этапа обзора.

Три этапа: подведение итогов

Этапы размышления над вопросом не имеют четких границ. Они как бы расплывчаты по краям, поскольку связаны с качеством опыта, а не с механической деятельностью. Работа на одном этапе может запросто вернуть вас на более «ранний» этап или, напротив, привести к заключительной записи. Научившись различать характерные свойства каждого этапа, вы обеспечите себя необходимыми занятиями, когда окажетесь в тупике. Если эти предложения войдут у вас в привычку, вы избавите себя от бесцельного времяпровождения и непродуктивных мыслей.

Слова-РУБРИКИ, которые мы расширили в этой главе, как видно из схемы на предыдущей странице, как правило, характерны



для того или иного этапа. Например, если вы окажетесь в глубине вопроса и внезапно почувствуете необходимость вернуться к тому, что вы ЗНАЕТЕ или что вам НУЖНО узнать, то вы в определенном смысле снова входите в вопрос, но уже со значительно большим опытом, нежели в первый раз.

В основе всех процессов, описанных в трех этапах, лежат взаимосвязанные экспериментирование и обобщение. С помощью экспериментирования вы выясняете, что вы ЗНАЕТЕ, что вам НУЖНО узнать и что имеет смысл ВВЕСТИ. С помощью экспериментирования вы обнаруживаете модели, приводящие к обобщению.

С помощью обобщения вы приходите к предположениям, которые можно ПРОВЕРИТЬ с помощью дальнейшего экспериментирования, и можете РАСШИРИТЬ вопрос на более обширный контекст. Итак, картина математического мышления выросла и вмещает процессы, этапы и запись с помощью РУБРИК.

А сейчас уместно обратиться к следующим вопросам из главы 10:

«*Работа*» (стр. 230),
«*Декартова погоня*» (стр. 211),
«*Домино Глэйзера*» (стр. 224),
«*Равнина Налларбор*» (стр. 239),
«*Циклические цифры*» (стр. 214),
«*Вращаем монеты*» (стр. 249),
«*Диагонали прямоугольника*» (стр. 216),
«*Нечетные делители*» (стр. 239).

См. главу 11, где есть другие вопросы, входящие в программу обучения.

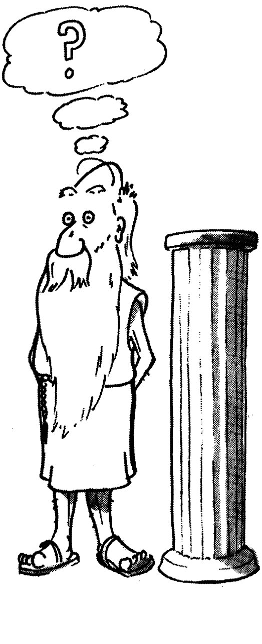
Справочная литература

Dudeney, H. (1958) *Amusements in Mathematics*. New York: Dover.

ГЛАВА 3

ЧТО ДЕЛАТЬ, ЕСЛИ ВЫ ЗАСТРЯЛИ

В тупике бывают все. Избежать этого нельзя, и скрывать этот факт тоже не следует. Это естественное состояние, пребывая в котором, можно многому научиться. Лучший способ подготовиться к грядущему тупику — признать, что в данный момент вы застряли, и проанализировать ключевые идеи и ключевые моменты, которые открывают новое и полезное занятие.



В этой главе содержится два задания, с помощью которых вы отработаете этап погружения, прежде чем вплотную займетесь штурмом. Надеюсь, что вы благополучно застрянете и в результате многому научитесь.

В состоянии «ЗАСТРЯЛИ»

Для тупикового состояния характерны различные эмоции. Например, у меня бывает так:

– тупо смотрю на чистый лист бумаги или в пространство;
– никак не могу приступить к подсчетам или какому-либо еще занятию;
– напрягаюсь или даже впадаю в панику, потому что дело не идет;

– чувствую опустошение, потому что ничего у меня не получается.

Перечень можно продолжить. Лично у меня осознание, что я попал в тупик, приходит не сразу. Сначала это чувство неясное и расплывчатое. Постепенно оно растет — до тех пор пока я не упираюсь носом в стену и понимаю, что застрял. Только тогда, когда я ощущаю, что застрял, и осознаю свои чувства, я могу начать предпринимать какие-либо шаги. Вот почему так важно вести запись с РУБРИКАМИ, в частности написать «ЗАСТРЯЛ!» или еще что-нибудь. Когда я выражаю свои эмоции, это помогает мне дистанцироваться от моего пребывания в тупике, освобождает от неприятных эмоций и подсказывает, какие действия можно предпринять.

Итак, что же можно сделать, когда вы оказываетесь в тупике?ризнав и приняв этот факт, можно либо сделать небольшой перерыв, либо продолжить. Конечно, если вы застряли, велик соблазн забросить все, хотя бы на время, но это далеко не всегда лучший выход. Зачастую хорошие идеи приходят именно тогда, когда вы в безнадежном положении. Если вы хотите сделать перерыв, не забудьте сначала как можно четче записать то, что на ваш взгляд вам мешает. Подробнее на эту тему см. главу 6.

Ну а что же делать, если я хочу продолжить работу? В главе 2 речь шла о таких вопросах, которые задал бы вам наставник, чтобы помочь вам, но вопросы эти реально помогают, когда они «встроены» в ваш личный опыт математического мышления. Тогда в вас сидит ваш внутренний наставник. В любом случае наиболее разумно вернуться к этапу погружения, чтобы снова выяснить:

1. Что я ЗНАЮ?
2. Что мне НУЖНО узнать?
3. Что я могу ВВЕСТИ?

Эти вопросы предполагают, что вы

– суммировали все, что ЗНАЕТЕ и что вам НУЖНО узнать;
– представили вопрос в некой форме, которая удобна и внушает уверенность;
– воспользовались преимуществами экспериментирования;
– прочитали вопрос еще раз и переварили в процессе поисков альтернативных интерпретаций.

Внимательное второе чтение вопроса не является признаком того, что первое прочтение было неадекватным. Напротив, очень часто вопрос становится очевидным только после того, как вы конкретизируете его на различных примерах, придавая все больше смысла прочтению. Разумеется, ПОВТОРНОЕ ПОГРУЖЕНИЕ означает не бессмысленное повторное чтение еще и еще раз, а осмысленное прочтение, наполненное новым опытом, с тем чтобы найти другие интерпретации. Поскольку вы еще не решили вопрос, между «ЗНАЮ» и «НУЖНО» узнать зияет пустое пространство. ПОВТОРНЫМ ПОГРУЖЕНИЕМ вы пытаетесь выяснить, что вы на самом деле ЗНАЕТЕ и как далеко это от того, что вам НУЖНО узнать.

А теперь предположим, что вы со всей ответственностью ПОВТОРНО ПОГРУЗИЛИСЬ в задачу, подытожили все, что ЗНАЕТЕ и что вам НУЖНО узнать, своими словами, а дыра все зияет. В таком случае с большой степенью вероятности вам нужно еще более экстремальное экспериментирование. Цель экспериментирования состоит в том, чтобы обратиться к примерам, внушающим уверенность, на основании которых может проявиться модель. Может быть, вопрос необходимо упростить. Например, в «*Шахматных клетках*» (глава 1, стр. 40) я бы мог решить сначала считать клетки на «шахматной доске» размером 2×2, потом 3×3 и так далее. Я мог бы даже рассмотреть вариант «доски» размером 1×8 или даже 1×1, потом 1×2, 1×3. Существенно упрощая подсчет, я освобождаю место, чтобы найти модель и понять, что происходит.

Я заостряю ваше внимание на состоянии «застряли», потому что большинство людей осознают, что им нужна помощь, когда они наконец-то понимают, что оказались в тупике. Как только у них появится какая-нибудь мысль, они бездумно устремляются вперед, не прислушиваясь к советам. Рекомендую развить в себе привычку записывать то, что вы пытаетесь делать, или то, что, как вам кажется, может сработать, пусть даже все это весьма расплывчато, с целью:

– притормозить, если вас куда-то несет;
– оценить идеи более полно и систематически;
– расшифровать позднее, что вы пытались сделать.

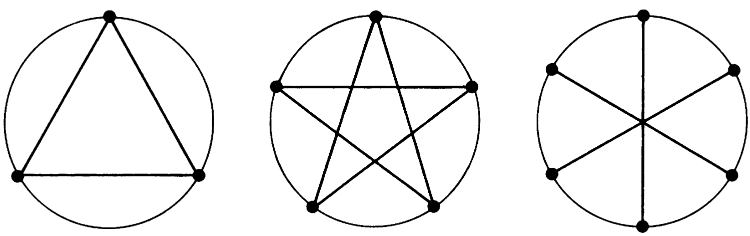
Именно по этой причине рекомендуется записывать с помощью РУБРИК. Хотя всем нам не хочется тормозить, когда мы в возбужденном состоянии несемся в потоке мыслей, опыт показывает, что именно погоня за решением — основная причина

ситуаций «ЗАСТРЯЛИ!» Научитесь смаковать решение, как гурман смакует еду, а не проглатывайте все одним глотком! Итак, если вам пришла в голову мысль, которая кажется удачной, постарайтесь написать «АГА!», а потом уже запишите саму мысль. Хотя бы потому, что это «АГА!» продлевает удовольствие и усиливает удовлетворение от обретения хорошей идеи.

Следующий вопрос, который вам предстоит решить, отнимет не две и не три минуты. Но он стоит потраченного времени — вы получите опыт попадания в тупик и выхода из него!

Булавки с нитками

Несколько булавок равномерно расположены по кругу. К одной булавке привязана нитка, свободный конец которой потом плотной петлей набрасывается на вторую[1] булавку. Потом этой же ниткой присоединяется третья булавка таким образом, что промежуток[2] по часовой стрелке между первой и второй булавкой такой же, как и промежуток по часовой стрелке между второй и третьей булавкой, как видно на примере.



3 булавки, промежуток 1 | 5 булавок, промежуток 2 | 6 булавок, промежуток 3

Процесс продолжается, причем промежуток по часовой стрелке должен быть один и тот же, пока вы не доберетесь до первой

[1] Не обязательно следующую по кругу. — *Прим. ред.*

[2] Число пропущенных булавок плюс 1. — *Прим. ред.*

булавки. Если какая-либо из булавок не была охвачена ниткой, процесс начинается снова с этой булавки.

Чтобы охватить пять булавок с промежутком два, потребуется одна нитка, а для шести булавок с промежутком три — три нитки. Сколько всего ниток потребуется?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

Погружение

- Самое лучшее — посмотреть частные случаи.
- Организуйте результаты частных случаев.
- Что можно ВВЕСТИ, чтобы выразить, что вам НУЖНО, в сжатой форме?

Штурм

- Ответьте на вспомогательный вопрос: какие булавки можно достать от исходной булавки?
- Сделайте предположение, хотя бы самое безумное.
- Проверьте предположение, пытаясь понять, почему оно верно или неверно.
- Может, вам придется сделать или видоизменить несколько предположений, пока вы не найдете одно краткое утверждение, которое удовлетворяет всем случаям.

Обзор

- Даже если вы безнадежно застряли, советую сначала просмотреть, что вы сделали, и только *после этого* прочитать мое решение!

Решения других людей кажутся нудными по сравнению со своими собственными. Еще раз настоятельно рекомендую: *не читайте* мое решение «*Булавок с нитками*», пока не решите сами или не поймете, что ЗАСТРЯЛИ, и не воспользуетесь всеми советами из глав 1 и 2.

Вариант решения

Поработав с несколькими примерами на схемах, я вернулся к условию. Мне НУЖНО найти какой-то способ определить, сколько ниток потребуется, если я ЗНАЮ число булавок и величину промежутка. Я должен следовать системе, но как можно работать с числом булавок и промежутком, если они меняются одновременно (организация)? АГА! Воспользуюсь таблицей. Какие данные мне НУЖНО внести в таблицу? Ну да, число ниток для разных комбинаций булавок и размеров промежутка. Поработав с примерами на круговых схемах, я получил следующие результаты.

Промежуток / Булавки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	1	3						
4	1	2	1	4					
5	1	1	1	1	5				
6									
7									
8									

Теперь я полностью поглощен заполнением таблицы. Поглощен до такой степени, что уже забыл, зачем я это делаю. Перечитав задачу, я понимаю, что мне НУЖНО найти способ предсказать, сколько ниток потребуется для данного числа булавок и данной величины промежутка. Я должен ВВЕСТИ названия для числа булавок и величины промежутка. На данный момент я воспользуюсь словами «*булавки*» и «*промежуток*», а не сокращениями P (*pins* — булавки) и G (*gap* — промежуток) (обозначение):

– я ЗНАЮ: *булавки* и *промежуток*

– мне НУЖНО найти: способ выразить число ниток (назовем это *нитки*) через *булавки* и *промежуток.*

Пока что модель не проявляется, поэтому придется расширять таблицу. Почему каждая следующая строка длиннее предыдущей? Мне приходит в голову, что промежуток 4 вполне возможен для трех булавок — почему нет? А что если у нас 2 булавки или даже всего 1 булавка?

А ТЕПЕРЬ ЗАПОЛНЯЙТЕ ТАБЛИЦУ ДАЛЬШЕ

Зачем я занимаюсь всем этим экспериментированием? Мне НУЖНО найти модель в числах, но еще мне НУЖНО почувствовать, что происходит. Заполняя таблицу, я заметил, что

когда $промежуток = 1$, $нитки = 1$,
когда $промежуток = булавки$, $нитки = булавки$,
когда $промежуток = булавки/2$, $нитки = промежуток$.
Промежутки в *промежуток* и в ($булавки - промежуток$) требует одинакового числа нитей.
Когда *промежуток* является делителем *булавки*,
$нитки = промежуток$.

Итак, я могу сделать два предположения.

Предположение 1. *Промежутки длиной промежуток и*

$$(булавки - промежуток)$$

дают одно и то же число ниток.

Предположение 2. *Имеет место равенство*

$$нитки = промежуток,$$

если промежуток — это делитель числа булавки.

Верно ли предположение 2, если *промежуток* не является делителем числа *булавки*? *Нет*!

$$промежуток = 6, \quad булавки = 4$$

требуют 2 нитки, а не 6 и

$$промежуток = 4, \quad булавки = 6$$

требуют 2 нитки, а не 4.

Я ЗАСТРЯЛ! Проверяя диаграмму ниток для этих случаев, я заметил, что *нитки* — это 2 в обоих случаях, а 2 делит и *булавки*, и *промежуток*. Необходимо разобрать более сложные случаи, например

$$промежуток = 6, \text{ а } булавки = 9,$$

$$промежуток = 8, \text{ а } булавки = 12$$

и

$$промежуток = 12, \text{ а } булавки = 15.$$

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Вернувшись к моей расширенной таблице, я замечаю, что число ниток всегда делит и *булавки*, и *промежуток*. АГА! В каждом случае *нитки* — это наибольший делитель чисел *булавки* и *промежуток*. ИНТЕРЕСНО, это всегда работает?

Предположение 3. *Число ниток — это наибольший общий делитель чисел булавки и промежуток.*

ПРОВЕРЯЕМ для

$$\textit{промежуток} = 6, \qquad \textit{булавки} = 8$$

и

$$\textit{промежуток} = 8, \qquad \textit{булавки} = 6.$$

Похоже, мое предположение работает.

Теперь у меня больше уверенности в том, что оно верно, но ПОЧЕМУ оно верно? Будет ли оно верно всегда? Мне НУЖНО найти аргумент, чтобы убедить себя, что мое ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ верно всегда. Итак, допустим, я ЗНАЮ величины *промежуток* и *булавки*. Все равно я ЗАСТРЯЛ!

Посмотрев какое-то время на булавки, дотянуться до которых можно одной ниткой, и думая о том, почему *нитки* должны делить и *булавки*, и *промежуток*, я понимаю, что снова ЗАСТРЯЛ! Анализируя то, что я ЗНАЮ, я замечаю, что когда два делит и *булавки*, и *промежуток*, я могу достать только половину булавок. ПРОВЕРЯЯ случаи, когда три делит числа и *булавки* и *промежуток*, выясняю, что могу достать одной ниткой только треть булавок.

АГА! Буду смелым и ВВЕДУ вместо наибольшего общего делителя чисел *булавки* и *промежуток* сокращение — НОД. Почему бы нет? Теперь, что я ЗНАЮ о НОД, когда переплетаю булавки? Каждый раз, когда я оставляю *промежуток*, что происходит с НОД? Я ЗНАЮ, что НОД делит *промежуток*. АГА! Каждый раз, когда я оставляю *промежуток*, я на самом деле перескакиваю на кратное НОД. Поскольку НОД делит *булавки*, я могу лишь рассчитывать достать одной ниткой (*булавки*/НОД) булавок. Верно! А это значит, что я должен использовать НОД ниток, как я и предполагал!

АНАЛИЗ. Наибольший общий делитель возник спонтанно, в результате разбора частных случаев. Однако экспериментировал я не бесцельно. Разбирая примеры, я искал вдохновения, пытаясь обнаружить модель не только в числе, но и в самом процессе наматывания нитки вокруг булавок. Итак, НОД был ключевой идеей. А ключевым моментом для меня было решение использовать *булавки* и *промежуток* для обозначения числа булавок и величины промежутка. Я мог бы использовать символы P и G и мог бы прибегнуть к буквенному обозначению позднее, будь необходимость в большом числе алгебраических формул. Используя слова, я избежал необходимости держать в уме значения P и G.

В процессе анализа мне пришел в голову другой способ доказательства. Представьте, что булавки равномерно расположены по кругу, как цифры на циферблате, а часы имеют только часовую стрелку, указывающую на одну из булавок. Процесс переплетения булавок можно представить как вращение часовой стрелки. Оставляя *промежуток*, мы как бы вращаем стрелку на часть *промежуток*/*булавки* полного оборота. Когда одна нитка проходит через все возможные булавки, это равнозначно нахождению наименьшего кратного (НОК) для пары чисел *промежуток*, *булавки*, что является целым числом. Число *булавки* — тоже целое, а число *булавки*/НОД — наименьшее целое, что означает, что всего мне нужно НОД ниток[1].

Расширение. Я могу предложить много способов расширить вопрос, но большинство из них довольно сложные. Например:

- Сколько пересечений делает одна нитка?
- Попробуйте вместо равных промежутков использовать последовательность промежутков, например 1,2, 1, 2, ...
- Попробуйте выбирать промежутки с помощью игральной кости. Потом поставьте вопрос: какова вероятность, что достаточно только одной нитки?

Надеюсь, что «*Булавки с нитками*» предоставили вам опыт попадания в тупик и выхода из него, даже если вы так и не добрались до окончательного решения. *Есть* вещи, которыми можно

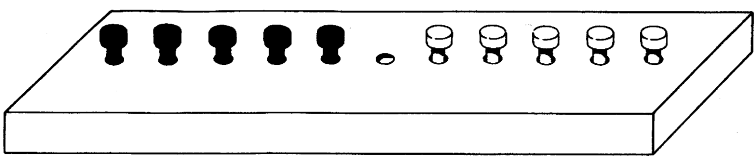
[1] На мой взгляд, не очень понятное рассуждение. Изложу другое доказательство, введя буквенные обозначения P = *булавки*, G = *промежуток*. Обозначим d = НОД, тогда $P = dP', G = G'$, НОК $= dP'G'$. Оставляя *промежуток*, мы как бы вращаем стрелку на часть G/P полного оборота и при этом вернемся к исходной булавке, обойдя ровно НОК$/P = G'$ булавок. Таким образом, когда первая нитка замкнулась, неоплетенными остались $G - G' = (d-1)G'$ булавок, откуда необходимое число ниток — g = НОД. — *Прим. ред.*

заняться, находясь в состоянии «ЗАСТРЯЛИ!» Единственный способ поверить в них — это использовать их, чтобы заставить себя двигаться дальше, когда вы снова застрянете. Тогда вы поймете, насколько они эффективны, что, в свою очередь, воодушевит вас в будущем браться за еще более сложные задачи.

Был такой случай: студент опоздал на лекцию и списал вопросы с доски, приняв их за домашнее задание. Через неделю он встретил профессора и пожаловался, что домашнее задание оказалось довольно сложным. На самом деле он сумел ответить лишь на два вопроса. Тогда профессор сказал ему, что эти вопросы были приведены как пример известных нерешенных задач! Поскольку студент НЕ ЗНАЛ, что эти вопросы считаются трудными, он смог работать над ними непредвзято. Ему не мешало чувство неуверенности в себе. Важно понимать, что ваше отношение может повлиять на возможность успешного решения. Предлагаем еще один вопрос для практики. Может, он покажется вам более сложным по сравнению с заданиями из первых глав, но, если вы воспользуетесь тем, что вы узнали, у вас должно получиться. *Удачи!*

Чехарда

На доске одиннадцать лунок и десять колышков двух цветов, расположенных, как показано на рисунке. Я хочу поменять местами черные и белые колышки, но можно только перемещать колышки в соседнюю пустую лунку или перепрыгивать через один колышек в пустую лунку. Могу я таким образом поменять колышки местами?



ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

Погружение

– Попробуйте проделать подобную операцию с монетами.
– Попробуйте поэкспериментировать с меньшим числом колышков.

Штурм

– Какие ходы блокируют продвижение? Можно ли их избежать?

Обзор

– Когда вы поймете, как это можно сделать, напишите в сжатой форме набор инструкций для перемещения колышков. Это не так просто, как кажется на первый взгляд, но это того стоит. Записывайте все характеристики процесса перемещения.
– Расширяйте!

Надеюсь, что вас не устроила формулировка задачи, и вы ее видоизменили или поставили новую задачу. Например, вы могли рассмотреть другое число колышков. Более того, вы могли задаться вопросом, а можно ли переместить колышки другим способом, и каково минимальное число ходов. Это наиболее занятная часть задачи *Чехарда*.

Каково минимальное число ходов?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Вариант решения

Я начинаю перемещать колышки, потому что мне НУЖНО выяснить, возможно ли это, а также, поскольку я думаю, что, хотя и понимаю правила, я должен в этом убедиться на практике. Я решил не перемещать колышки назад. Мои первые попытки не увенчались успехом, и я ЗАСТРЯЛ! Может, это вообще невозможно сделать! Бесполезно держать колышки одного цвета рядом, потому что в конечном итоге я попадаю в место, где этим способом не воспользуешься.

Что в этом контексте означает экспериментирование? А что если попробовать с меньшим числом колышков? С одним колышком на каждой стороне это легко. Однако я буду следовать своим инструкциям и систематически записывать все, что я делаю (организация, обозначения). Я буду писать B (black — черный) и W (white — белый) вместо черных и белых колышков соответственно и оставлять пропуск для пустой лунки.

	Начало	B		W
двигаем	B направо			W
перепрыгиваем	W налево	W	B	
двигаем	B направо	W		B

С двумя колышками по обе стороны способ, который я только использовал, не работает — два колышка одного цвета оказываются рядом, и я в тупике.

	Начало	B	B		W	W	
двигаем	B направо	B		B	W	W	
перепрыгиваем	W налево	B	W	B		W	
двигаем	B направо	B	W		B	W	
перепрыгиваем	W налево	B	W	W	B		*Упс*!

АГА! Это как-то связано с тем, чтобы цвета все время чередовались (предположение). После нескольких попыток я понял, как следовать этому принципу и поменять местами два колышка обоих цветов.

1	B	B		W	W
2	B		B	W	W
3	B	W	B		W
4	B	W	B	W	
5	B	W		W	B
6		W	B	W	B
7	W		B	W	B
8	W	W	B		B
9	W	W		B	B

А теперь я попробую с большим числом колышков, чтобы проверить, работает ли этот принцип. Теперь я могу поменять колышки местами, хотя и не уверен в своих методах. Мне надо все тщательно записать и ПРОВЕРИТЬ.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

В результате записи и проверки на примерах я вижу, что, как только я выбрал первый колышек и сделал ход, мой метод на каждом этапе определяет единственный колышек для следующего хода. Чтобы это мое последнее утверждение было верным, мне нужно изменить свой способ таким образом, чтобы я никогда не мог дать задний ход, потому что вначале по незнанию несколько раз оказывался в исходной позиции. Я выполнил достаточное число примеров, чтобы понять, почему так получается. Теперь можно задать вопрос: сколько ходов для этого потребуется?

Мне необходимо ВВЕСТИ таблицу. На самом деле я забыл записать число ходов, поэтому мне придется вернуться и сосчитать их снова!

Число колышков с каждой стороны	Минимальное число ходов
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Итак, для пяти колышков с каждой стороны число ходов 35, но мне бы хотелось узнать ответ для любого числа колышков, скажем, *колышки* с каждой стороны. Присмотревшись к столбцу с минимальным числом ходов, я прихожу к предположению, что число ходов всегда меньше, чем квадрат. Квадрат чего? Ну, конечно же, квадрат ($\textit{колышки}+1$)! Таким образом, если у нас будет 6 колышков, то потребуется как минимум $(7 \times 7) - 1$ ходов. ПРОВЕРИМ!

Теперь я могу сделать обобщение:

$$\textit{минимальное число ходов} = (\textit{колышки} + 1)^2 - 1,$$

где *колышки* — это число колышков с каждой стороны.

Разумеется, меня беспокоит вопрос «почему?». Я хочу объяснить модель, которую нашел, но каким образом мне узнать еще больше? Я должен экспериментировать, обращая внимание на ходы. У нас есть два типа ходов: переходы и перескоки. Постараюсь найти модель в каждом из типов ходов. Значит, мне нужно вернуться назад и посчитать ходы отдельно!

Число колышков с каждой стороны	Число переходов	Число перескоков
1	2	1
2	4	4
3	6	9
4	8	16
5	10	25

АГА! Полюбуйтесь на это. Число перескоков — это квадрат числа колышков на каждой стороне, а число передвижений равно суммарному числу колышков. Но почему? Я не полностью удовлетворен числовой моделью вышеприведенной таблицы (она весьма убедительна, но всё же это только предположение), потому что мне НУЖНО узнать связь между правилами и числами.

Мне кажется, что число переходов плюс число перескоков должно быть равно числу промежутков, через которые колышки перемещаются. Может, я смогу найти это число!

При $B \quad W$	каждый колышек меняет два места, итого 4 сдвига.
При $BB \quad WW$	каждый колышек меняет 3 места, итого 12 сдвигов.

Я ввел «сдвиги» для обозначения общего числа промежутков, через которые перемещаются колышки.

При $BBB \quad WWW$	каждый колышек меняет 4 места, итого 24 сдвига.

Модель очевидна. Если число колышков по обе стороны — это *колышки*, то каждый колышек меняет (*колышки*+1) место. Таким образом, всего

$$2 \times \textit{колышки} \times (\textit{колышки} + 1)$$

сдвигов. Я ответил на дополнительный вопрос и проверил его, но какое отношение он имеет к исходному вопросу?

АГА! Сколько перескоков у меня должно быть? Каждый колышек должен переместиться через все колышки противоположного цвета. Каждый раз, когда это происходит, нужно перепрыгивать. Таким образом, каждый белый колышек должен перепрыгнуть или через него должен перепрыгнуть каждый черный колышек, так что каждый белый колышек совершает прыжки через колышки. Следовательно, всего перескоков должно быть *колышки*× *колышки*. Вот что я понял с помощью своей последней таблицы. Замечательно!

Итак, что я ЗНАЮ теперь?

$$\textit{общее число сдвигов} = 2 \times \textit{колышки} \times (\textit{колышки} + 1),$$

$$\textit{общее число перескоков} = \textit{колышки} \times \textit{колышки}.$$

Ну и что же дальше? Каждый перескок влечет за собой сдвиг на 2. АГА!

$$\textit{общее число сдвигов} = \textit{число переходов} + 2 \times \textit{число перескоков}.$$

Итак,

$$\begin{aligned}\textit{число переходов} &= \textit{общее число сдвигов} \; - 2 \times \textit{число перескоков} = \\ &= 2 \times \textit{колышки} \times (\textit{колышки} + 1) - 2 \times \textit{колышки} = \\ &= 2 \times \textit{колышки}.\end{aligned}$$

Теперь я могу найти общее число ходов, поскольку

$$\begin{aligned}\textit{общее число ходов} &= \textit{перескоки} + \textit{переходы} = \\ &= \textit{колышки}^2 + 2 \times \textit{колышки} = \\ &= \textit{колышки} \times (\textit{колышки} + 2).\end{aligned}$$

АНАЛИЗ. Ключевые идеи были следующие: я не был удовлетворен числовой моделью, пытаясь понять, *почему* предположение может быть верно, и я разделил то, что мне НУЖНО узнать, на более мелкие части (переходы и перескоки). Ключевой момент, который мне запомнился, заключался в том, что я понял, как часто я ВВОЖУ обозначение, подобное сдвигам, не будучи внимательным и точным. В будущем буду следить за этим.

В процессе обзора моего решения я обнаруживаю, что предположил: число ходов равно

$$(\textit{колышки} + 1)^2 - 1,$$

а в результате получил

$$\textit{колышки} \times (\textit{колышки} + 2)!$$

Поскольку

$$\begin{aligned}(\textit{колышки} + 1)^2 - 1 &= (\textit{колышки} + 1) \times (\textit{колышки} + 1) - 1 = \\ &= \textit{колышки} \times \textit{колышки} + 2 \times \textit{колышки},\end{aligned}$$

в конечном итоге они равны. Так просто не заметить подобные детали, если не потратить время на основательный обзор.

В процессе ПРОВЕРКИ я замечаю, что до конца не уяснил, почему это вычисление дает минимальное число ходов. Кроме того, я не подумал о взаимосвязи между моим методом и минимальным числом ходов. Поскольку общее число сдвигов фиксированное (колышки нельзя двигать назад), число ходов будет минимальным, когда число перескоков максимально. Единственный способ увеличить число перескоков — сделать так, чтобы колышки перескакивали через колышки своего цвета. Но я думаю, что в таком случае поменять их местами не получится. Когда я спрашиваю почему, я снова возвращаюсь к этапу штурма!

Выводы

Состояние ЗАСТРЯЛИ! — абсолютно нормальное, поскольку, пребывая в нем, можно многому научиться. Не забывайте об этом, когда будете колоть крепкие орешки и то и дело оказываться в тупике. Признать и принять состояние ЗАСТРЯЛИ! совсем не так просто, как может показаться на первый взгляд. Зачастую, попав в тупик, мы не сразу это осознаем и не предпринимаем никаких шагов, чтобы из него выбраться.

Когда вы поймете, что ЗАСТРЯЛИ!, не поддавайтесь панике. Расслабьтесь, примите этот факт и наслаждайтесь моментом, поскольку это замечательная возможность учиться. Экспериментирование — ваш лучший друг, оно во всех подробностях расписано в главе 2 в разделе «Погружение». Когда вас посетит новая идея и вы выйдете из тупика, коротко запишите, в чем суть вашей идеи. Если то, что вы собираетесь попробовать сделать, вам нравится, почему бы не написать «АГА!»? От этого ваше настроение только улучшится!

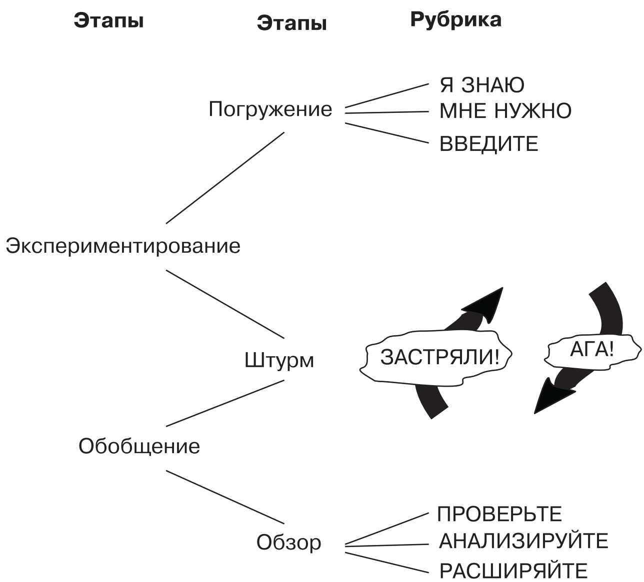
Следующие задания из главы 10 дадут возможность поломать голову в тупике и с успехом из него выбраться:

«*Диагонали прямоугольника*» (стр. 216),
«*Вращаем монеты*» (стр. 249),

«*Картезианская погоня*» (стр. 211),
«*Тридцать один*» (стр. 257),
«*Нечетные делители*» (стр. 239).

См. главу 11, где есть другие вопросы, входящие в программу обучения.

Попробуйте решить задачу «*Чехарда*» с разными числами колышков по обе стороны.



ГЛАВА 4

ШТУРМ: ДЕЛАЕМ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ

Это начало штурма, который будет идти на протяжении трех глав, на этап «штурм» решения задачи. В основе этого этапа — предположение, и в этой главе речь пойдет о том, как строить предположение относительно того, ЧТО является верным. В главе 5 вы будете учиться убеждать себя и других, подтверждая свое предположение, а в главе 6 узнаете, что делать, когда все аргументы исчерпаны.

Что такое предположение?

Спросите у математика, что такое предположение[1], и он может ответить конкретным примером. Знакомьтесь.

Гипотеза Гольдбаха

Каждое четное число, большее 2, есть сумма двух простых чисел. (Обратите внимание: 1 простым числом не является, поэтому 2 исключается.)

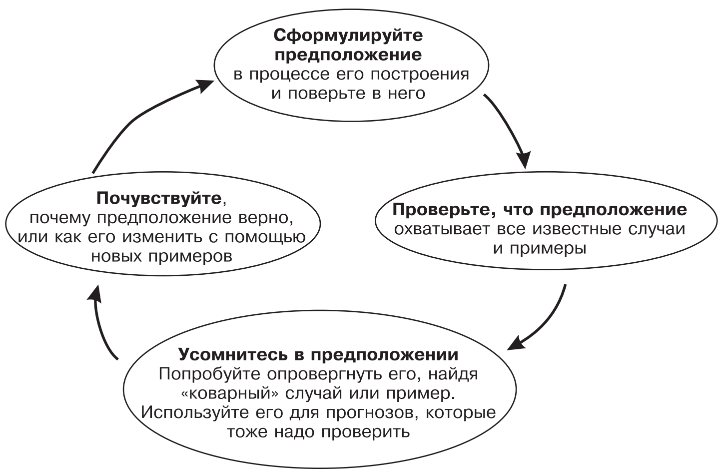
Накоплен большой объем фактов, подтверждающих гипотезу Гольдбаха. Например, проверены миллионы четных чисел, и каждое из них оказалось суммой двух простых чисел. Однако никто еще не сумел доказать, что *любое* четное число обладает этим свойством, и, может быть, это не так.

Предположение, или гипотеза, — это утверждение, которое представляется достоверным, однако истинность его еще не уста-

[1] Автор использует термин conjecture, который можно перевести как предположение, или гипотеза. — *Прим. ред.*

новлена. Другими словами, оно еще не было убедительно подтверждено, однако еще и не опровергнуто никакими примерами. Гипотеза Гольдбаха — одна из самых известных открытых математических проблем. В отличие от многих других, ее несложно формулировать, и в результате попыток подтвердить ее возникло большое число вспомогательных результатов и методов. Это типично для знаменитой гипотезы.

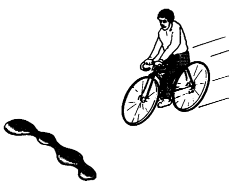
Не все предположения столь важны; на самом деле большинство являются ложными и, как только возникают, претерпевают изменения. Тем не менее построение предположений лежит в основе математического мышления. Как это происходит? Вы чувствуете или догадываетесь, что некое утверждение верно, и пытаетесь подтвердить это. В решении «*Лоскутного одеяла*» (глава 1, стр. 31) есть неформальные маленькие предположения, что достаточно 4, 3, а потом 2 цветов и что, следуя «правилу противоположности» и «правилу смежности», можно раскрасить куски соответствующим образом.



Подобные предположения составляют суть математического мышления. Допустим, некое свойство считается верным. Это предположение часто возникает как смутное ощущение где-то в подсознании. Постепенно вы вытягиваете его на поверхность, пытаясь сформулировать с максимальной четкостью, чтобы можно было проще исследовать. Если предположение оказывается ложным, его либо отбрасывают, либо видоизменяют. Если же его можно убедительно доказать, то оно занимает свое место в ряду предположений, которые в конечном итоге приведут к окончательному решению. Высказывание предположений можно наглядно представить в виде циклического процесса, изображенного на рисунке выше.

Как правило, лучший способ оценить процесс — это испытать его на практике!

Покрашенные покрышки



Как-то раз, катаясь на велосипеде, я проехал по полоске сырой краски шириной примерно 6 дюймов (12 см). Проехав какое-то расстояние по прямой, я оглянулся, чтобы посмотреть, какой след оставляют на тротуаре испачканные краской покрышки. Что же я увидел?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Передняя шина оставляет след на тротуаре. А как насчет задней?

Пожалуй, тут есть две возможности, которые чаще всего приходят на ум. Первое предположение: след пунктиром на расстоянии длины окружности покрышки. Второе предположение: два следа — от передней и задней покрышки. Последнее предположение иногда уточняют замечанием, что имеет значение расстояние между колесами велосипеда.

ПРОКОММЕНТИРУЙТЕ СПРАВЕДЛИВОСТЬ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ!

Вы заметили, что, если предположения записать, обсуждать их становится легче? Добрая половина математического мышления — это «въехать» в вопрос настолько хорошо, чтобы почувствовать, что может быть верно, и сформулировать это как предположение. В данном случае перед нами стоит выбор между двумя возможностями. Итак, опишите их в сжатом виде, а потом подумайте, которая из них кажется более вероятной, и не забывайте проверять каждое предположение, используя **все** известные факты.

Вы решили, что шины оставляют два отдельных следа? В таком случае какие бы остались следы, если бы два человека проехали на одноколесном велосипеде с промежутком в несколько минут? Часто изменение условий помогает разобраться, что к чему. В данном случае, если колеса имеют одинаковый радиус, они оставят одни и те же следы.

РАСШИРЕНИЯ

> А что если, как и обычно, давление в шинах разное и мой вес распространен на два колеса неравномерно?
>
> А что если я еду не по прямой линии?

Основной вывод, который можно сделать из «*Покрашенных покрышек*», состоит в том, что в замысловатом вопросе предположение помогает концентрировать внимание. Когда мы формулируем смутное ощущение, мы даем возможность мозгу критически исследовать нечто конкретное. Как только предположение сформулировано, важно поставить его под сомнение, но этой темой подробно займемся в следующей главе. А сейчас важно понять, откуда берутся предположения.

Мебель

Нужно передвинуть очень тяжелое кресло, причем допускается перемещать его, только вращая на 90° вокруг любого из его углов. Можно ли переставить кресло таким образом, чтобы оно стояло рядом с исходным положением и лицом в ту же сторону?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

Погружение

– Попробуйте экспериментировать с макетом из картона.
– Попробуйте найти способ записать возможные перемещения так, чтобы проявилась модель.

Штурм

– Как вы думаете, это возможно? Сделайте предположение!
– Поставьте более общий вопрос: какие есть варианты нового положения кресла?
– Попробуйте стрелочкой отметить, куда смотрит кресло, и отмечайте, куда обращена стрелка, после каждого перемещения.
– Может, воспользоваться системой координат?
– Какие точки может достать фиксированный угол кресла? (Экспериментирование.)

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Через пару-другую минут экспериментирования у вас появится чувство безнадежности. Как только вы произнесете вслух

«Я думаю, это невозможно,»

считайте, что одно предположение у вас уже есть. Обратите внимание, как после этого заявления смутное чувство безнадежности уступает место ростку надежды после каждого «а может быть» и появляется некая определенность, пусть и со знаком минус. Теперь есть о чем подумать! Предположение естественным образом приводит к вопросам типа

Почему это *нельзя* сделать?

Ладно, а что *можно* сделать?

Переход к вопросу «Что *можно* сделать» — важный аспект построения предположения, поскольку, раскрывая исходный вопрос, обобщая и изменяя его, вы можете выявить модель. В данном случае, следуя направлению, куда смотрит кресло или куда перемещается каждый угол поочередно, вы приходите к знакомой модели шахматной доски. Обсуждение вопроса в подробностях перенесем в следующую главу, где речь пойдет о том, как подтвердить то или иное предположение.

Предположение: основа решения

Примеры из предыдущих разделов и работа над задачами из первых глав наверняка снабдили вас немалым опытом построения предположений. В этом разделе речь идет о роли предположений в решении одного вопроса. Вопрос этот весьма занятный, поскольку допускает разные подходы. Не читайте мои записи, пока не поработаете над решением самостоятельно, и не удивляйтесь, если найдете более экономный способ решения. Как и с «*Палиндромами*» из главы 1, если вы дружите с алгеброй, то найдете более короткий путь, хотя и необязательно до конца разберетесь со всеми его скрытыми значениями. Цель данного варианта решения — показать вам, сколь важны предположения для процесса математического мышления.

Последовательные суммы

Некоторые числа можно выразить как сумму цепочки последовательных положительных чисел. Какие именно числа обладают этим свойством? Например, обратите внимание, что

$$9 = 2 + 3 + 4,$$
$$11 = 5 + 6,$$
$$18 = 3 + 4 + 5 + 6.$$

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

- Попробуйте на большом числе примеров.
- Попробуйте изменить вопрос, расширив его каким-нибудь способом.
- Экспериментируйте, следуя системе, и попробуйте несколько разных систем.

– Ищите модели.

Вариант решения

Погружение

Начните с экспериментирования. Приходят на ум два систематических подхода. Либо поочередно пытайтесь выразить каждое число как сумму последовательных чисел, либо следуйте системе и берите наборы из двух, потом трех, потом четырех последовательных чисел и находите суммы. На данный момент воспользуемся первым вариантом.

Штурм

$1 = 0 + 1$	Ноль допускается? Нет, числа должны быть положительными.
$2 = ?$	Не выходит.
$3 = 1 + 2$	
$4 = ?$	Не выходит.

Предположение 1. *Четные числа не являются суммой последовательных чисел.*

Продолжаем штурм с помощью дальнейшего экспериментирования:

$$5 = 2 + 3,$$
$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Предположение 1 опровергнуто. Продолжаем экспериментирование:

$$7 = 3 + 4,$$
$$8 = ? \ \textit{Не выходит.}$$

Предположение 2. *Степени двух не являются суммой последовательных чисел.*

Основание для предположения 2 весьма шаткое, хотя, поскольку $1 = 2^0$, для 1 это работает. Это хорошо, поскольку про 1 я забыл. Теперь я могу прогнозировать, что с $16 = 2^4$ будут проблемы. Необходимо экспериментировать дальше, хотя бы до 16. В процессе накопления этой информации проявляются другие модели относительно сумм двух, трех и четырех чисел. Эти модели надо записывать под рубрикой «АГА!» или как предположения, даже если на этой стадии они еще не проверены со всей тщательностью. Некоторые из них могут содержать важные наблюдения, которые могут оказаться полезными по мере продвижения решения.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС, ЕСЛИ ЕЩЕ НЕ СДЕЛАЛИ

АНАЛИЗИРУЙТЕ: сделайте паузу и оцените, как происходит процесс построения предположений. Предположения возникают автоматом в результате уже знакомых вам процессов экспериментирования и обобщения. Экспериментирование дает ощущение того, что происходит; обнаружение скрытой модели (обобщение) и ее формулирование приводят к предположению, которое можно исследовать, опровергать и видоизменять. В данном случае в результате дальнейшего экспериментирования мы подтвердили предположение 2.

Процесс построения предположений на данный момент можно представить в виде схемы со следующей страницы. Предположение 2 прошло полный цикл, и, похоже, дальнейшие примеры его подтверждают. Прежде чем мыслить более общими категориями, почему оно верно или нет, обратите внимание на то, что его можно значительно улучшить, сформулировав второе свойство, которое проявило экспериментирование.

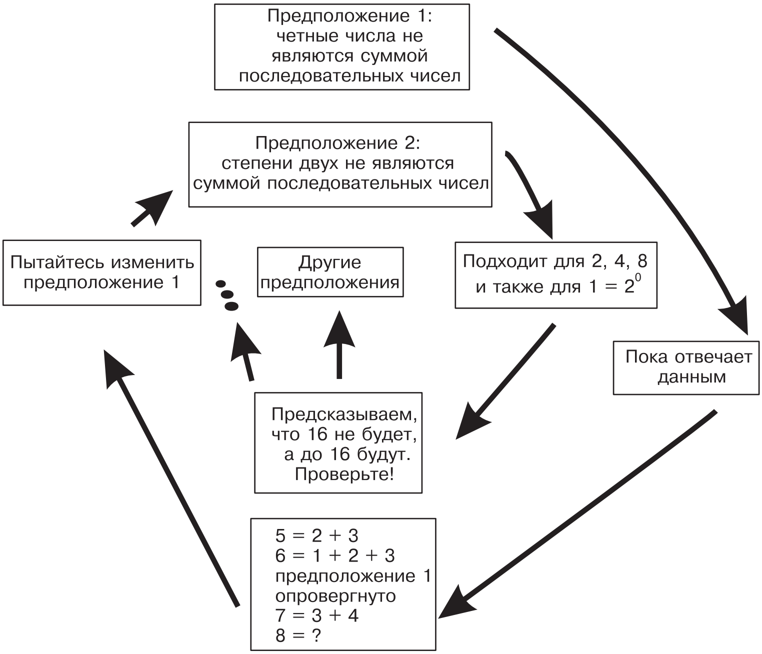
Предположение 3.

1. *Степени двух нельзя выразить как суммы последовательных положительных чисел.*
2. *Все другие числа являются суммами последовательных положительных чисел.*

Чтобы понять, является ли предположение 2 верным для всех чисел, мы должны ответить на два вспомогательных вопроса:

1. Каким образом можно записать как сумму последовательных чисел любое число, которое *не является* степенью двух?

2. Почему степень двух *нельзя* выразить как сумму последовательных чисел?



Эти два вопроса подводят нас к фундаментальному моменту: что отличает степень двух от других чисел? Как это отличительное свойство соотносится со свойством суммы последовательных чисел? Я знаю, что степень двух не имеет никаких простых делителей, кроме двух, по определению. Следовательно, все его делители, кроме единицы, являются четными. Например, делители 16 — это

$$16, 8, 4, 2 \text{ и } 1,$$

и все они четные, кроме 1, а делители 22 — это

$$22, 11, 2 \text{ и } 1,$$

и есть еще один нечетный делитель, кроме 1. Я еще не уверен, что это существенная информация, но стоит записать как замечание. На самом деле она где-то между предположением и констатацией факта, в зависимости от того, насколько я ставлю под сомнение свое окончательное решение.

Предположение 4. *У каждого числа, которое не является степенью двух, есть нечетный множитель, отличный от 1.*

Я записал это как предположение, потому что сейчас не хочу тратить время на подтверждение. Похоже, что оно верно, и, поскольку я его четко записал, проверю его на этапе обзора. Мой математический опыт подкрепляет мое наблюдение с большой степенью вероятности, и я с уверенностью могу продолжить, не отвлекаясь от основного направления исследования. Однако не помешает такие моменты записывать, чтобы потом можно было их проверить, когда я буду спокойнее и не буду столь увлечен потоком мыслей.

Каким образом наличие нечетного делителя поможет мне выразить число как сумму последовательных чисел? Экспериментируйте, рассматривая числа с нечетными делителями, например кратные 3 и 5:

$$\begin{aligned}
3 &= 1 + 2,\\
6 &= 1 + 2 + 3,\\
9 &= 2 + 3 + 4,\\
12 &= 3 + 4 + 5,\\
15 &= 4 + 5 + 6,\\
5 &= 2 + 3,\\
10 &= 1 + 2 + 3 + 4,\\
15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5,\\
20 &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6,\\
25 &= 3 + 4 + 5 + 6 + 7.
\end{aligned}$$

Прослеживается четкая модель (а значит, и предположение): с увеличением начальных чисел можно получить более крупные кратные 3 (и 5 соответственно) как суммы 3 (или 5) последовательных чисел. В подобной ситуации, как правило, стоит попытаться сформулировать предположение, поскольку это проясняет ваше ощущение того, что происходит, и дает вам нечто конкретное для проверки. Однако нет необходимости быть излишне формальным, особенно если предположение возникает в процессе исследования. Главное — начать улавливать мысли. Первая попытка может выглядеть примерно так:

Предположение 5. *Число, у которого есть нечетный делитель, можно записать как сумму последовательных чисел. Как правило, нечетный делитель совпадает с числом слагаемых.*

У меня получилось внятно сформулировать предположение 5 только с пятой попытки! Я намеренно вставил «как правило», потому что не готов быть точным, но я не хочу вначале на это отвлекаться. Для того чтобы заняться предположением 5, мне придется манипулировать некоторыми нечетными делителями. Здесь уместно ввести некоторые обозначения. Итак, нечетные числа имеют вид $2K+1$, где K — целое число.

Предположение 5А. *Число N, у которого есть нечетный делитель $2K+1$, как правило, представляет собой сумму $2K+1$ последовательных чисел.*

Это соответствует всем данным, накопленным на данный момент. Представляется разумным попытаться понять, что происходит, систематически проверяя на новых примерах.

Кратные 3

$$\begin{array}{lcccccc}
3\times 2 = & 1 & + & 2 & + & 3 \\
3\times 3 = & 2 & + & 3 & + & 4 \\
3\times 4 = & 3 & + & 4 & + & 5 \\
3\times F = & (F-1) & + & F & + & (F+1)
\end{array}$$

Кратные 5

$$\begin{array}{lccccccccc}
5\times 3 = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 \\
5\times 4 = & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 \\
5\times 5 = & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7 \\
5\times F = & (F-2) & + & (F-1) & + & F & + & (F+1) & + & (F+2)
\end{array}$$

Выглядит неплохо! Я начинаю понимать, что у меня выходит кратное среднего числа. Таким образом, если

$$N = (2K+1)\times F,$$

то N представляется суммой $2K+1$ последовательных чисел, причем среднее — F.

Предположение 6. *Попробуйте выразить N, равное $F\times(2K+1)$, как сумму копий числа F*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & F & & & = F \\
 & (F-1) & + & & (F+1) & & = 2F \\
(F-2) & & & + & & (F+2) & = 2F \\
 & & & \cdots & & & \\
(F-K) & & & + & & (F+K) & = 2F
\end{array}$$

Здесь выписано $K+1$ равенство; таким образом, сумма всех левых частей равна сумме всех правых частей, что есть

$$(K \times 2F) + F = (2K+1) \times F.$$

АГА! Получается!

ПРОВЕРЬТЕ! Здесь $2K+1$ последовательных членов. Боже! А все ли они положительные? Только если F достаточно велико. Давайте рассмотрим несколько примеров, следуя модели предположения 6.

$$\begin{array}{rrcccccccccccccc}
F=1\colon & 3\times 1 = & & & & & (1-1) &+& 1 &+& (1+1) &=& & & & \\
& = & & & & & 0 &+& 1 &+& 2, & & & & & \\
F=1\colon & 5\times 1 = & & & (1-2) &+& (1-1) &+& 1 &+& (1+1) &+& (1+2) &=& & \\
& = & & & -1 &+& 0 &+& 1 &+& 2 &+& 3, & & & \\
F=2\colon & 5\times 2 = & & & (2-2) &+& (2-1) &+& 2 &+& (2+1) &+& (2+2) &=& & \\
& = & 0 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 4, & & & & & \\
F=1\colon & 7\times 1 = & (1-3) &+& (1-2) &+& (1-1) &+& 1 &+& (1+1) &+& (1+2) &+& (1+3) &= \\
& = & -2 &+& -1 &+& 0 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 4, & \\
F=2\colon & 7\times 2 = & (2-3) &+& (2-2) &+& (2-1) &+& 2 &+& (2+1) &+& (2+2) &+& (2+3) &= \\
& = & -1 &+& 0 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 4 &+& 5, & \\
F=3\colon & 7\times 3 = & (3-3) &+& (3-2) &+& (3-1) &+& 3 &+& (3+1) &+& (3+2) &+& (3+3) &= \\
& = & 0 &+& 1 &+& 2 &+& 3 &+& 4 &+& 5 &+& 6. &
\end{array}$$

АГА! Я всегда могу забыть про 0, а все отрицательные члены сокращаются с положительными. Таким образом,

$$\begin{aligned}
3\times 1 &= 0+1+2 = 1+2,\\
5\times 1 &= -1+0+1+2+3 = 2+3,\\
5\times 2 &= 0+1+2+3+4 = 1+2+3+4,\\
7\times 1 &= -2+ -1+0+1+2+3+4 = 3+4,\\
7\times 2 &= -1+0+1+2+3+4+5 = 2+3+4+5,\\
7\times 3 &= 0+1+2+3+4+5+6 = 1+2+3+4+5+6.
\end{aligned}$$

Может, я могу использовать это, чтобы разобраться с «как правило» из предположения 5? Резюмируем: я ЗНАЮ, что любое число N с нечетным делителем $2K+1$ можно записать как сумму $2K+1$ последовательных чисел. Но некоторые из них могут быть отрицательными. Мне НУЖНО показать, что любое число N с нечетным делителем можно записать как сумму двух и более последовательных положительных чисел.

Размышляя над тем, что я ЗНАЮ и что мне НУЖНО показать, я внезапно понял, что я практически решил задачу! Все, что мне остается сделать, — это уравновесить отрицательные члены соответствующими положительными слагаемыми. Положительных членов должно быть больше, поскольку общая сумма положительная!

Проверьте! А что если в результате сокращения положительных и отрицательных членов у меня останется только один член? Боже мой! Неужели это возможно? Экспериментируйте. Сумма

$$(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3$$

состоит из шести членов. Дело в том, что там есть 0. Чтобы в результате сокращения у меня остался всего один член, у меня должно было быть в общей сложности четное число членов, а у меня — $2K + 1$ членов, что всегда является нечетным числом. В результате обобщения получаем следующее предположение.

Предположение 7. *Если суммируется нечетное число членов, включая 0, то в результате сокращения всегда остается четное число последовательных положительных чисел.*

Теперь я полностью удовлетворен: каждое число, которое делится на нечетный делитель, кроме 1, *можно* записать как сумму последовательных положительных чисел. Воодушевленный успехом, я делаю паузу, чтобы сделать обзор своей работы.

Обзор. Я ответил на первый вспомогательный вопрос, но не ответил на второй — почему степень двух нельзя выразить как сумму последовательных положительных чисел?

Наверняка в моей работе содержится ответ и на этот вопрос. Давайте посмотрим. Допустим, что число N *можно* записать как сумму последовательных положительных целых чисел. Например:

$$7 = 3 + 4 \text{ и } 5 = 2 + 3.$$

А ранее у меня было

$$7 = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$

и

$$5 = (-1) + 0 + 1 + 2 + 3.$$

ага! Почему бы снова не воспользоваться уравновешиванием? Возьмем любую сумму последовательных положительных целых чисел. Расширим ее по убывающей до нуля и далее так, чтобы отрицательные слагаемые сокращались с дополнительными положительными числами. Теперь мне нужно показать, что если число N можно записать как сумму последовательных положительных чисел, то у него *должен быть* нечетный делитель. АГА! Все зависит от того, есть ли в сумме нечетное число членов. Я вижу два случая:

(а) N выражено как сумма нечетного числа последовательных положительных чисел;

(б) N выражено как сумма четного числа последовательных положительных чисел.

Итак, случай 1 выглядит, на мой взгляд, как предположение 6 задом наперед. Значит, я могу заключить, что в случае 1 у числа N есть нечетный делитель. АГА! Случай 2 похож на сокращения предположения 7.

Таким образом, я думаю, я готов записать доказательство. В результате нескольких доработок получаем

Предположение 8. *Если N можно записать как сумму нечетного числа последовательных (не обязательно положительных) чисел, у него есть нечетный делитель.*

Доказательство. Используя обозначения предположения 6, допустим, у нас сумма $2K+1$ членов. Тогда члены можно сгруппировать вокруг центрального слагаемого F как

$$\begin{array}{ccccc} & & F, & & \\ & (F-1) & + & (F+1), & \\ (F-2) & & + & & (F+2), \\ & & \cdots & & \\ (F-K) & & + & & (F+K). \end{array}$$

Таким образом, $N = F \times (2K+1)$. Значит, у числа N есть нечетный делитель.

Теперь я готов вернуться к предположению 2.

Предположение 2. *Степени двух не являются суммой последовательных положительных чисел.*

Доказательство. Любое число N, которое является суммой последовательных положительных чисел, есть сумма либо нечетного, либо четного числа членов. Если число членов нечетное, то, как видно из доказательства предположения 8, у числа N должен быть нечетный делитель, таким образом, оно не может быть степенью двух. Если же число членов четное, то прибавьте члены по убывающей до нуля и далее, чтобы получить нечетное число последовательных членов, чья сумма по-прежнему равна N. И в этом случае у N, согласно предположению 8, должен быть нечетный делитель, следовательно, оно не может быть степенью двух.

Теперь, я думаю, я закончил.

Обзор. В результате проверки вроде бы никаких ошибок не обнаружилось. Можно переписать доказательства, чтобы отшлифовать решение, однако, если нарушить последовательность предположений, решение становится как бы безликим. Было несколько ключевых идей. Наиболее значительная из них — это введение или допущение отрицательных членов, даже несмотря на то, что я понимал, что в конечном итоге мне придется от них избавиться. Благодаря этому я пришел к предположению 6, а потом и к основе своего решения. С моей точки зрения, было несколько ключевых моментов. Это необходимость и значимость перехода к символам N, $2K + 1$ и F. Они дали мне нечто конкретное и в то же время общее, чем удобно манипулировать. Я обратил внимание, что, используя единицу в качестве нечетного делителя, можно выразить любое число как сумму только одного положительного «последовательного» числа, включая степени двух.

Введение символов — это мощный инструмент для увеличения объема информации, данной в предположении, и сохранения ее при этом в читабельном виде. Каждый символ должен быть четко определен, и необходимо обеспечить последовательность значения. Рекомендую, прежде чем работать с новым утверждением, проверять алгебраическое утверждение на числовых примерах. Если вы с алгеброй дружите, то пользуйтесь и этим методом. В таких случаях не забывайте обращаться к числовым примерам и интерпретировать утверждение.

Я был поражен тем, как быстро возникают предположения и сколько удовольствия это мне доставляет. Теперь, когда я знаю о цикличной природе построения предположений, я с еще большим вниманием, чем раньше, отношусь к предположениям. Когда я оказываюсь в тупике, я могу вернуться назад и найти, где я отошел от спирали, забыв проверить и опровергнуть свои предположения.

Предположения похожи на мотыльков. Если мимо летит один, как правило, за ним летит еще много мотыльков. Когда каждый из них пролетает мимо, он отвлекает внимание от последнего, так что легко потерять след. Как только предположения начинают возникать одно за другим, следует записать их суть в нескольких словах, чтобы потом можно было к ним вернуться. Вы узнаете, что, как и мотыльков, «ловить» предположения не так просто. Иной раз с первой попытки не получается. Когда вы делаете попытку, ваш мозг сосредотачивается и предположение обретает форму, а не расплывается. Вот тогда становится возможным всерьез думать о предположениях.

Очень важно уметь различать, когда утверждение имеет статус предположения и когда оно убедительно подтверждено. Догматичная вера в надуманное утверждение не есть мышление! Целесообразно относиться к любому утверждению как к предположению, которое необходимо проверить и подтвердить. В «*Последовательных суммах*» я постарался отметить каждое предположение, вернуться к нему и предоставить аргументы, чтобы подтвердить ключевые предположения. Как надо подтверждать предположения будет темой главы 5.

И наконец, РАСШИРЯЯ решение, я накопил большой объем данных и заметил, что

$$9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4,$$
$$15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

Интересно, а сколько существует разных способов показать, что данное число есть сумма последовательных положительных целых чисел? См. «*Последовательные суммы*» в главе 10.

Откуда берутся предположения?

Мой вариант решения «*Последовательных сумм*» иллюстрирует процесс построения предположений, как это часто бывает в математическом мышлении. Но откуда берутся предположения и как они возникают? Самое главное — понять, что нужно быть уверенным в себе и/или дерзким. Если вы будете робеть, не решаясь попробовать что-нибудь, а потом отвергнуть или видоизменить, вы вряд ли сумеете реализовать свой потенциал. Однако уверенность не появится, если вы просто скажете себе

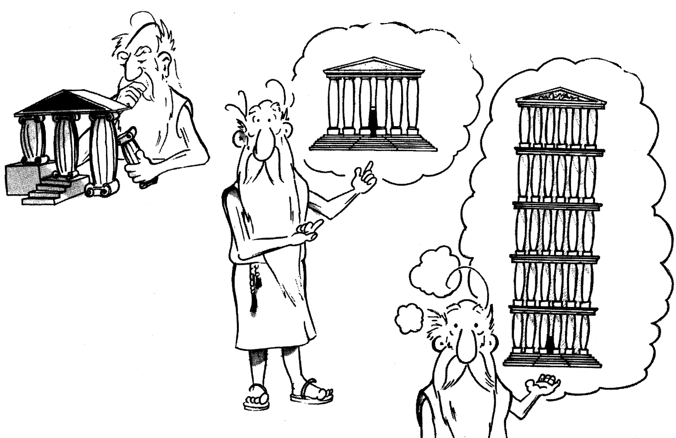
«Я буду уверен!»

Она возникает в результате уже достигнутых успехов и освобождения от напряжения, которое неизбежно в ситуации «ЗАСТРЯЛИ». Чтобы ускорить выход из тупика, настоятельно рекомендую (в последний раз!) наращивать арсенал РУБРИК, делая краткие записи для себя, когда в голову приходит мысль, например

ПОПРОБУЮ...
МОЖЕТ БЫТЬ,...
НО ПОЧЕМУ...?

Подобные «мелочи» помогают по двум причинам. Во-первых, это концентрирует ваше внимание на мысли и она не поглощается следующей мыслью, а во-вторых, напоминает вам, о чем вы думали и что делали. «ПОПРОБУЮ...» и «МОЖЕТ БЫТЬ,...» сначала служат маркерами для вас, но со временем именно из них возникают связные предположения! Итак, если вы, работая над задачей, чувствуете себя неуверенно, введите рубрики «ПОПРОБУЮ...», «МОЖЕТ БЫТЬ,...» и «НО ПОЧЕМУ...?» (и экспериментируйте на примерах, которые внушают вам уверенность в себе!).

По-видимому, предположения возникают в результате двух основных видов деятельности. Экспериментирование, которое, пожалуй, является главным источником предположений, мы уже подробно обсудили. Второй источник — это аналогия, разновидность обобщения.



Бывает так, что, исследуя одну ситуацию, вы вдруг замечаете удивительное сходство с вопросом, которым вы занимались ранее.

Иногда сходство полное, когда вопросы практически идентичны, просто оформлены по-разному. Часто сходство частичное, однако помогает строить предположения и выбирать подходы. Показать, как это происходит, на примерах достаточно сложно, поскольку это зависит от прошлого опыта и личных подходов к решению вопросов. Лично я такой пример нашел, когда после обдумывания «*Последовательных сумм*» столкнулся вот с такой задачей.

Разности квадратов

Какие числа можно выразить как разность двух полных квадратов?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Экспериментируйте: не сдавайтесь так легко!
– Следуйте системе. Вспомните, что в «*Последовательных суммах*» есть два способа генерировать примеры: начать с числа или с последовательной суммы.
– Не помешает знать, что каждую разность квадратов можно разложить в произведение.

Для начала я попытался поочередно выразить 1, 2, 3, ... как разность двух квадратов, но у меня ничего не вышло. Потом второй подход в «*Последовательных суммах*» навел меня на мысль следовать системе аналогично. Таким образом,

$$\begin{array}{cccc} 2^2-1^2 & 3^2-1^2 & 4^2-1^2 & \dots \\ & 3^2-2^2 & 4^2-2^2 & \\ & & 4^2-3^2 & \end{array}$$

подсказало связь с «*Последовательными суммами*», и я вспомнил про делители. Вскоре возникло предположение с числами, которые в два раза больше нечетного делителя. Тогда я прибег к алгебраическим выражениям и использовал обычное разложение на множители

$$N^2-M^2,$$

а именно $(N-M)(N+M)$, и пришел к варианту решения, который ПРОВЕРИЛ на своих примерах.

Моя коллега тоже обнаружила, что «*Разности квадратов*» аналогичны «*Последовательным суммам*», но другим способом. Она решила «*Последовательные суммы*», выразив сумму чисел от $N+1$ до M как

$$(N-M)(N+M+1)/2$$

и заметила, что один из $N-M$ или $N+M+1$ должен быть четным, а другой нечетным. Она использовала ту же ключевую идею в «*Разностях квадратов*», заметив, что числа $N-M$ и $N+M$ либо оба четные, либо оба нечетные, и аналогичным путем пришла к решению. В обоих случаях, аналогия с «*Последовательными суммами*» оказалась в конечном итоге неполной, но аналогии могут быть и точными, зачастую на удивление. Например, вам предстоит еще подумать над вопросом, очень похожим на «*Булавки с нитками*» из главы 3. Будьте внимательны — не пропустите! Ну а сейчас давайте поиграем: следующее задание идентично известной детской игре. Видите аналогию?

Пятнадцать

На столе лежат девять фишек с цифрами от 1 до 9. Два игрока поочередно берут по одной фишке со стола. Выигрывает тот, кто первым наберет три фишки, сумма цифр которых составляет 15.

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Поиграйте в игру несколько раз, чтобы выяснить, какой первый ход лучший.
– Сумма 15 в контексте чисел от 1 до 9 ни о чем вам не говорит?
– Какие наборы чисел дают в сумме 15?
– Сколько раз каждое число встречается в этих наборах?
– Можете ли вы расположить эти наборы таким образом, чтобы было видно, где они совпадают?

Разрабатываем модель

Процесс построения предположений зависит от способности увидеть модель или аналогию, другими словами, от способности обобщать. Обнаружение модели может в конечном итоге быть процессом творческим, управлять которым невозможно, но, как и в случае любого творческого процесса, чтобы случилось озарение, необходима большая подготовительная работа. Напрашивается вывод о необходимости дальнейшего экспериментирования. Это увеличивает объем информации и дает еще одну возможность прочувствовать ситуацию во время еще одного прохождения через нее. Другой мощный инструмент — переорганизация уже имеющейся информации. Это может быть либо представление информации в ином виде, либо переорганизация и вашего мышления.

Например, в «*Последовательных суммах*» идея переорганизовать

$$3 \times 1 = 0 + 1 + 2 \qquad \text{как } 1 + 2,$$
$$5 \times 1 = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 \qquad \text{как } 2 + 3$$

и т.д.

была решающей для обратного шага — прибавления сумм четного числа последовательных членов, чтобы получить эквивалентное нечетное число последовательных членов.

Обобщение — это концентрация на определенных аспектах, общих для многих примеров, и пренебрежение другими аспектами. Предположение 5 в «*Последовательных суммах*» — отличный тому пример, именно благодаря «как правило». Свойство, привлекшее мое внимание, не было общим для всех примеров! Дело в том, что разобрать много примеров, а потом взять и поставить вопрос, что между ними общего, недостаточно. Быть творческим — значит настолько проникнуться примерами и погрузиться в них, что они как бы начинают говорить с вами. Тогда догадка, которая разовьется в настоящее предположение, доставляет истинное удовольствие, которое будет поддерживать вас в длительные периоды фрустрации по поводу ложных предположений и моделей-невидимок.

Способность к обобщению в математике можно умножить практикой и работой над замысловатыми вопросами, способствующими генерации идей. Два основных способа — это:

– развить ожидание модели и быть готовым активно ее искать;
– наращивать математические знания и опыт.

Одно из самых приятных свойств математики — это изобилие моделей, которые можно обнаружить во всех ее областях. Когда вы занимаетесь математическим мышлением, в вас постоянно растет чувство ожидания найти регулярность в результатах математического исследования, и это готовит вас к обнаружению и распознаванию моделей. В «*Последовательных суммах*» я был настолько уверен в том, что модель должна быть, что был готов пренебречь аспектами, которые этому не соответствовали. Успех в задании «*Пятнадцать*» зависел от ощущения, что должна быть модель, которая меня ведет, до тех пор пока я не вспомнил общее с магическими квадратами.

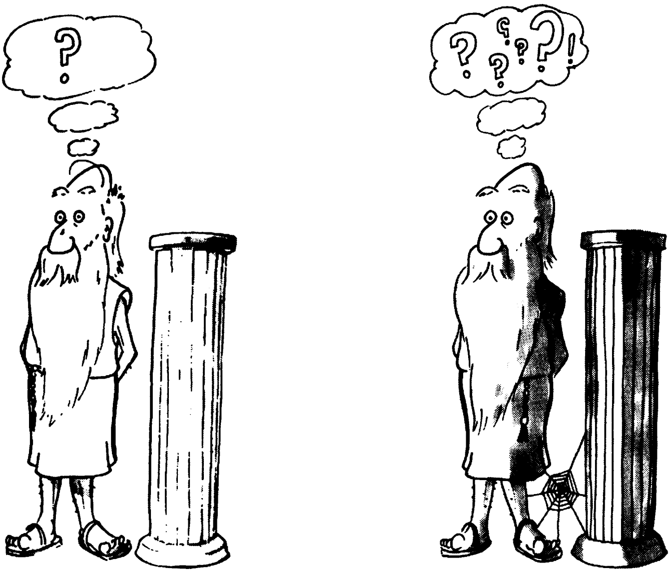
Знание математики также существенно помогает в поиске моделей. Во-первых, когда некоторые модели становятся более знакомыми, их все легче распознавать, даже если они замаскированы, поэтому, если вы знакомы с квадратами чисел, вы без труда распознаете закономерность

$$2,\ 8,\ 18,\ 32,\ 50,\ 72,\ \ldots$$

или

$$3,\ 8,\ 24,\ 35,\ 48,\ 63,\ \ldots.$$

Во-вторых, есть определенные стандартные методы, например изучение разницы между последовательными членами числового ряда, которую можно использовать для выяснения, какая может быть модель. В-третьих, «*Булавки с нитками*» (глава 3, стр. 78) напомнили мне про арифметику остатков, из которой я знаю, что наибольший общий делитель — это важная мысль, так что я был к ней готов. Если же вы никогда не знали, что наибольший общий делитель это важно, то «*Булавки с нитками*» могут показаться вам куда более сложными. Таким образом, расширяя наши знания, мы расширяем область для своего мышления. Разумеется, опыт не всегда приводит к нужному направлению, поскольку рождает штампы. Как только вы становитесь приверженцем того или иного подхода, изменять ему становится трудно. Искусство строить предположения состоит еще и в том, чтобы быть открытым для новых интерпретаций, возникающих внезапно в контексте, который при других условиях мог показаться знакомым. Подробнее об укоренившихся привычках и точках зрения поговорим в главах 5 и 6.

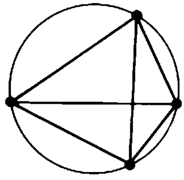


Даже ожидание модели, особенно простой модели, может быть обманчивым. Бывают ситуации, где модели и обобщения вовсе не очевидны, а бывают и такие, где модели на самом деле сложнее, чем можно было сначала предположить. Предлагаю для затравки задание, где есть предостережение, — будьте осторожнее с обобщениями.

Окружность и точки

Поставьте на окружности N точек и соедините каждую пару точек прямыми линиями. На какое максимальное число участков можно таким способом разделить круг?

Например, если точек 4, то максимальное число участков 8 (в данном случае 8 — также и минимальное число).



ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

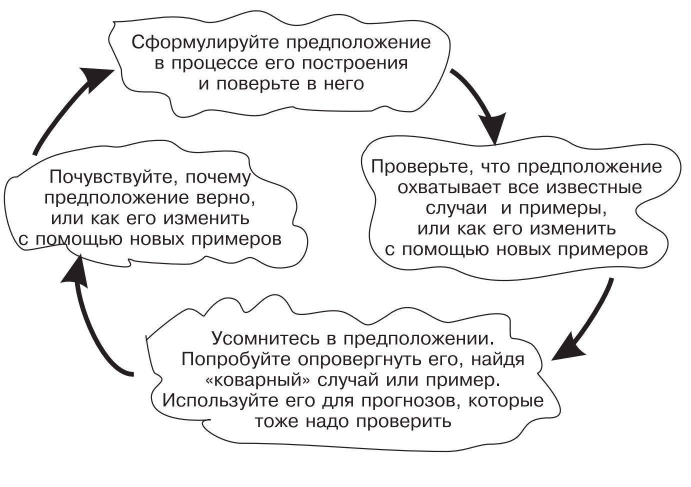
ЗАСТРЯЛИ?

– Опять-таки попробуйте на нескольких примерах.
– Почему вы уверены в том, что у вас максимальное число участков?
– Числа укладываются в модель?
– Проверьте ваши предположения на дальнейших примерах.
– Сколько раз пересекаются линии, соединяющие точки?
– Ставьте все под сомнение!

После первых пяти случаев, как правило, убеждаешься в том, что S точек дадут 2^{s-1} участков, а 6 точек должны дать 32 участка. Тогда начинаешь в муках искать 32-й потерянный участок, пока не примешь тот факт, что очевидная модель привела к ложному предположению. Вопрос, подобный этому, очень ценен, поскольку это удивление остается с вами, предостерегая от чрезмерной доверчивости.

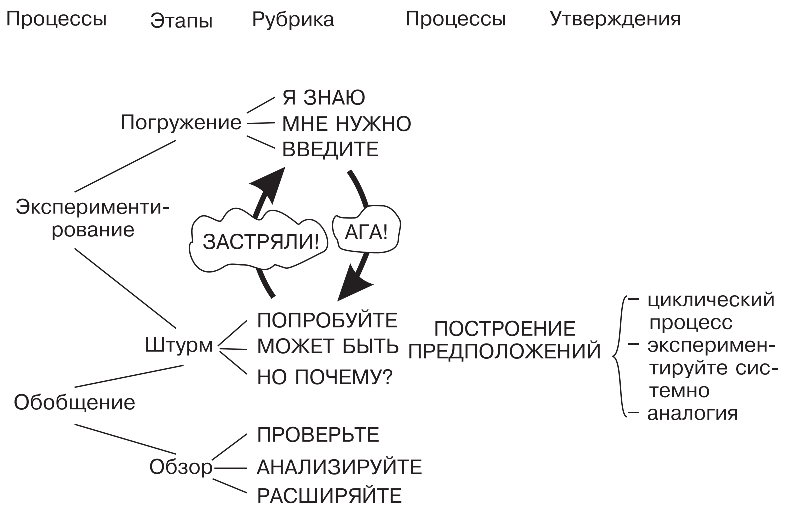
Выводы

Построение предположений — это узнавание зарождающегося обобщения. Как только начинают возникать предположения, они надвигаются, словно рой мотыльков, и упархивают, стоит к ним приблизиться. В этот момент целесообразно схватить несколько из них и вспомнить про цикличный процесс (см. схему).



Формулируя, проверяя и видоизменяя предположения, вы формируете «скелет» решения.

Поскольку построение предположений — это творческий процесс обобщения, нельзя полагать, что в результате системного накопления примеров тут же появится модель. Необходимо полностью погрузиться в вопрос и прочувствовать его. Может быть, вам придется реорганизовать конкретизацию и исследовать аналогии. Лучший способ расширения диапазона возможностей — это практика и изучение математических приемов. В конце концов, предположения всегда под подозрением! Вспомните «*Окружность и точки*»!



Следующие вопросы из главы 10 предоставят вам подобный опыт построения предположений:

«*Суммы квадратов*» (стр. 255),
«*Опять про мебель*» (стр. 237),
«*Опять последовательные суммы*» (стр. 237),
«*Равнина Налларбор*» (стр. 239),
«*Всем поровну*» (стр. 219).

См. главу 11, где есть другие вопросы, входящие в программу обучения

ГЛАВА 5

ШТУРМ: ПОДТВЕРЖДАЕМ И УБЕЖДАЕМ

В этой главе речь пойдет о двух видах деятельности: будем искать «почему» и будем его объяснять. Когда вы ищете причину, вы пытаетесь понять некое скрытое обоснование верности своего предположения. А когда вы объясняете причину, вы убеждаете самого себя и, что еще важнее, других, что можете доказать свою аргументацию. Объяснение причины по большей части основывается на математической структуре — важном понятии, которое скрывается за попытками объяснить, почему нечто может быть верным и по сути является развитием предположения.

Структура

Решая задачи из первых трех глав, мы искали ЧТО верно, формулировали это как предположение, а потом быстро переходили к поискам, ПОЧЕМУ это верно (или в некоторых случаях неверно!). Например, в «*Шахматных клетках*» возникавшие предположения быстро подтверждались нехитрыми арифметическими подсчетами. Однако довольно часто бывает и так: предположить «ЧТО» намного проще, чем искать «ПОЧЕМУ». Но еще труднее убеждать других. Два ярких примера, где «ПОЧЕМУ» остается в тени, несмотря на многочисленные исследования, — это «*гипотеза Гольдбаха*» (глава 4) и предлагаемый ниже крепкий орешек.

Итерации

Выберите любое целое число.

– *Если выбранное вами число четное, разделите его на два.*

– *Если выбранное вами число нечетное, умножьте его на три, прибавьте один и разделите на два.*

Продолжайте в том же духе с получившимся числом! Доберетесь ли вы в конечном итоге до единицы?

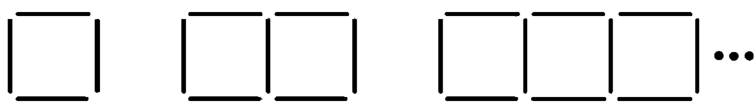
НЕ ТРАТЬТЕ НА ЭТО МНОГО ВРЕМЕНИ!

Известно, что вы в конечном итоге доберетесь до одного, если начнете с любого числа меньше 5 триллионов, вот, пожалуй, и все. Как и в случае с «*гипотезой Гольдбаха*», с помощью экспериментирования уже накоплен большой объем информации, и большинство людей убеждены, что предположения эти вполне достоверны. Однако никому еще не удалось предоставить убедительное доказательство, выдерживающее критическое исследование. Необходимы не просто примеры, а некая причина, какая-либо скрытая модель или структура для оформления аргументации.

Математики потратили уйму времени, пытаясь прояснить, что же они имеют в виду под структурой; на самом деле можно подразумевать под этим весь объем математических знаний. Было бы самонадеянным пытаться дать общее определение структуры, однако с помощью примеров вы почувствуете, что это такое.

Спички 1

Сколько спичек потребуется для того, чтобы сложить 14 квадратов подряд со стороной в одну спичку, как на следующей последовательности?



ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Наиболее очевидный способ — сосчитать количество спичек в каждом члене данной последовательности (системное экспериментирование), а потом искать модель в этих числах. Не требуется чрезмерных умственных усилий, чтобы заметить, что числа

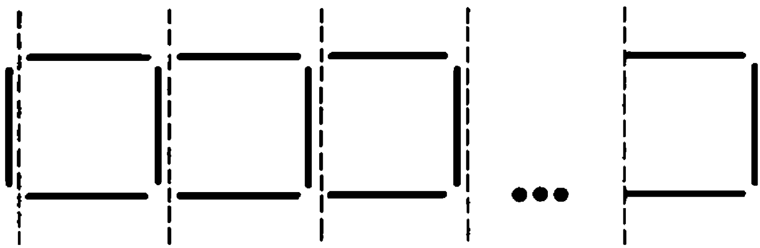
$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots$$

возрастают на три каждый раз. Итак, предположение ясно: не только в том, что на 14-й член потребуется 43 спички, но и в более общем виде — N-й член требует $3N + 1$ спичек. Чтобы подтвердить это предположение и убедить скептика, необходимо показать, почему

увеличение на 3

отражает то, что происходит со спичками.

Этот пример весьма очевиден, поскольку спички можно сгруппировать таким образом,

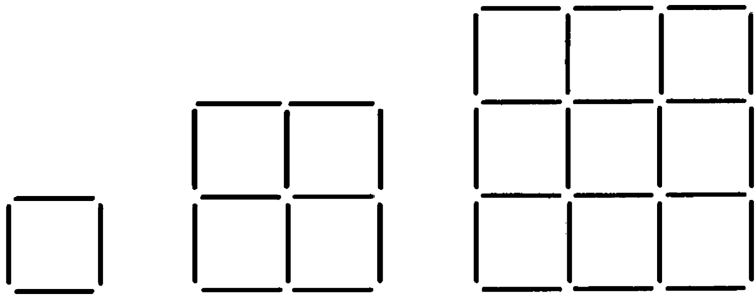


что показывает, что N-й член последовательности требует 1 спичку для начала, а потом N следующих групп по 3 спички, т. е. всего $3N + 1$. В результате у нас есть убедительный аргумент, поскольку он связывает предполагаемую формулу (что нам НУЖНО узнать) со *структурой* конфигурации спичек (что мы ЗНАЕМ).

Однако не стоит обманываться простотой этого примера, поскольку очень часто люди замечают числовую модель и ошибочно принимают свою предполагаемую модель за полностью подтвержденное решение. Попробуйте решить следующую задачу.

Спички 2

Сколько потребуется спичек, чтобы выложить N^2 единичных квадратов, как в такой последовательности?



ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Экспериментируйте, следуя системе.
– Сосчитайте спички!
– Разберите следующий пример. Ищите модель.
– Как вы считали спички? Обобщите!
– Попробуйте другие системные способы подсчета.

Если вы считали спички в каждой конфигурации, вы могли не распознать полученные числа. Однако, если посмотреть КАК вы считали спички, можно обобщить метод подсчета в N-й конфигурации. N-й член состоит из N^2 квадратиков.

У нас $N+1$ строк	по N горизонтальных спичек
и $N+1$ столбцов	по N вертикальных спичек,

что в сумме дает[1] $2N(N+1)$ спичек. В этом случае основывать предположение исключительно на числовой последовательности

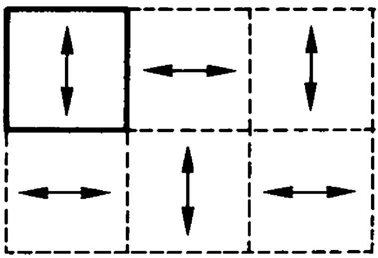
$$4,\ 12,\ 24,\ \ldots$$

довольно-таки сложно, но структура конфигураций из спичек вполне понятна. Итак, в данном случае структура, как я это показал, представляет то общее, что есть у спичек (горизонтальные и вертикальные ряды) и числовой модели, созданной по формуле $2N(N+1)$. О самой структуре говорить сложно, но у нее есть

[1]Скорее, у нас есть N строк по $N+1$ вертикальных спичек и N столбцов по $N+1$ горизонтальных. — *Прим. ред.*

два проявления — спички и формула. Формулу можно убедительно подтвердить, показав связь между методом подсчета спичек и методом построения формулы. Если в «*Спичках 1*» подтверждение основано на том, как переходить от одной конфигурации к следующей, то в «*Спичках 2*» оно основано на системном анализе одной конфигурации. Эти два метода очень распространены: итеративное или рекурсивное развитие одной конфигурации, выраженное через ранние члены последовательности, и прямой штурм общей конфигурации.

В обоих заданиях «*Спички*» структура была схвачена с помощью числовой модели, однако так бывает далеко не всегда. Решая «*Мебель*» (глава 4, стр. 95), я обнаружил структуру совсем иного рода. Используя стрелочку для обозначения направления, куда смотрит кресло в процессе его перемещения, и регистрируя его положение стрелочкой, я получил модель типа шахматной доски, где горизонтальные стрелки чередуются с вертикальными.

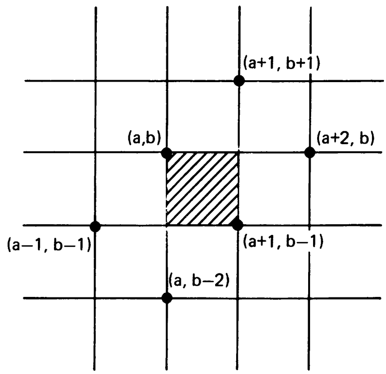


Все повороты кресла на 90° вокруг любого его угла сохраняют шахматную модель, таким образом, кресло не может в конечном итоге оказаться рядом с исходной позицией *и* смотреть в ту же сторону.

В процессе ОБЗОРА мне пришло в голову, нет ли другого подхода, кроме шахматной доски. Введя координаты и прослеживая перемещения одного угла кресла, памятуя о шахматной доске, я заметил, что независимо от того, куда перемещался угол кресла, сумма координат была всегда либо четной, либо нечетной — в зависимости от того, какой угол я отслеживал. Потом это наблюдение превратилось в более четкое и убедительное рассуждение.

Доказательство. Допустим, один угол кресла находится в точке (a, b). Единственно возможные положения, которые кресло может занять после одного поворота на 90°, — это

$$(a, b), \quad (a+1, b+1), \quad (a+2, b),$$
$$(a-1, b-1), \quad (a, b-2) \quad \text{и} \quad (a+1, b-1).$$



Все эти положения сохраняют четность или нечетность суммы координат. Однако в задаче спрашивается, можно ли поставить кресло в положение, которое изменит четность-нечетность суммы координат, а это невозможно.

Другой пример нечисловой структуры встретился в задаче «*Пятнадцать*» (глава 4, стр. 110), где магический квадрат[1] содержит всю информацию, необходимую для игры, и превращает работу с числами в позиционную игру.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Примеры данного раздела представляют собой лишь малую выборку обширного диапазона идей, которые охватывает понятие математической структуры. Более сложные примеры будут приводиться по мере того, как вы будете все глубже погружаться в мир математических идей. Важно запомнить, что предположение — это своего рода информированная догадка о возможной

[1] Сумма чисел каждой строки, каждого столбца и обеих диагоналей равна 15. — *Прим. ред.*

модели или регулярности, которые могут объяснить, ЧТО представляет трудность в том или ином вопросе. Как только вы формулируете предположение, вы начинаете его исследовать, чтобы понять, надо ли его видоизменить или его можно доказать. Это происходит в процессе поиска «ПОЧЕМУ». Характер «мне НУЖНО узнать» меняется от попытки сформулировать до попытки понять, почему предположение можно подтвердить, т. е.

от поиска «ЧТО»

до поиска «ПОЧЕМУ».

Ответ на «ПОЧЕМУ» — это структура, которая соединяет то, что вы ЗНАЕТЕ, с тем, что вы предположили. Ваше доказательство покажет, в чем эта связь состоит.

Ищем структурные связи

В этом разделе подробно прослеживается, каким образом использовать структуру, чтобы подтвердить предположение и убедительно объяснить, почему оно верно, т.е. доказать его. «*Спички 1*» и «*Спички 2*» иллюстрируют следующий факт: когда вы пытаетесь объяснить «ПОЧЕМУ», подтвердить предположение о том, ЧТО верно, как правило, есть два источника моделей. Один источник — это исходные данные, в этих случаях конфигурации спичек, что составляет то, что вы ЗНАЕТЕ. Второй источник содержится в вашем предположении, т. е. то, что вам НУЖНО подтвердить. Удовлетворительно решить задачу — это значит найти и четко сформулировать связь между скрытой моделью в том, что вы «ЗНАЕТЕ», и тем, что вам «НУЖНО узнать». Иногда ощущение общей модели возникает непосредственно из того, что вам НУЖНО узнать, как в случае с последовательностью

$$4, 7, 10, 13, \ldots$$

в «*Спичках 1*», а иногда появляется непосредственно из того, что вы ЗНАЕТЕ, как в «*Спичках 2*». Чаще оно возникает из их взаимодействия. Общая модель, связывающая ЗНАЮ и НУЖНО узнать, и есть структура. Формулируя связь, вы закладываете фундамент подтверждения предположения.

Мы преднамеренно выбрали простые примеры из «*Спичек*», но принцип остается один и тот же в любой задаче. Например, в «*Палиндромах*» (глава 1, стр. 23) в результате системного экспериментирования мы пришли к модели, в которой последовательные палиндромы отличаются на 110 или 11. Затем эту модель соотнесли с тем, что я ЗНАЛ о палиндромах, с помощью следующего наблюдения: чтобы перейти от одного палиндрома к следующему, вы либо

> увеличиваете и разряд десятков, и разряд сотен на один (прибавляете 110),

либо

> увеличиваете разряды единиц и тысяч на один и уменьшаете десятки и тысячи на девять (добавляете $1001 - 990 = 11$).

Подобным образом в «*Лоскутном одеяле*» (глава 1, стр. 31) после систематического экспериментирования я пришел к наблюдению, что двух цветов всегда будет достаточно (что мне НУЖНО). Это предположение было подтверждено с помощью алгоритма: прибавляем линии по одной и каждый раз изменяем окраску. Алгоритм зависел от двух структурных черт лоскутного одеяла (что я ЗНАЮ): 1) их можно образовать, добавляя каждый раз по одной линии, и 2) когда добавляется новая линия, каждый старый участок либо остается в неизменном виде, либо делится на две части. Обратите внимание: и «*Лоскутное одеяло*», и «*Палиндромы*» требуют больше, чем систематического экспериментирование. Необходимо различить некую модель (что мне НУЖНО) и соотнести ее со скрытой структурой (что я ЗНАЮ).

«*Окружность и точки*» (стр. 113) дает пример очевидной модели в числах, не отраженных в исходных данных. Правомерно сделать предположение, что последовательность

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$$

продолжится как степени 2, но степени 2 не входят в структуру участков. Найти модель в первых нескольких числах недостаточно, чтобы решить эту задачу, и это доказывает то, что недостаточно сформулировать вероятное предположение. Вы должны связать его со структурой исходных данных. Следующая задача иллюстрирует, что структурные связи часто встречаются в вопросах, основанных на счете.

Пчелиная генеалогия

Мужские пчелиные особи появляются на свет из неоплодотворенных яиц, и поэтому у них есть мать, но нет отца. Женские *пчелиные особи появляются на свет из оплодотворенных яиц. Сколько предков есть у мужской особи двенадцать поколений назад? Сколько из них мужских особей?*

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

Погружение

– Нарисуйте схему генеалогического древа.
– Не рисуйте все 12 поколений!

Штурм

– Ищите модель в числах и на схеме.
– Вы подтвердили свое предположение? Вам нужна прямая связь между тем, как растут числа, и тем, как растут поколения.

« *Пчелиная генеалогия*» интересна тем, что если вы знакомы с числами Фибоначчи

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots,$$

где каждый член равен сумме двух предыдущих, то вы быстро узнаете их в данном контексте и можете подумать, что, коль скоро вы их заметили, вопрос решен. Однако модель Фибоначчи остается предположением до тех пор, пока она не связана напрямую с данными, в нашем случае репродуктивными причудами пчел. Связь определяется по формуле

$$\begin{bmatrix} \textit{число пчелиных предков} \\ N+2 \\ \textit{поколений назад} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \textit{число пчелиных предков} \\ N+1 \\ \textit{поколений назад} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \textit{число пчелиных предков} \\ N \\ \textit{поколений назад} \end{bmatrix}$$

Попробуйте проверить эту формулу

Как только вы сформулируете структурное соответствие, найти необходимый ответ для 12 поколений назад — это уже вопрос прямого вычисления. Вы можете предположить «ответ» с помощью чисел Фибоначчи, однако вы не можете быть уверены в своем ответе, пока не определите связь (вспомните «*Окружность и точки*»).

Структурные характеристики задач, основанных на подсчете, почти всегда такие же, как и в «*Пчелиной генеалогии*». Модель в предметах, которые считают, отражается моделью в соответствующих числах. Часто, стоит вам заметить модель в числах, как вы понимаете, какие модели надо искать в самих предметах, иногда обращаясь к другой задаче на счет, где возникают те же числа. Структура в следующем вопросе намного сложнее, но опять-таки модели в том, что ИЗВЕСТНО, отражают модели в числах, которые НУЖНО найти.

Разбиение квадрата

Число N называется «хорошим», если квадрат можно разрезать на N не налагающихся друг на друга квадратов[1]*. Какие числа «хорошие»?*

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

Погружение

– Что значит «разрезать»?
– Попробуйте на простых примерах.

Штурм

– Рассмотрите достаточное число конкретных случаев, чтобы сделать предположение.
– Вы допускаете что-либо о квадрате, чего нет в условии?

[1]Пересекающихся только по ребрам или вершинам. — *Прим. ред.*

– Начните с какого-то разбиения и разрежьте один из квадратов.
– Начните с квадрата и постройте вокруг него другие.

Если вы разобрали много примеров, то убедили себя, что числа вроде

$$4,\ 9,\ 16,\ \ldots$$

хорошие. Если вы обратили внимание на то, что в задаче не говорится о том, что все квадраты должны быть одинакового размера, то можете обнаружить, что

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots\ —$$

тоже хорошие. Но есть ли другие хорошие числа? Я ЗНАЮ, что любое разбиение содержит хотя бы один квадрат, тогда как мне расположить вокруг него несколько других? Если вам повезло, то вы обнаружили, что

$$6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots$$

тоже хорошие; таким образом, подытожив информацию, получаем, что

$$1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots$$

все хорошие.

Иными словами, пожалуй, можно предположить, что все числа, кроме 2, 3 и 5, хорошие. Но можете ли вы убедить себя, что, скажем, число 1597 хорошее? Итак, вы ищете структуру, которая позволяет вам со всей уверенностью утверждать, что все числа больше 5 хорошие.

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

Штурм

– Если число K хорошее, то какие числа больше K тоже хорошие?
– Попробуйте атаковать один из ваших K квадратов.
– Какой вывод можно сделать на основании того, что 6, 7 и 8 — хорошие числа?

Расширение

– В трехмерной версии используются кубы и получаются «очень хорошие» числа.

Предполагается, что все числа больше 47 «очень хорошие», но в данный момент нам мало что известно.

Идея создать сложный случай из предыдущих случаев упоминалась ранее, и «*Разбиение квадрата*» — как раз подходящий вариант для такого подхода. Один из основных методов построения алгоритмов для разрезания квадратов на квадраты — это рассечь один из K квадратов на 4, получив в результате разбиение на $K+3$ квадрата[1]. Таким образом, если K — хорошее число, то и $K+3$ — тоже хорошее, и, коль скоро я знаю, что 6, 7 и 8 хорошие, то и любое другое большее число тоже хорошее, поскольку мы используем одну и ту же идею. Ряд Фибоначчи, который встретился в «*Пчелиной генеалогии*», аналогичен тем, что каждый данный член представляет собой сумму двух предыдущих. Зачастую конкретные члены последовательности неизвестны, но можно найти схему построения, которая некоторым регулярным образом соотносит каждый член с предыдущими. Если перед математиками стоит задача найти общую формулу и при этом довольно часто возникает одна и та же схема построения, следует обратить внимание на то, чтобы найти общие методы преобразования схем построения в формулы. В результате такого обобщения метода разрастается древо математических теорий.

«*Разбиение квадрата*» завершает примеры, иллюстрирующие структуру и ее роль в подтверждении предположений. С точки зрения структуры особенно интересны задания из главы 10, например «*Многоугольные числа*» (стр. 243) и «*Чашки из упаковки*» (стр. 221).

Когда предположение доказано?

Важно осознавать, что большинство предположений неверны, и именно они и представляют наибольшую ценность. Несмотря на явное противоречие в данном утверждении, путь к правильному варианту решения, как правило, изобилует неверными шагами,

[1] Добавить 4 квадрата и отнять 1. — *Прим. ред.*

частичными или ошибочными догадками и попытками сформулировать, что же с вашей точки зрения является верным. В предыдущих главах есть несколько тому примеров, а именно:

– «*Палиндромы*» (глава 1, стр. 23): ложное предположение, что повторным прибавлением 110 к 1001 можно получить все палиндромы;
– «*Шустрые тосты*» (глава 2, стр. 61): поначалу большинство людей делают неверное предположение;
– «*Покрашенные покрышки*» (глава 4, стр. 94): возникает два вероятных, но противоречащих друг другу предположения.

В каждом случае нельзя было не ПРОВЕРИТЬ предположение, поскольку в процессе проверки выявляются ошибки и возникают лучшие предположения. Проблема в том, что, если разумное предположение возникает после длительных усилий, оно представляется настолько верным, что трудно в него *не* поверить. Слишком много эмоциональной энергии в него вложено. В результате в процессе ПРОВЕРКИ очень просто быть недостаточно критичным. Тогда как же можно быть уверенным в том, что предположение адекватным образом проверено и подтверждено? Краткий ответ таков: абсолютно уверенным в этом можно быть редко. История математики изобилует ложными доказательствами. Однако *можно* научиться быть критичным и извлекать из этого пользу и позитив.

Как было сказано в предыдущем разделе, доказательство предположения — это обнаружение скрытой структуры или взаимоотношения, связывающего я «ЗНАЮ» с «мне НУЖНО узнать». Как только вы подумаете, что нашли эту связь, необходимо ее сформулировать ясно и точно. Как и предположения относительно «ЧТО», предположения относительно «ПОЧЕМУ» могут претерпевать несколько изменений, и я рекомендую три этапа:

убедите себя,
убедите друга,
убедите скептика.

Первый шаг — это убедить самого себя. К сожалению, это не так сложно!

Второй шаг — убедить друга или коллегу. Для этого необходимо сформулировать и облечь в конкретную форму то, что кажется вам очевидным, чтобы у вашего друга были убедительные причины понять, почему то, что вы говорите, верно. В таком случае часто помогает изложить вашему другу наиболее яркие примеры из экспериментирования, чтобы и у него был подобный опыт. Разумеется, одних примеров недостаточно. Они могут убедить вашего друга, что ваши утверждения вероятны, однако вы должны подтвердить каждый шаг вашей аргументации. Например, недостаточно сказать о «*Гипотезе Гольдбаха*« или «*Итерациях*»:

«Разберите много примеров — и вы убедитесь».

Вы должны установить закономерные связи, которые свидетельствуют о том, что ваше предположение верно.

Даже если вы убедили вашего друга, все равно этого мало! Третий шаг состоит в том, чтобы убедить того, кто сомневается в каждом вашем высказывании. Мне нравится для усиления использовать слово «противник». Научиться играть роль собственного противника — исключительно важный навык, хотя бы потому, что рядом с вами в нужный момент может не оказаться подходящего противника!

Чтобы понять, как работает внутренний противник, вспомните «*Лоскутное одеяло*» из главы 1. В результате исследования мы сделали предположение относительно «ЧТО»:

двух цветов всегда достаточно.

Было сделано несколько попыток найти правило для раскрашивания любой диаграммы всего двумя цветами, было сделано и отвергнуто несколько предположений. Все они пытались «докопаться» до «ПОЧЕМУ». В результате систематического экспериментирования на маленьких диаграммах постепенно появился метод, который, КАЗАЛОСЬ, работает:

когда добавляется новая линия, некоторые из старых участков (лоскутов) разделяются на две части. Оставляйте все *участки (новые и старые) по одну сторону новой линии в том же цвете, что и раньше. Меняйте цвета по другую сторону.*

Мы еще не получили полный ответ на вопрос «ПОЧЕМУ», поскольку он трансформировался из

«ПОЧЕМУ *двух цветов достаточно?*»

в

«ПОЧЕМУ *этот метод работает?*»

Мое объяснение другу могло быть примерно таким:

Весь квадрат раскрашен правильно, поскольку участки, смежные по новой линии, были специально раскрашены разным цветом, а смежные по старым линиям были ранее раскрашены по-разному и поэтому остаются раскрашенными по-разному.

Большинство друзей были бы убеждены, но противнику этого было бы мало. Перечитывая это объяснение, у меня внутри мог бы произойти следующий диалог: внутренний противник — как скептик

Противник: Почему участки, смежные по новой линии, раскрашены по-разному?

Я: До того как была добавлена новая линия, эти участки были частями одного целого, поэтому они одного и того же цвета. Теперь одна часть лежит по обе стороны новой линии, поэтому они будут раскрашены по-разному.

Противник: Но в результате смены цвета два смежных участка могли бы оказаться одинаковыми.

Я: Нет, новая линия разрезает старые участки на два.

Противник: Откуда ты знаешь, что участки, смежные по старой линии, будут раскрашены по-разному? Разве они не могут перепутаться с новой линией?

Я: Потому что они были раскрашены по-разному с самого начала, и они оба либо не менялись, либо менялись.

Противник: Откуда ты знаешь, что они оба не менялись или менялись?

Я: Потому что, будучи смежными по старой линии, они не могут быть по разные стороны новой линии.

Противник: Почему?

Я: Чтобы быть по обе стороны двух линий, два участка могут лишь соприкасаться в одной точке. Они не могут быть смежными.

Внутренний противник всегда готов продолжить нескончаемый поток «ПОЧЕМУ», такой скептицизм не помощник. Хочется думать, что, судя по его вопросам, противник не слишком умен или, во всяком случае, редкий зануда, но на самом деле его вопросы отнюдь не глупы, если вы на самом деле сомневаетесь в том, как плоскость делят на участки прямые линии. Его вопросы подобны тем, что задают по поводу «очевидного» обобщения, а именно: любая кривая на плоскости, не пересекающая саму себя, конец которой совпадает с ее началом, должна, как и линия, делить плоскость на два участка. Задавая все эти «ПОЧЕМУ», математики пришли ко многим интересным мыслям и новому ракурсу (под названием «топология»), проливающему свет на многие разделы математики.

Полезен тот вопрос, который указывает на конкретное слабое место. Тем не менее вопросы могут возникать довольно долго, возвращая меня к основным принципам относительно прямых линий и участков. Надо положить им конец, но где именно, сказать трудно. Изъяны в общепринятых аргументах часто появляются именно тогда, когда задают больше чем обычно пресловутые «ПОЧЕМУ», что дает стимул для появления новых математических идей и взглядов.

«*Лоскутное одеяло*» — хороший пример, поскольку там есть «родственный» вопрос:

сколько цветов нужно, чтобы раскрасить любую карту таким образом, чтобы два любых участка, смежные по краю (а не только в нескольких точках), были раскрашены разным цветом?

В девятнадцатом веке было высказано предположение, что достаточно четырех цветов, и один аргумент продержался в течение многих лет, пока не сделали попытку его обобщить и обнаружили изъян. Только через столетие наконец-таки появилось доказательство, но оно состояло из стольких шагов, что для их выполнения был необходим компьютер, в результате чего возникли новые вопросы относительно того, как проверить верность столь длинного доказательства. Ведь в компьютерной программе тоже могла быть ошибка или ложное допущение. В таком случае у противника есть чем заняться, но принцип остается все тем же: поставить под сомнение аргументацию и искать недостатки или невысказанные допущения.

Может показаться, что предписание

убедить противника

несколько странное и, пожалуй, излишнее. Однако оно точно отражает, каким образом научное содружество воспринимает новые математические результаты. Следуя догадке, формулируют доказательство и излагают его на бумаге или устно коллеге. Несколько версий спустя, удалив слабые места, можно опубликовать научный труд. Эту версию критическим оком изучает хотя бы один специалист в этой области (противник!). Каждая версия становится все более отвлеченной и формальной, пытаясь быть точной и свободной от скрытых допущений неформального языка, в результате чего бедный читатель все больше напрягается, силясь расшифровать первоначальную догадку и понять, что происходит. Как только опубликованные заметки убеждают математическое сообщество, оно «дает добро». И, тем не менее, порой случается так, что доказательство опубликовано и принято, а годы спустя обнаруживается ошибка или невысказанное допущение.

Воспитываем внутреннего противника

Не такое это простое дело — найти подходящего противника, который терпеливо и критически посмотрит на вашу работу, поэтому не помешает научиться играть эту роль самому. Во-первых, вам не придется искать противника среди своих знакомых, а во-вторых, скептик внутри себя может сыграть важную роль в различных аспектах математического мышления. В главе 7 об этом пойдет речь в более широком контексте, а сейчас вы узнаете, как стать самому себе лучшим противником. Есть три полезные привычки, которые разовьют и укрепят в вас внутреннего противника или скептика.

1. Возьмите за правило относиться к утверждениям как к предположениям. В результате вы станете видеть математику не как предмет, где все верно или неверно, а как науку видоизменять и проверять, пока не найдете убедительное доказательство.
2. Возьмите за правило испытывать предположения на прочность, пытаясь их не только доказать, но и опровергнуть.
3. Возьмите за правило относиться к доказательствам других критически (но позитивно). Это поможет вам в полной мере оценить необходимость ПРОВЕРКИ, поскольку изъяны в доказательстве легко и не заметить, особенно если оно ваше.

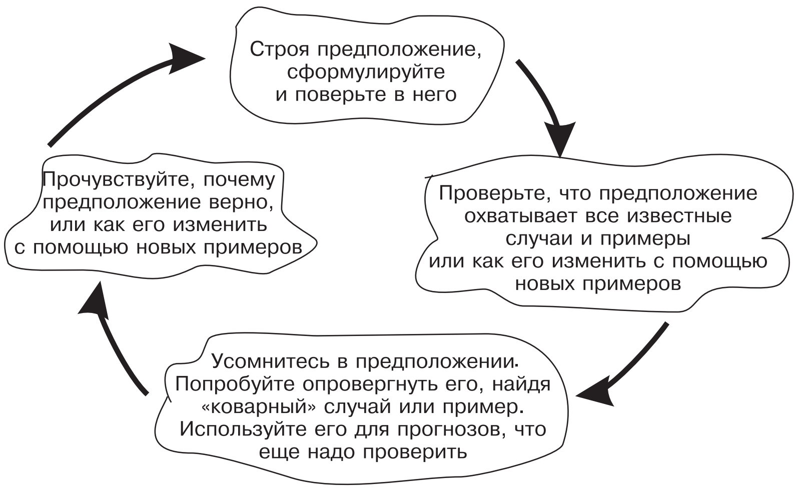
Научиться сомневаться в предположениях и пытаться опровергнуть их каверзными примерами не так абсурдно, как может показаться, но и не так просто. Когда в главе 4 речь шла о построении предположений, вы узнали, что это часть цикличного процесса.

Ставить под сомнение свои предположения нужно не только для того, чтобы убедиться в их ошибочности. Конечно же, ошибки там могут быть, но, именно пытаясь найти в них слабые места, вы начинаете понимать, *почему* предположение неопровержимо, а значит, должно быть верным. Любопытно, что вера и сомнение несут совершенно разные перспективы. Иногда поиски причины, почему то или иное утверждение верно, не приводят ни к чему, а попытки опровергнуть его могут выявить, что происходит. Нечто подобное случилось со мной, когда я думал над «*Покрашенными покрышками*» (глава 4, стр. 94). Я не мог понять, ПОЧЕМУ след будет один. И лишь тогда, когда я сознательно попытался поставить это под сомнение и начал вычислять расстояние между следами передней и задней покрышки, я сдвинулся с мертвой точки.

Если же попадаются на редкость крепкие орешки, математики следуют многовековому совету:

> *По понедельникам, средам и пятницам считайте, что это верно. По вторникам, четвергам и субботам считайте, что неверно. По воскресеньям занимайте нейтральную позицию и ищите другой подход!*

В том, что необходимо чередовать веру и сомнение, вам поможет убедиться салонная игра викторианской эпохи.



Эврика!

Один из играющих[1] *записывает*[2] *правило образования трехчленных числовых последовательностей и дает один пример, подтверждающий это правило. Остальные предлагают свои варианты трехчленных последовательностей и получают ответ «да» или «нет» в зависимости от того, отвечают ли правилу их примеры. Все показывают свои варианты. Если кто-то из играющих думает, что знает правило, он кричит* ЭВРИКА! *Потом все дают новые примеры числовых последовательностей с целью разгадать правило.*

Предостережение: игра получается, только если ведущий выбирает очень простые правила!

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

[1] Ведущий. — *Прим. ред.*

[2] В тайне от других игроков. — *Прим. ред.*

Любимый пример Питера Уэйсона (Wason and Johnson-Laird, 1972), который записал игру в этом формате, — это 2, 4, 6. Итак, это наводит мысли на некоторые правила, причем все эти правила соответствуют одной и той же последовательности, но *не являются* его правилом. Например:

> 3 последовательных четных числа;
>
> 3 четных числа в возрастающем порядке;
>
> 3 числа, сумма которых 12;
>
> 3 числа в возрастающем порядке, по крайней мере два (одно) из которых должны быть четными.

Единственный способ испытать эти предполагаемые правила — это попробовать их *опровергнуть*, предложив последовательности, которые этому предполагаемому правилу не отвечают, чтобы понять, что настоящему правилу они тоже не отвечают. Большинство людей всего лишь предлагают примеры, подтверждающие их правило, и поэтому у них нет ни малейшей возможности обнаружить, что их правило неполное. Таким образом, предположив

> 3 четных числа,

важно предложить последовательности, которые
не являются тремя последовательными четными числами, наряду с теми примерами, подтверждающими предполагаемое правило. Правило, которое использует Питер Уэйсон, не является ни одним из указанных выше, но любые три последовательных четных числа этому правилу отвечают. Чтобы быть успешным в этой игре, необходимо узнать и четко сформулировать свое предположение, а потом систематически проверять все его детали, в данном случае хотя бы четность и возрастающий порядок. С такой стратегией опровержение поможет найти другое, лучшее предположение.

Одна из важных черт «*Эврики!*» состоит в том, что, пока ведущий не подтвердит ваше предполагаемое правило, вы не можете быть до конца уверены в том, что оно верно. Дело в том, что в «я знаю» (скрытое правило) нет опознаваемой структуры, и нет контекста для правила, которое вы пытаетесь обнаружить. Например, правило

> 3 четных числа, кроме тройки (22222, 44444, 66666),

вряд ли кто обнаружит! Все говорит в пользу правила

3 четных числа,

и вы делаете неотразимое предположение, но, тем не менее, неверное! В результате игра становится подобной научному исследованию, в котором «законы природы» всегда остаются всего лишь предположениями.

Хороший способ отточить свои критические таланты — это посмотреть на аргументы других и попытаться решить, убедили ли они вас. «*Итерации*» (стр. 116) предоставляют вам такую возможность.

Один человек заметил, что все, что необходимо (МНЕ НУЖНО), — это показать, что начиная с числа N в конечном итоге получится число меньше N (поскольку, в конце концов, мы дойдем до 1).

Рассуждение началось с наблюдения, что все числа либо четные, либо на один больше кратного 4, т.е. $(4M+1)$ или на один меньше кратного 4 т. е. $(4M-1)$. Затем рассуждение продолжилось следующим образом.

> Если N четное, то следующее за ним число меньше.
>
> Если N имеет вид $4M+1$, то получается $6M+2$ (что есть четное), потом $3M+1$, что меньше $4M+1=N$.
>
> В противном случае N имеет вид $4M-1$, что ничего нам не дает.

ЗАСТРЯЛИ!

Другой человек заметил, что полезно разложить M в произведение степени 2 и нечетного числа P. Тогда $4M-1$ равно $P\times 2^T-1$, где T — по крайней мере 2. Исходя из этого следующая итерация определяется таким образом:

> $3N=3(P\times 2^T-1)=3P\times 2^T-3$ (обратите внимание: $3P$ — нечетное),
>
> $3N+1=3P\times 2^T-2$,
>
> $(3N+1)/2=(3P\times 2^T-2)/2=3P\times 2^T-1-1$, что является следующей итерацией.

Поскольку $3P$ — число нечетное, полученное число имеет вид[1] $4M-1$, если $(T-1)>1$. В противном случае оно имеет вид[2]

[1]Но показатель степени двойки станет на 1 меньше. — *Прим. ред.*

[2]Так как $3P$ — число нечетное, то его можно представить в виде $3P=2k+1$, значит, $3P\times 2-1=(2k+1)2-1=4k+1$. — *Прим. ред.*

$4M + 1$. Другими словами, после $T - 1$ итераций из числа вида $4M - 1$ можно получить число вида $4M + 1$.

ЧТО ВЫ ДУМАЕТЕ? (И ПОЧЕМУ)

ЗАСТРЯЛИ?

– Вы проверили два промежуточных аргумента?
– Вы сформулировали, что они показывают, своими словами?
– Как два результата дополняют друг друга? А дополняют ли?

Если вы увлечены в тот момент, головокружение от близости успеха может побороть внутреннего противника. Все догадки и озарения нужно ПРОВЕРЯТЬ!

Вариант решения

Согласно первому результату числа вида $4M+1$ уменьшаются, однако необязательно сохраняют вид $4M + 1$. Согласно второму аргументу числа вида $4M + 3$ в конечном итоге принимают вид $4M + 1$, однако в процессе могут становиться все больше и больше, поэтому неясно, что каждое число в конечном итоге становится меньше *и* имеет вид $4M + 1$. Однако это подсказывает дальнейшие направления штурма, поскольку то, что мне сейчас требуется (МНЕ НУЖНО), — это показать, что каждое число вида $4M + 1$ в конечном итоге становится меньшим числом этого вида. К сожалению, это, пожалуй, ничуть не проще исходного вопроса; на самом деле это суть вопроса. Тем не менее из неуверенных попыток вроде этих возникают промежуточные цели и новые вопросы. Может быть, будучи более конкретным по сравнению с исходным вопросом, один из них приведет к варианту решения. Иногда вопросы порождают такую длинную цепь дополнительных и видоизмененных задачек, что исходный вопрос выходит из фокуса и забывается!

Как только вы вырастите внутреннего противника, он будет вам очень полезен не только для подтверждения предположений, но и на других этапах мыслительного процесса, потому что скрытые допущения могут препятствовать продвижению вперед как на этапе погружения в вопрос, так и во время штурма. В «*Эврике!*» поиск скрытых допущений подразумевает следующее: необходимо заметить, что все начинают с того, что допускают, что искомое правило включает четные числа, и надо поставить под сомнение, существенна ли на самом деле четность. В «*Разбиении квадрата*» необходимо заметить, что нигде не оговорено, что квадраты должны быть одинакового размера. Как только вы увидите скрытые допущения, они становятся абсолютно понятными, но пока они не выявлены, они упрятаны очень глубоко! Приведу хрестоматийные примеры, где скрытые допущения, как правило, тормозят, а то и вовсе сбивают с пути мыслителя.

Скрытые допущения

1. *Соедините девять точек в квадрате 3 на 3 четырьмя последовательными прямыми линиями, не отрывая карандаша от бумаги.*
2. *Трое мужчин хотят переправиться через реку. Они встречают двух маленьких мальчиков на самодельном плоту. Плот может выдержать только одного взрослого или двух мальчиков. Смогут ли мужчины переправиться на другой берег?*
3. *Сделайте четыре равносторонних треугольника из шести спичек.*
4. *Какое минимальное число спичек нужно, чтобы сделать шесть квадратов?*
5. *Какое минимальное число равносторонних треугольников нужно, чтобы построить плоское круговое кольцо? (Треугольники должны быть «склеены» сторонами.)*

Эти головоломки на самом деле выносят мозг, и, когда решение наконец-то найдено, возникает ощущение типа «*Как?! Не может быть!*», т.е. вам кажется, что вас надули! Сила подобной реакции говорит о том, насколько хорошо было запрятано скрытое допущение.

Обратите внимание на различие между скрытым допущением и предположением. Предположения — это высказанные догадки, которые могут быть верными или неверными. Скрытые допущения — это невысказанные ограничения, которые могут блокировать продвижение вперед именно потому, что им не придали значения.

Выводы

Часто бывает достаточно просто предположить «ЧТО», но не так просто понять «ПОЧЕМУ». Ответить на все «почему» — значит предоставить подтверждение всем высказываниям, которое убедит самого критично настроенного читателя. Чтобы добиться этого, как правило, требуется сильное ощущение некоторой скрытой структуры, связи между «ЗНАЮ» и «НУЖНО УЗНАТЬ». Доказательство — это формулирование этой связи. Проверить доказательство, чтобы понять, убедительно ли оно, бывает чрезвычайно трудно. Необходимо развить здоровый, позитивный скептицизм относительно своих собственных предположений, активно искать примеры, опровергающие предположение, и научиться быть критичным как к своим аргументам, так и к аргументам других. О трех уровнях убеждения:

убедить себя,
убедить друга,
убедить противника,

речь пойдет в главе 7, где вы познакомитесь с понятием «внутренний монитор», который включает и внутреннего противника.

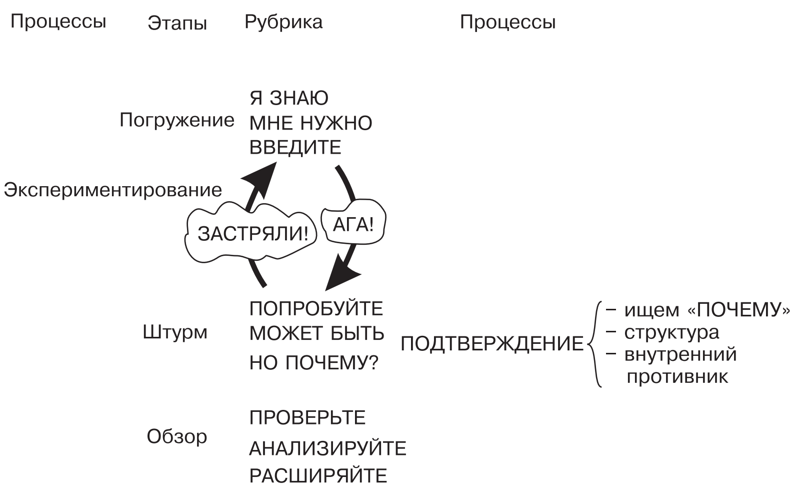


Схема показывает, как эта глава согласуется с предыдущими.

Чтобы попрактиковаться в убеждении и подтверждении, предлагаю вернуться к паре вопросов из предыдущих глав, где у вас была возможность предположить «ЧТО», но еще не было возможности дать ответ «ПОЧЕМУ». Попробуйте снова, на этот раз ищите скрытую структуру в форме связей между «ЗНАЮ» и «НУЖНО УЗНАТЬ». Можете также поломать голову над следующими вопросами из главы 10:

«*Монеты Кэти*» (стр. 231),
«*Лиувилль*» (стр. 233),
«*Переворачивание чашек*» (стр. 221),
«*Многоугольные числа*» (стр. 243),
«*Клетка с молоком*» (стр. 235),
«*Четырехугольники в треугольнике*» (стр. 245).

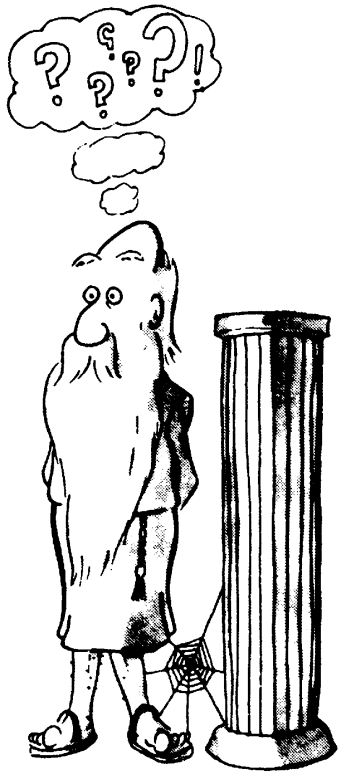
См. главу 11, где есть другие вопросы, входящие в программу обучения.

Справочная литература

Wason, P.C. and Johnson-Laird, P.N. (1972) *Psychology of Reasoning*. London: Batsford.

ГЛАВА 6

ВСЕ ЕЩЕ В ТУПИКЕ?



Эта глава о том, как подготовить себя к настоящему мыслительному процессу, который происходит, когда все советы, предложенные в предыдущих главах, исчерпаны. Ваш вопрос перерос в проблему. Если вы намереваетесь продолжать, будьте готовы к длительным периодам, когда, как может показаться, ничего не происходит. Однако на самом деле мыслительный процесс продолжается, только в подсознании. Чтобы от этого процесса была польза, можно кое-что предпринять!

Что происходит, когда вы воспользовались всеми предложениями из предыдущих глав и, тем не менее, все еще пребываете в тупике? Вы выполнили все возможные вычисления, рассмотрели массу конкретных примеров, следуя жесткой системе, проверили, нет ли в работе ошибок, а что потом?

Вот теперь настал черед заняться настоящим мышлением. Ваш вопрос на самом деле превратился в проблему! И не вы вгрызаетесь в вопрос, а проблема грызет вас изнутри. Прежде чем подробно рассмотреть, что в таком случае происходит, для начала необходимо убедиться в том, что вы следуете всем советам, предложенным в предыдущих главах. Например, порой люди не пытаются выполнять вычисления, даже если все остальные подступы закрыты. Если вы работаете над трудной задачей, нельзя обойтись без трудоемкого экспериментирования, разумеется, не ради самого процесса, а для того, чтобы найти модель.

Если вы не уклонялись от экспериментирования, то в любой момент можете оказаться перед следующим выбором. Вы можете

– отказаться от решения задачи;
– отложить ее на время или продолжить работу.

Если у вас на самом деле есть подобный выбор, к решению нужно подходить со всей серьезностью. Очень часто случается так, что вы отвлекаетесь на что-нибудь и забываете о вопросе или, напротив, вопрос не отпускает вас! Если вы решаете забросить этот вопрос, то так тому и быть. Хотя он может затаиться внутри вас и потом выскочить наружу, когда подвернется новый факт или аналогичный вопрос в другом контексте. Однако если некая внутренняя сила не дает вам отпустить вопрос, тогда необходимо предпринять какие-либо действия, чтобы избежать бесконечного повтора бесплодных мыслей.

Теперь вы должны действовать осторожнее — включите режим активного ожидания. Для этого этапа подойдут три вида деятельности:

– дистиллировать проблему до острого вопроса;
– обдумывать в деталях и
– более экстремально экспериментировать и обобщать.

Дистилляция и детальное обдумывание

Одна из характеристик активной или сложной проблемы — это то, что ее дистиллировали до концентрированной сути, которую удобно держать в голове. Цель экспериментирования заключается в создании яркого ощущения того, в чем состоит *реальная* проблема, и, пока вы мысленно не оценили ее, она не готова для детального обдумывания. Привести конкретный пример такого состояния трудно, поскольку в значительной мере это зависит от вашего прошлого опыта и уровня знания математики. Может быть, один из предыдущих вопросов, например «*Последовательные суммы*» (глава 4, стр. 97), привел вас в такое состояние, что, сформулировав и переформулировав вопрос и изменив его форму, вы пришли примерно к такой мысли:

> «Какое свойство объединяет все числа, которые могут быть последовательной суммой только одним способом, двумя способами, ...?»

или

> «Какое свойство есть у степеней 2, которое не позволяет им быть суммой последовательных положительных чисел?»

Если у вас не было подобного опыта, рассмотрите классический пример, который может потребовать детального обдумывания.

Обрезанная доска

С шахматной доски удалили два противоположных по диагонали угла. Можно ли покрыть обрезанную доску костяшками домино, каждая из которых покрывает две клетки?

застряли?

– Вы уже достаточно поломали голову над этой задачкой? Попробовали с досками меньшего размера?

В определенный момент вы можете прийти к заключению, что это невозможно, но еще не в состоянии понять почему. Перечитав вопрос, вы с удивлением заметите, что шахматная доска сама по себе не имеет никакого значения. Встает настоящий вопрос: что общего у шахматной доски и домино? Вот что подразумевается под дистилляцией!

«*Обрезанная доска*» — отличный пример вопроса, который полностью непрозрачен, пока вы не поймете сами или вам не выскажут эту мысль, после чего все кажется очевидным. В сущности, на это не стоит тратить слишком много времени, так что далее предлагаю подумать вот над чем:

> Какого цвета обрезанные клетки?
>
> Как каждая костяшка домино связана с цветами?

Если вы не видели этого раньше и не додумались использовать краски, то ваши ощущения можно выразить примерно так: «Нет, только не это!» Или «Ну, конечно же!» Это похоже на трюк, однако, если эта же мысль приходит к вам без посторонней помощи, то это воодушевляет: АГА! В этот момент я озабочен подготовкой к грядущей догадке, а не трюками, однако стоит обратить внимание на то, что идея с красками — это не просто трюк, поскольку ее можно обобщить разнообразными способами для решения вполне определенного типа задач (помните «*Мебель*» в главе 4?). Как только появилась идея с раскрашиванием и вы отметили ее как ключевую на этапе обзора, считайте, что она стала вашим ресурсом для решения других задач. Внезапно вы обнаруживаете схожесть с «*Обрезанной доской*» или «*Мебелью*», и неожиданно всплывает на поверхность идея с красками. Если вам нужен еще один пример, пожалуй, самое время заглянуть в главу 10 и заняться «*Монетами Кэти*» (стр. 231).

Есть целый ряд полезных занятий, приводящих к дистилляции проблемы, причем все они по сути представляют собой вариации на одну и ту же тему. Цель состоит в том, чтобы предельно ясно и кратко сформулировать суть проблемы кому-нибудь еще. Я неоднократно замечал, что в процессе объяснения своей проблемы другому внезапно понимаю, что именно мне мешает, даже если мой слушатель не вымолвит ни единого слова! Да, от меня требуются усилия, чтобы разобраться, в чем дело, и постараться донести это до своего друга. Если друга в нужный момент поблизости не окажется или перед тем, как отправиться к кому-либо за советом, стоит записать все, что вы знаете об исходном вопросе, равно как все экспериментирование, предположения и контрпримеры. Запись облегчает проверку и поиск ошибок и пропусков (представьте себе, даже у знатоков математики промашки случаются намного чаще, чем многие готовы допустить!) и обладает еще одним преимуществом. Если возникнет необходимость или желание отложить вопрос, со временем будет удобно заняться им вновь. Вот почему полезно использовать РУБРИКИ: потом у вас не будет трудностей при восстановлении хода ваших мыслей.

Запись на стадии дистилляции представляет собой занятное сочетание двух типов, введенных в предыдущих главах: беглый комментарий с помощью РУБРИК и отшлифованный отчет в обзоре. Как и при записи с РУБРИКАМИ, необходимо фиксировать и неудачные попытки — чтобы потом не пришлось тратить время на них снова. С другой стороны, каждое направление мысли нужно представить в максимально отшлифованном и сжатом виде, выразить логически и внятно, обозначив каждое допущение. Помните: вы делаете это для себя, а не для кого-то еще. Этого требует задача!

Когда вы записали все, что вам известно, нашли слушателя (необязательно) и, что самое главное, дистиллировали основной вопрос, наступает черед детального обдумывания. Хотя внешних признаков продвижения вперед нет, перспективы не так и плохи, поскольку к этому моменту задача стала вам настоящим другом, как мелодия, которая приходит вам на ум в минуты отдыха, порой вытесняя все прочие ваши фантазии! Штурм превращается в выжидательную игру, вы ждете свежей мысли или догадки. Это не пассивный процесс, но и активным процессом в прямом смысле его назвать нельзя. Скорее, это ловкое балансирование между деланием и неделанием. Погоня за догадкой, или озарением, и утомляет, и воодушевляет одновременно. Если вам нужна на самом деле новая мысль, то не надо упрямо держаться за старые: это может помешать вам, блокируя другие возможности. Разумеется, знать наверняка, что старая идея не сработает, заранее нельзя, поэтому всегда велик соблазн снова и снова возвращаться к старым. Если вы чувствуете, что вам непременно нужно что-то *делать*, советую выйти на свежий воздух и заняться физической нагрузкой. По крайней мере, это насыщает кровь кислородом. Полезно поменять вид деятельности: это ослабляет вашу привязанность к деталям.

Догадка, или озарение, как правило, возникает в результате сопоставления вопроса с новым опытом, когда неожиданно оба начинают резонировать вместе. Итак, необходимое «делание» принимает форму обдумывания вопроса; вы мысленно поворачиваете его и так и сяк, словно первую в сезон клубнику во рту. Жонглируйте составными частями вопроса, чтобы получались все новые и новые комбинации и связи. «Неделание» принимает форму прекращения работы на старой почве и предоставление свободы мыслям. На этом этапе может возникнуть вполне определенное чувство, что вы всего лишь принимаете участие, а не являетесь главным деятелем, в то время как вопрос то приближается, то отступает, ускользая от вашего внимания.

Как и следует ожидать, этот аспект мышления волнует многих авторов, поскольку во многих отношениях он наиболее интригующий. Был сделан ряд полезных наблюдений, которые помогут выбраться из тупика, и все они опять-таки сводятся к экспериментированию и обобщению, но в еще более экстремальных формах.

Экспериментируем и обобщаем

Время от времени, несмотря на попытки детально все обдумывать, вас не оставляет непреодолимое желание сделать что-нибудь, попробовать что-нибудь другое. Есть два адекватных варианта поведения в подобной ситуации. Первый — экспериментировать более экстремальными способами, делая вопрос все более и более конкретным или даже изменяя некоторые из условий, пока не станет возможным продвижение вперед.

Не всегда просто понять, как именно это надо делать, однако есть общее правило для работы с вопросами, которое сводится к следующему:

> если вы не можете решить задачу, изменяйте ее до тех пор, пока не сможете.

К сожалению, некоторые исследователи в стремлении продвигаться вперед забывают исходный вопрос! До настоящего момента ни один из вопросов, с которыми мы имели дело, не требовал экстремальных форм экспериментирования, хотя в «*Обрезанной доске*» предложение рассмотреть доски меньшего размера — это своего рода акт отчаяния, на который решаются немногие. Если же на самом деле попробовать для начала с доски 2 на 2 с отрезанными углами, потом с доской 3 на 3, а там, глядишь, и появится глобальная мысль!

Другая форма видоизменения вопросав целях его «укрощения» — это искать аналогии с другими вопросами, что подразумевает сочетание экспериментирования и обобщения, поскольку вы сосредотачиваете свое внимание на некоторых чертах вопроса. Затем вы задаете себе вопрос: встречались ли вам эти черты раньше? Если вы обращаете свое мышление к обзору, то обнаружите, что уже накопили богатый арсенал полезного и доступного опыта, в результате чего поиск аналогий становится еще успешнее. Как и для большинства советов в этой главе, довольно трудно четко сформулировать, как именно нужно искать аналогии, разве что посоветовать сопоставлять с предыдущим опытом.

Вспомните некоторые примеры из предыдущих глав:

– «*Пятнадцать*» (стр. 110): структурная аналогия между тройками чисел, сумма которых 15, и волшебными квадратами;
– «*Шустрые тосты*» (стр. 61): аналогия с «*Полоской бумаги*» (стр. 22) в том, что использование конкретных предметов может на самом деле оказаться эффективным;
– «*Пчелиная генеалогия*» (стр. 123): аналогия с «*Чехардой*» (стр. 84) в том, что важно задать вопрос, ПОЧЕМУ ваше предположение работает, и не довольствоваться формулой, которая вроде бы дает правильные ответы.

Когда вы вплотную займетесь вопросами из главы 10 и возьмете за правило делать обзор своего мышления в процессе работы над другими вопросами, появится много других примеров.

Если в результате экспериментирования никакой идеи не возникает, можно запросто не увидеть в обобщении полезного занятия. Иногда задачи становятся более ясными, если сформулировать их в более отвлеченном виде, отбросив несущественные детали. Обобщение подразумевает внимательный взгляд на вопрос и попытку понять, какую роль играют различные ограничения. Вполне возможно, что снятие одного или более ограничений облегчит задачу. Так получилось с «*Последовательными суммами*», когда после работы с двумя конкретными случаями двух последовательных членов один или два примера не вписались, на первый взгляд, в четкую модель. Таким образом,

$$5 = (-1) + 0 + 1 + 2 + 3$$

выражает 5 как сумму пяти последовательных чисел, а

$$7 = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$

выражает 7 как сумму семи последовательных чисел. Итак, в результате временного опущения ограничения относительно того, что числа должны быть только положительными, появился вариант решения.

Скрытые допущения

Когда вы изучите все очевидные ограничения, явно выраженные в задаче, в ней могут остаться и другие необязательные скрытые ограничения, которые вы придумали сами. Разумеется, именно их труднее всего обнаружить, и зачастую именно из-за них вы оказываетесь в состоянии «ЗАСТРЯЛИ!»

Мозг словно застывает, как желе, и в таком состоянии шевелить извилинами затруднительно. Некоторые классические примеры тому были даны в главе 5, стр. 138. Например:

Девять точек

Девять точек, расположенных квадратом 3 на 3, нужно соединить четырьмя последовательными отрезками прямой, не отрывая карандаш от бумаги и не повторяя ни одну из частей траектории.

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Может, вы сделали какое-нибудь излишнее допущение?
– Есть ли какое-либо ограничение относительно длины соединительных отрезков?

Этот вопрос используется во многих сборниках, но в полной мере его скрытые допущения выявлены у Адамса (1974). Кому-то удалось соединить точки тремя линиями, опровергнув одно допущение, а кто-то умудрился одной, опровергнув еще одно допущение! Подумайте над этим! Я не даю никаких предложений, поскольку они лишь повредят вашему процессу детального обдумывания!

Именно скрытые допущения делают головоломки типа «*Девяти точек*» такими раздражающими, однако их можно найти не только в головоломках. Скрытые допущения есть основа нашего восприятия. Как только мы обнаруживаем скрытое допущение, изменяются течение и направление математического исследования. Рассмотрите следующий пример:

Верно или нет

Для каждого из перечисленных в списке утверждений решите, верно ли оно или нет:

1. *Утверждение 2 в этом списке верно.*

2. Утверждение 1 в этом списке неверно.
3. Утверждение 3 в этом списке неверно.
4. В утверждении 4 в этом списке есть две ошибки.

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Следуйте системе: если утверждение верно, то что из этого можно заключить?
– Утверждение 4 требует особого внимания!

Первые три утверждения кажутся на самом деле парадоксальными, поскольку они не могут быть ни верными, ни неверными. Дело в том, что они ссылаются сами на себя, а подобные предложения интригуют математиков как минимум последние 2000 лет. Многие брались решить их, как правило, используя следующий подход: пытались тем или иным способом признать утверждения «вне закона», чтобы устранить парадокс. Поскольку они состоят из слов, значение которым придает читатель, нельзя быть до конца уверенным в том, что ссылка на «этот список» и друг на друга или на самих себя является на самом деле правомерной. Есть и другой подход: заметить, что, пытаясь их решить, вы делаете скрытое допущение — что их надо решить. Австрийский логик Курт Гёдель поставил под вопрос это допущение в 40-е годы прошлого столетия, произведя революцию в математическом мышлении. Вскоре Гёдель построил утверждение о числах, которое ссылается само на себя и которое можно интерпретировать так:

«это утверждение доказать нельзя».

Одно из следствий идеи Гёделя состоит в том, что некоторые математические задачи решить нельзя, не прибегая к новым допущениям. Скрытые допущения всегда с нами! Подробнее на эту тему см. работу Дугласа Хофстадтера (1979).

Очень просто закоснеть в своих привычках при наличии столь богатого разнообразия необязательных допущений. А вот стать восприимчивым к новому — совсем другое дело, именно потому, что если вы закоснели, меняться очень трудно. Лобовая атака (посредством тщательного анализа каждой части вопроса) может обнаружить только те допущения, которые связаны с формулировкой. Обнаружить возможность другой перспективы таким образом нельзя. Вот почему детальное обдумывание состоит из делания и неделания. Новая перспектива или догадка скорее появятся, если вы откажетесь от лобовой атаки. Догадка возникает не из конфронтации, а в результате резонанса с другой идеей после того, как расчищен путь. Этому способствует сильно развитый внутренний противник, который ставит все под сомнение.

Перед вами вопрос, предоставляющий возможность проверить на практике некоторые замечания из этой главы, которые в силу необходимости получились весьма общего характера; разумеется, многое зависит от вашего багажа математических знаний. Я не собираюсь давать вам вариант решения, но советую не сдаваться, поработав над задачей всего пару часов. Не сдавайтесь!

Многогранники

Представьте себе, что перед вами на столе лежит кусок каната. В поперечном сечении каната правильный многоугольник с N сторонами. Поверните концы каната к себе, чтобы они почти сомкнулись в окружность.

А теперь мысленно возьмитесь за концы каната. Вы хотите склеить их, но сначала мысленно поверните правое запястье так, чтобы конец каната повернулся на одну N-ю часть полного оборота. Повторите это движение T раз, пока ваше запястье не повернется на T/N полного оборота. А теперь *склейте концы каната, чтобы они точно совпали ребром к ребру многоугольного сечения.*

Когда «мысленный» клей высохнет, начните раскрашивать одну грань (плоскую поверхность) каната и продолжайте до тех пор, пока не дойдете до уже покрашенной части. Начните снова на других, еще не покрашенных гранях, используя краску другого цвета.

Сколько всего цветов вам понадобится?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

застряли?

Погружение

- *Не сдавайтесь* лишь потому, что не можете себе этого представить! Найдите способ!
- Экспериментируйте по-взрослому! Ищите физические предметы, которые могут вам пригодиться.
- Введите средство записи своих простых примеров.

Штурм

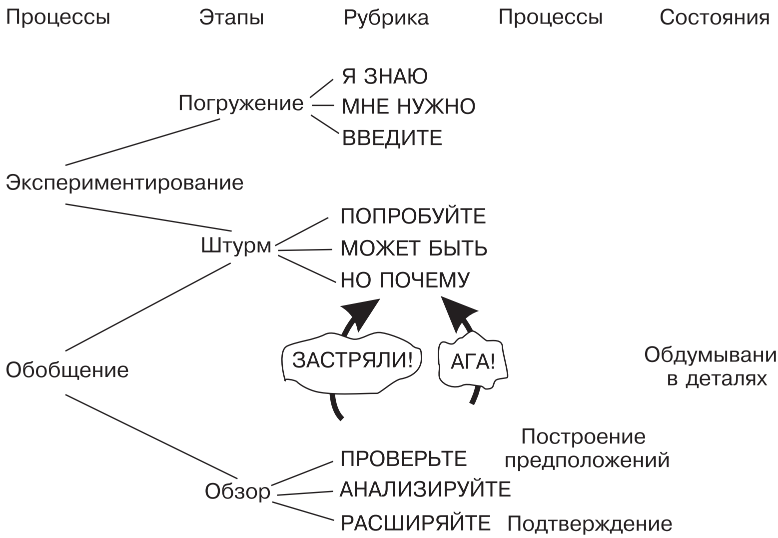
- Если трехмерное пространство усложняет вам жизнь, постарайтесь найти более простой способ осознать суть.
- Ищите принцип того, как подсчитывать грани. Попробуйте упростить методы.
- Схемы!
- Вам доводилось видеть нечто похожее (по сути) раньше?
- Сделайте предположение и испытайте его. Попробуйте свести отдельные предположения для отдельных случаев в одно утверждение.

Выводы

Эта глава в силу необходимости получилась более описательной по сравнению с предыдущими. Когда вы завершаете всю рутину «мышления» и чувствуете внутреннее убеждение не останавливаться, наилучший совет — дистиллировать вопрос в такую форму, чтобы было удобно держать его в голове и снова и снова обдумывать. Часто сдвинуться с мертвой точки помогает, если вы записываете то, что вам известно, и пытаетесь объяснить другу.

В противном случае вас будут смущать аналогии с другими ситуациями, а также вас могут терзать сомнения по поводу того, не мешают ли вам скрытые или ненужные допущения.

Если вы хотите прочувствовать настоящий мыслительный процесс, обсуждаемый в этой главе, я предлагаю вернуться к одному из заданий, над которым вы уже основательно попотели, но так и не смогли решить полностью (особенно если есть такое, которое не дает вам спокойно спать по ночам). Лично меня годами мучили «*Окружность и точки*» (глава 4, стр. 113). Может, именно поэтому теперь это один из моих любимых вопросов. Или попробуйте обобщить «*Девять точек*» (стр. 148).



В главе 10 вы узнаете, что некоторые из заданий представляют большую трудность, например:

«*Складные многоугольники*» (стр. 221),
«*Кулинарные рецепты*» (стр. 246),
Лунный свет» (стр. 236),
«*Шерстяная пряжа*» (стр. 259),
Бумажный узел» (стр. 241).

См. главу 11, где есть другие вопросы, входящие в программу обучения.

Справочная литература

Adams, J. (1974) *Conceptual Blockbusting*. San Francisco: Freeman.
Hofstadter, D. (1979) *Godel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. London: Harvester

ГЛАВА 7

РАЗВИВАЕМ ВНУТРЕННИЙ МОНИТОР

В каждой из шести предыдущих глав были советы, как мыслить математически, но совет из книги не слишком эффективен, если вы застрянете посередине исследования. Научиться выбирать из книги тот самый совет, который вам нужен, — задачка не легче математической! Наверное, вы заметили, что везде, где это возможно, мои предложения в форме вопроса или побуждения. Причина в том, что конкретные «подсказки» лишают вас возможности мыслить самостоятельно и скрывают важные моменты, которые дают импульсы для порождения этих самых «подсказок». Более того, сама природа «подсказок» подразумевает, что математика — это мешок с фокусами, которые необходимо обнаружить и раскрыть. По моему убеждению, такой подход неадекватен и неприемлем. Когда вы попадаете в тупик, как, впрочем, и в другой ситуации, вам нужен наставник, который даст вам полезный совет, чтобы вы снова сдвинулись с мертвой точки. Эта глава посвящена процессу, с помощью которого можно с успехом вырастить собственный внутренний монитор, призванный помочь вам в этом. До настоящего момента основной упор в книге был сделан на попытках соотнести мои советы с вашим опытом. Цель многих заданий в том, чтобы предоставить вам возможность получить конкретный опыт мышления и тем самым связать мои советы с полученным опытом. В этом смысле АНАЛИЗИРОВАНИЕ, пожалуй, — самый важный вид деятельности. Иногда говорят, что

> *единственный способ чему-либо научиться — это собственный опыт,*

но одного опыта недостаточно. Разумеется, опыт должен оставить свой след. АНАЛИЗИРОВАНИЕ ключевых идей и ключевых моментов активизирует критические моменты исследования и помогает интегрировать их решение в ваш арсенал мышления.

В главе 5 мы ввели понятие внутреннего противника, или скептика, который выискивает изъяны в ваших рассуждениях. В этой главе внутренний скептик трансформируется во внутренний монитор, который всегда с вами и обладает конкретными функциями. Описав роль монитора, обсудим механизм, с помощью которого такой монитор можно в себе постоянно развивать.

Роли монитора

В предыдущих главах я пытался помочь вам распознавать различные аспекты мышления, происходящие внутри вас, с помощью подробного описания этих процессов. Ни в одном из процессов и видов деятельности, упомянутых мной, нет ничего необычного или нового. Они происходят спонтанно в каждом из нас в той или иной степени, иногда на подсознательном уровне. Когда вы осознаете их и понимаете, насколько они могут быть эффективны в соответствующих ситуациях, как правило, они происходят чаще и интенсивнее, чем раньше. А теперь я предложу вам иной угол зрения. Опишу мыслительную деятельность, как будто внутри вас независимый агент, который контролирует все, что вы делаете. Монитор похож на личного наставника, который следит за вами и задает соответствующие вопросы, но у такого наставника есть преимущество: он присутствует лишь в ваших мыслях и действиях. Что же может делать такой монитор?

1. Следить за вычислениями, чтобы они были адекватными вопросу. Если длительный подсчет уводит вас от сути вопроса в переулок или в тупик, растущее в вас нежелание продолжать это занятие говорит о том, что монитор не дремлет.
2. Следить за выполнением плана («ПОПРОБУЮ...»), чтобы он не сбился с курса. Растущее нежелание или тревога — признак того, что монитор начал действовать.
3. Распознавать в обобщениях, даже предварительных и неточных, *предположения* и различать «Я ЗНАЮ», «МНЕ НУЖНО» и «МОЖЕТ БЫТЬ».
4. Оценивать идеи по мере их появления как стоящие и не стоящие развития. Отказ от тучи вычислений в вопросе, который, как «кажется», этого не требует, — признак работающего монитора. Не спешить и рассмотреть план, а не бросаться в него с головой — еще одна забота монитора.
5. Замечать состояние «ЗАСТРЯЛИ» и давать об этом знать, чтобы вы занялись чем-то другим.
6. Предлагать вернуться к погружению, чтобы прояснить «ЗНАЮ» и «НУЖНО», систематически экспериментировать или вводить другой угол зрения, схему или обозначение.
7. Предлагать менять план штурма, пытаясь обобщать в другом направлении, искать другие скрытые модели.

8. Критически изучать аргументы на предмет слабых мест, скрытых допущений и логических ошибок.
9. Напоминать вам сделать обзор решения, прежде чем завершить работу.

Как видите, у монитора есть над чем потрудиться, а если вы считаете, что этого мало, то у монитора есть еще одна важная роль, о которой речь пойдет в главе 8.

Смотреть по сторонам и задавать новые вопросы, возникающие в процессе того или иного рода деятельности, будь то в математическом мышлении или в быту.

Обратите внимание: я провожу грань между

состоянием погружения в процесс мышления

и

мониторингом этого погружения.

Это отличает мыслительный процесс от осознания самого процесса и подчеркивает важность анализа для более глубокого осознания.

Ответственный анализ своих решений некоторых из задач в книге приведет к растущему пониманию этого различия. Сначала, когда вы смотрите назад, вы отчетливо видите лишь некоторые моменты, не ощущая необходимости их восстанавливать. Если вы будете делать это регулярно, то все чаще и чаще будете осознавать *сам момент* ваших мыслительных процессов.

Эмоциональные снимки

Чтобы вырастить в себе свой собственный монитор, необходимы обширная практика и эффективный анализ. Практическая работа над вопросами полезна лишь в том случае, если она накапливает удачный опыт. Успешное преодоление состояния «ЗАСТРЯЛИ» порождает позитивное отношение и видение себя, и именно в результате успешного опыта будут возникать хорошие идеи и позитивные отношения в будущем. Поверьте, необходимо попадать в тупики и выбираться из них, поскольку рано или поздно вы снова застрянете, и именно тогда вам понадобятся советы. Источник этих советов — эффективный анализ предыдущих случаев.

Для того чтобы уметь анализировать, необходимо обладать способностью осознавать,

узнавать,

формулировать

и усваивать

то, что на самом деле произошло, не критикуя и не приукрашивая. Критика множит негатив и закрывает доступ к тому, что происходит в действительности, замыкая вас на самооправдание, что вряд ли многому научит. Приукрашивание и чрезмерное описание характерны для самоанализа, в отличие от моментов внутреннего знания, так что они весьма ненадежны. И критика, и приукрашивание объясняются вашим эго, которое пытается спрятаться или взять верх. Надо быть честным перед самим собой, поскольку только вы сами можете знать наверняка, что происходит!

В предыдущих главах я подчеркивал, как важно замечать и записывать ключевые идеи и ключевые моменты. Это то, что резко выделяется, без необходимости восстанавливать с помощью «наверное, я...» или «а может быть, я...». Именно потому, что эти идеи и моменты оказывают такое воздействие на ваши ощущения, они полезны для развития вашего монитора. Когда вы вспоминаете (а не пытаетесь восстановить) ключевой момент, вы получаете доступ к тем ощущениям, которые вас охватывали в тот момент. Если с помощью анализа вы связали эти ощущения с действиями, т. е. с мыслительными процессами, то, вспоминая ощущения, вы вспомните и действия, а значит, и конкретный совет, который вам помог в прошлом. Если во время работы над другим вопросом ваши ощущения резонируют с ощущениями в прошлом, у вас есть доступ к полезному совету. Таким образом, нет необходимости запоминать весь перечень полезных вопросов и советов. Все это заперто в вашей памяти в более или менее доступной форме, в зависимости от эффективности вашего анализа.

Запись с помощью РУБРИКИ — это инструмент, призванный вам в этом помочь. Они высвечивают события по мере их появления и обеспечивают пространство для вашего растущего монитора и его действий. Если вы постоянно спешите и лихорадочно лезете штурмовать вопрос, у вашего монитора мало шансов быть услышанным! Кроме того, запись с РУБРИКАМИ обеспечивает маркеры, или памятки, которые потом будут способствовать успешному анализу.

Механизм стимуляции роста вашего внутреннего монитора представляет собой сознательное использование записи с РУБРИКАМИ и анализ ключевых идей и ключевых моментов. Поскольку со временем такие моменты меркнут в памяти, надо научиться «фотографировать» ощущение момента, чтобы потом к ним вернуться. Поскольку доступ к ключевым моментам и соответствующим советам дает нам наши ощущения, я называю такие «фотографии» эмоциональными снимками.

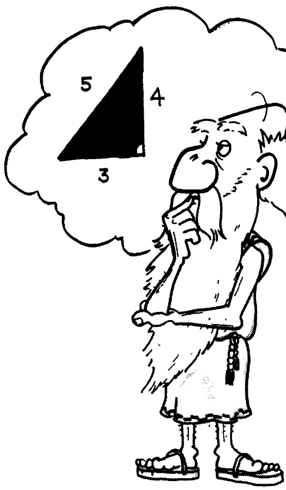
Какого типа ключевые моменты стоит фотографировать и как это делать? Предлагаю вам научиться распознавать и фотографировать определенные отличительные состояния, характерные для мыслительного процесса. У каждого такого состояния есть характерный признак и, чтобы вам легче было его обозначить, я предложу для каждого состояния ключевые слова. По мере того как число снимков растет, ключевые слова насыщаются богатым смыслом, и формулировать становится все труднее, и со временем ключевое слово становится как бы спусковым крючком. Как только вы узнаете состояние, которое описывает ключевое слово, разнообразные ассоциации водопадом возвращаются к вам вместе с советами из подобных ситуаций. Как будто кто-то близкий помогает вам — ваш собственный внутренний монитор!

Вот какими ключевыми словами пользуюсь я:

приступаем,
углубляемся,
обдумываем,
не сдаемся,
озарение,
сомневаемся,
размышляем.

Чтобы эти «кости» обросли «мясом», я соотнесу ключевые слова с задачами из предыдущих глав. Следует иметь в виду, что дать точное определение психологическим состояниям весьма затруднительно. Для передачи особенности того или иного состояния можно использовать образы или метафоры, да и прямая ссылка на мои решения тоже может помочь. Обратите внимание: вопросы, которые вы находите очень легкими или невозможно трудными, вряд ли откроют многие характерные состояния, поскольку либо все происходит очень быстро, либо ничего не выходит! Хочется верить, что хотя бы некоторая часть вопросов из предыдущих глав вписалась где-то посередине. Помните: сейчас вы должны «схватить» ощущения, а не идеи!

Приступаем



Может показаться, что это состояние настолько очевидно, что и говорить о нем не стоит, однако оно не так просто, как выглядит на первый взгляд. Чтобы приступить, необходимо признать и принять, что вопрос есть. Зачастую эмоции берут верх и блокируют узнавание или восприятие, поскольку бытует культурный миф о том, что математика — наука сложная и математическое мышление доступно лишь «умным людям». Надеюсь, что вопросы, затронутые в предыдущих главах, придали вам некоторой уверенности в своих силах, дабы противостоять этому расхожему заблуждению. Состояние «ПРИСТУПАЕМ» нужно для того, чтобы «прощупать» вопрос, разобраться, о чем именно в нем спрашивается, и ознакомиться с деталями.

Сначала вопрос существует на странице, вне вас. Не сомневаюсь в том, что некоторые вопросы из предыдущих глав ничем не привлекли вас, во всяком случае, поначалу. Может, вам не понравились задания типа «*Спички*» (глава 5, стр. 117); может, вы предпочитаете более практические задания. Возможно, вы так и не приступили к решению таких вопросов, как «*Конверты*» (глава 2, стр. 58) и «*Пятнадцать*» (глава 4, стр. 110), поскольку у них есть сколь угодно решений. Может быть, *Ползучие бяки* (стр. 69) или «*Завтрак дам*» (стр. 54) показались вам слишком узкими или надуманными. У каждого человека в данный момент времени свой спектр интересов, и он приступает к решению лишь тех вопросов, которые в этот спектр попадают; другие вопросы оставляют его равнодушным. Разумеется, интерес в данный момент может зависеть от внешних факторов, например необходимости получить хорошую отметку и поскорее покончить с этим. Независимо от обстоятельств, очевидно одно: не приступив к решению, трудно рассчитывать на продвижение вперед. Мысленно вернитесь в предыдущие главы и вспомните, какие вопросы вам особенно понравились, а какие вы нашли особенно неприятными.

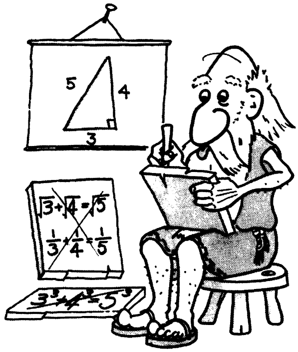
СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

Неважно, насколько оправданным вам кажется ваше мнение по поводу того или иного вопроса; суть в том, что ваши пристрастия отражают нечто важное в вас, что стоит выяснить. Что общего есть в вопросах, которые вам понравились? А в тех, что вам не понравились?

Состояние «ПРИСТУПАЕМ» можно сравнить с моментом, когда вы достаете из коробка спичку и чиркаете ею, готовясь зажечь костер или плиту. Это действие — автоматическая реакция на желание зажечь пламя, но пока еще оно не влечет за собой никаких обязательств, ничего непоправимого. Подобным образом, встает вопрос и, как незажженный огонь, либо резонирует с вашим интересом — и вы приступаете, либо нет. Если вопрос всегда возникает из внешнего источника и импульс приступить продиктован давлением извне, то велика вероятность того, что разовьется негативное отношение, в том числе упорное нежелание углубляться в вопрос. Такое состояние характерно для многих детей в школе, которые хотят лишь одного — как можно быстрее и безболезненнее покончить с занятиями. Вопросы читаются одним глазом, погружаться в них они не собираются, так что разгореться у искры интереса нет ни малейшего шанса. Неудивительно, что потом возникают трудности. Если спичкой чиркнуть, она вспыхнет, но может потом и потухнуть, точно также вопрос может оказаться непривлекательным. С другой стороны, пламя может разгореться и долго гореть, и значит, вы ПРИСТУИЛИ.

Вопросы и их подача в книге были выбраны таким образом, чтобы обойти нежелание приступать к ним. Например, часто людей не оставляют равнодушными вопросы с сюрпризом. Однако самые интересные вопросы — это те, что вы задаете себе сами. Научиться узнавать вопросы в каждодневной жизни, равно как в математических контекстах, — лучший способ углубить понимание вопроса, независимо от его источника. Подробнее речь об этом пойдет в главе 8.

Углубляемся



Переход от «ПРИСТУПАЕМ» к «УГЛУБЛЯЕМСЯ» поначалу кажется трудноуловимым, однако на самом деле эти два состояния легко различимы. Состояние «УГЛУБЛЯЕМСЯ» подразумевает активность: голова опущена, руки грязные. Цель — основательно прощупать вопрос, разобраться со значениями и связями, экспериментировать различными способами, чтобы вопрос со страницы книги переместился внутрь вас. В сущности, вопрос становится вашим собственным. Вы изрядно с ним поработали, так что можно его дистиллировать до сути и держать в таком виде в своем мозгу. Технические термины выражены на удобном для вас языке вместе с соответствующими словами; вы прояснили для себя: я ЗНАЮ и МНЕ НУЖНО узнать.

Вопрос «*Склад*» из главы 1 (стр. 19) обычно «цепляет», когда из одного примера узнаешь, что порядок вычисления скидки и налога не имеет значения. Если поначалу воспринимаешь вопрос равнодушно, то теперь хочется узнать, всегда ли так бывает и почему это так. Итак, состояние «УГЛУБЛЯЕМСЯ» не напрямую связано с первоначальным экспериментированием или другой деятельностью, а, скорее, с увеличением интенсивности. Это состояние можно сравнить с горящей спичкой, поднесенной к хворосту для разжигания костра: у читателя вспыхивает интерес к вопросу, которого не было, пока между ними была определенная дистанция, и появилось обязательство, которого не было в состоянии «ПРИСТУПАЕМ».

Когда вы занимались «*Палиндромами*» (стр. 23), да и любым другим вопросом, наверняка возникал такой момент, когда все внимание было на вопросе и вы полностью погружались в мыслительный процесс. Стоит сделать паузу и вспомнить некоторые из таких моментов, потому что на них можно многому научиться.

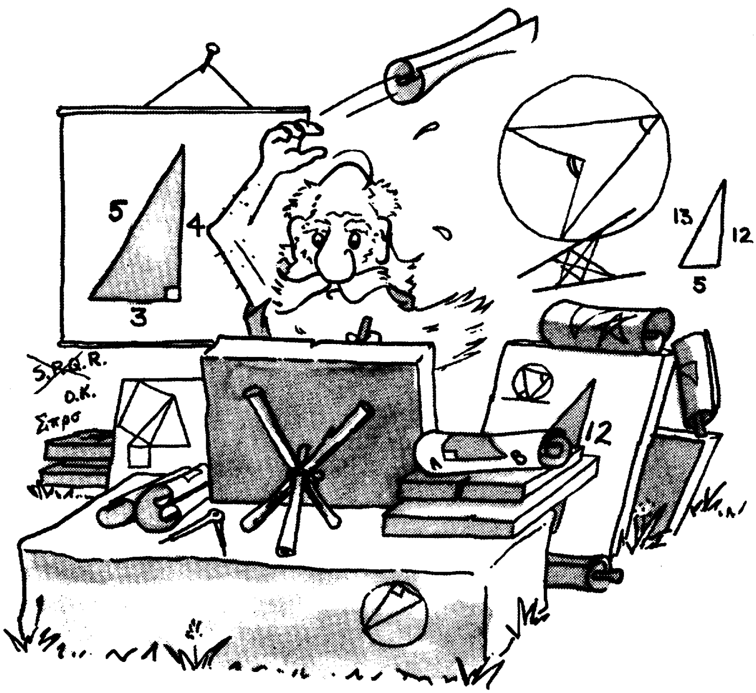
Одни люди с легкостью углубляются в вопрос, пожалуй, даже слишком. Мозги кипят, мысли набегают одна на другую, а потом все стихает. Если под таким натиском вопрос будет сломлен, все замечательно, только уйма энергии потрачена зря и можно потерять хорошие идеи. Один из способов противостоять этой тенденции — использовать запись с РУБРИКАМИ, поскольку это занятие хотя бы немного тормозит вас, фиксирует хорошие идеи («ПОПРОБУЮ. . . ») и напоминает вам, что вы пытаетесь сделать. Со временем вы научитесь узнавать подобные моменты лихорадочного безумия и будете выдерживать достаточно длинную паузу, чтобы дать возможность вашему монитору окинуть поле боя бесстрастным взором. Если вы научитесь притормаживать, это оградит вас от риска вспыхнуть от любой случайной искры или захлебнуться от внезапного наплыва энергии или энтузиазма.

Другие люди, с более осторожным характером, предпочитают выждать время. Для них состояние «УГЛУБЛЯЕМСЯ» подразумевает систематическую работу над вопросом: они экспериментируют, рисуют схемы, вводят обозначения, по-новому формулируют выражения и т.д. Они углубляются в вопрос не менее интенсивно, но если первые подобны гоночной машине, то вторые — паровому катку. Тем не менее хворост горит и, научившись узнавать это состояние, они становятся более восприимчивыми к ассоциациям с другими вопросами, которые возникают в них, и уже не в такой мере зависят от трудоемкой работы.

Переход от состояния «ПРИСТУПАЕМ», когда вы узнаете вопрос, к состоянию «УГЛУБЛЯЕМСЯ» зависит не только от личного психотипа, и по этому поводу есть ряд интересных наблюдений. Возьмем в качестве примера «*Шустрые тосты*» из главы 2 (стр. 61). После первого прочтения у меня мелькнула мысль, что тут есть интересный вопрос, но я не придал ей значения. Потом я обратил на него внимание под влиянием своего коллеги. После нескольких кратких записей я удивился и вопрос меня зацепил. Хворост вспыхнул, но спичку поднес кто-то другой. Костер разгорелся, и вопрос увлек меня всерьез. Вопросы, связанные с практической деятельностью, как «*Полоска бумаги*» (стр. 22), «*Чехарда*» (стр. 84), «*Мебель*» (стр. 95) или даже «*Итерации*» (стр. 116), отлично подходят для подогревания интереса, если только преодолено первоначальное нежелание «поиграть». Особенно пугают поначалу вопросы и ситуации, у которых много вариантов решения: может, потому что не ожидается сюрприза или же плохо сложили костер. С опытом, в частности по мере увеличения отработанных вопросов, все больше и больше вопросов будут вызывать у вас интерес.

Обдумываем в деталях

Если вопрос дается вам легко, то обдумывания в деталях может и не понадобиться или же оно будет мгновенным. Однако над серьезным вопросом, как правило, приходится ломать голову. Итак, вопрос кажется вполне ясным и он уже внутри вас, однако вам нужна новая идея или план. Это состояние во всех подробностях расписано в главе 6. Для него характерно дистанцирование от вопроса. Если на этапе погружения в вопрос ваша задача — в него углубиться, чтобы сродниться с ним, то в состоянии «ОБДУМЫВАЕМ В ДЕТАЛЯХ» этапа штурма картина обратная.



Здесь вы смотрите по сторонам в поисках других вопросов из прошлого с похожей или аналогичной структурой. Вы пытаетесь изменить вопрос, экспериментируя или обобщая новыми способами, чтобы получить нечто более удобное для дальнейшей обработки. Вы пытаетесь по-новому взглянуть на вопрос, представляете его с помощью другой схемы или по-другому организуете информацию. Хороший пример тому — «*Последовательные суммы*» (глава 4, стр. 97), а именно подготовительная работа к предположению 5. Мой вариант решения не передает, сколько времени я думал над ролью нечетного множителя, что привело меня к мысли вернуться к экспериментированию, но уже по-новому. Когда вы оказываетесь в состоянии «ОБДУМЫВАЕМ В ДЕТАЛЯХ», типично дистанцироваться от сиюминутной задачи, подобно тому, как пешие туристы, забравшись на холм, стоят и осматривают окрестности, прежде чем снова устремиться в путь. Итак, в результате использования другой формы систематического экспериментирования, рассмотрев суммы двух, а потом трех последовательных чисел, я получил новый результат, иллюстрирующий, что эти состояния не обязательно последовательные, а скорее преходящие и случайные.

Еще один пример состояния «ОБДУМЫВАЕМ В ДЕТАЛЯХ» — задача «*Дроби*» (стр. 57). Помните, как персонажи из задачи сразу же углубились в вопрос и были крайне удивлены, узнав, что они оказались неправы. Если и вы наступили на те же грабли, то в какой-то момент дистанцировались от вопроса и стали искать другой подход. Потом появляется новая идея. Задача вашего монитора — оценить эту новую идею, прежде чем вы начнете что-то делать и снова войдете в состояние «УГЛУБЛЯЕМСЯ».

До настоящего момента речь шла лишь об одном аспекте состояния «ОБДУМЫВАЕМ В ДЕТАЛЯХ», а именно дистанцировании; однако это понятие также подразумевает, я бы сказал, вымачивание в маринаде и тушение (извините за кулинарный образ), но мне кажется, он как раз передает необходимую остановку для поиска новых идей. В главе 6 шла речь о том, как важно погрузиться в проблему и дать ей возможность «тушиться у вас под крышкой» (читай: «в голове»). Это время, когда составляющие вопроса комбинируются самыми разными способами. Ваша задача — варить на малом огне, время от времени помешивая (ставя вопрос в центр внимания). Когда вы доведете вопрос до этого состояния, то обнаружите, что внезапно появятся другие вопросы, идеи, методы, на которые вы раньше не обращали внимания, которые могут помочь вам решить исходный вопрос.

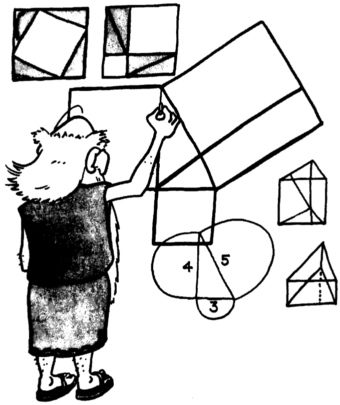
Не сдаемся

Если задача сложная, то встает вопрос, а возможно ли ее решить вообще? Такой момент, а их может быть несколько, обозначает возможность нового отношения с задачей. Как говорилось в главе 6, может, имеет смысл оставить задачу на время или навсегда. Очень часто бывает разумно отложить задачу на время, чтобы потом к ней вернуться. Иногда задача вас не отпускает и вы как бы становитесь заложником обязательства. У вас есть чувство, что задачу можно решить, или, по крайней мере, можно еще что-то сделать. Нет спешки и лихорадочного возбуждения, характерных для состояния «УГЛУБЛЯЕМСЯ». Скорее, есть чувство гармонии и связи с задачей. Она стала вам другом. Немногие из вопросов в этой книге могли возбудить в вас острое, четкое ощущение «НЕ СДАЕМСЯ», хотя бы потому, что я всегда давал подсказки, в какую сторону двигаться, так что момент «НЕ СДАЕМСЯ» — принятие выбора бросить или попросить помощи — трансформировался во что-то вроде «посмотрим, что там нам предлагают в книге...». Если же вам знакомо состояние «НЕ СДАЕМСЯ», значит, вам уже довелось испытать это ощущение дружеского отношения, которое может возникнуть при решении математических задач.

Помимо примеров из главы 6, которые были построены на фиксации внимания, я оказывался в состоянии «НЕ СДАЕМСЯ» и в нескольких других. Например, в «*Мебели*» я так увлекся перемещением квадрата, что через какое-то время подумал, что сделал все, что мог. У меня было сильное ощущение, что кресло нельзя переместить круговыми движениями согласно условиям, но я не представлял, в каком направлении двигаться. Я понимал, что вынырнул из предположения, не имея никакого плана, и встал вопрос: «А мне надо НЕ СДАВАТЬСЯ?» Я ухватился за него, потому что в глубине души словно кто-то сказал: что-то происходит, и я хотел понять, что же это. Пока я смотрел по сторонам в поисках новой идеи (ОБДУМЫВАНИЕ), мой монитор сказал:

> *«Запиши, что тебе известно. До какой точки может переместиться один угол?»*

Следуя в этом направлении (снова УГЛУБЛЯЕМСЯ), я обнаружил модель, которая подсказала мне, что же происходит.



Еще одна форма проявления состояния «НЕ СДАЕМСЯ» встречается во время осуществления плана («ПОПРОБУЙТЕ...»), который начинает отклоняться от курса. Например, в «*Последовательных суммах*» план представления каждого из чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

поочередно как суммы последовательных чисел завершился предположением, но не пролил свет на вопрос «почему». Момент, когда мой монитор спросил

«А это работает?»,

был местной формой состояния «НЕ СДАЕМСЯ», т. е. относился к конкретному плану, а не к проблеме в целом. Он вполне мог вырасти и охватить вопрос, нужно ли мне НЕ СДАТЬСЯ при решении задачи, особенно если бы не возникла идея рассмотреть суммы двух, а потом трех последовательных чисел. Состояние «НЕ СДАЕМСЯ» подобного рода чаще всего возникает, когда вы приступаете к последовательности вычислений, которые становятся запутаннее, чем того заслуживает исходный вопрос. Появляется ощущение неоправданной сложности, и ваш монитор призывает к остановке, чтобы трезвым взглядом обозреть состояние дел.

Ваш монитор научится судить, на самом ли деле все запуталось или за нежеланием производить много вычислений стоит лень. Те, кто стремительно УГЛУБЛЯЮТСЯ в задачу, как правило, склонны пугаться длинных вычислений. Они могут отказаться от состояния «НЕ СДАЕМСЯ» именно в критический момент и вместо этого начать искать более легкий путь. Те же, кто более осторожен и спокоен, напротив, продолжают следовать плану, не прибегая к помощи монитора и выполняя необязательные вычисления. Такие люди, решая, например, «*Мебель*», часто тратят слишком много времени на сбор информации и не уделяют достаточно времени поиску в этих данных модели или структуры.

Принять решение НЕ СДАТЬСЯ волевым усилием не так просто. Скорее, оно приходит в результате растущей связи с вопросом, когда вы замечаете, что что-то изменилось, а не принимаете решение что-то изменить.

Озарение

Очень часто решение появляется неожиданно. После немногочисленных вычислений, а иногда после лет детального обдумывания возникает модель, соединяющая «ЗНАЮ» и «НУЖНО узнать». Я предпочитаю различать внезапные вспышки, когда загорается хворост (почему бы не попробовать...!), и момент ОЗАРЕНИЯ, когда весь вопрос или значительная его часть внезапно собирается воедино. В такие моменты для усиления и продления сладкого мига напишите «АГА!» Поднятие настроения, как и юмор, — отличная замена фрустрации после ОБДУМЫВАНИЯ, так что возьмите себе это за правило!

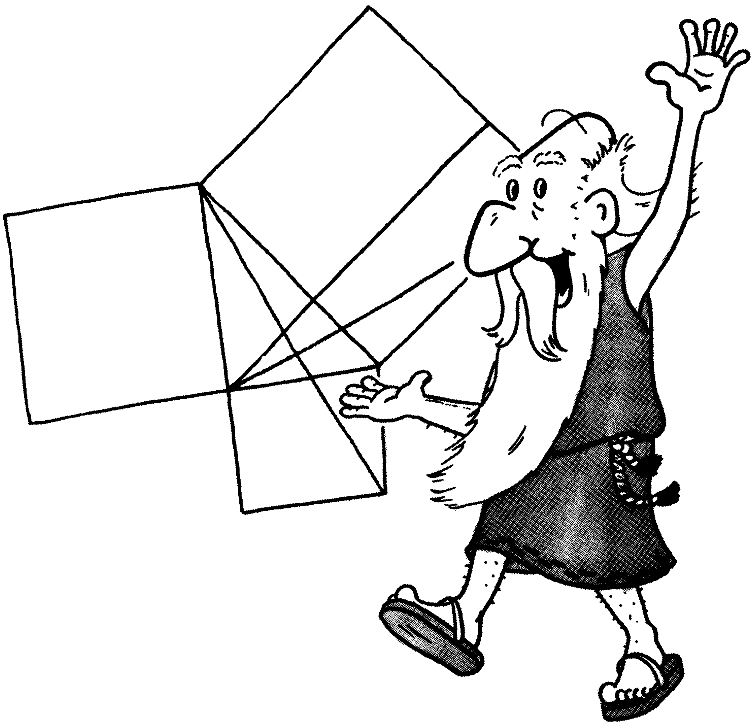
Надеюсь, что в процессе работы над вопросами у вас уже не единожды бывали моменты такого ОЗАРЕНИЯ. «*Покрашенные покрышки*» (глава 4, стр. 94) обычно вызывают чувство «*ну конечно!*», когда внезапно приходит четкое понимание того, что передняя и задняя покрышка оставляют одинаковый след, независимо от того, на каком расстоянии они расположены на раме велосипеда. Момент, когда предполагаемая связь между колесами исчезает, представляет собой своего рода избавление, характерное для ДОГАДКИ. В «*Лоскутном одеяле*» (глава 1, стр. 31), когда приходит понимание, что достаточно двух цветов, даже хотя идея построения линии за линией и перемены цвета еще не сформулирована, иногда приходит как «АГА!»

Разумеется, состояние ОЗАРЕНИЯ приходит само; его нельзя вызвать намеренно. Однако к нему можно подготовиться, УГЛУБЛЯЯСЬ, выполняя трудоемкое экспериментирование и обобщение, ища аналогичные вопросы и так далее. Для этого нужна причудливая смесь из состояния «НЕ СДАЕМСЯ» и отпускания ситуации почти одновременно, пока нечто новое не появится на арене. Об этом чередовании усердной работы и отдыха писали многие ученые и философы:

> *Философский камень можно найти, только если его поиски тяжким бременем лежат на ищущем. Ты ищешь и не обрящешь. Не ищи и ты обрящешь.*
>
> *Из древнего «Свода Алхимика».*

Шанс сделать открытие выпадает лишь умам, подготовленным к ним терпеливым исследованием и упорным трудом.

Луи Пастер.



Без устали насыщайте себя своим предметом ... и ждите.

Ллойд Морган.

Иногда находишь то, что не ищешь.

Александр Флеминг.

Иногда момент озарения стоит всего жизненного опыта.

Оливер Уэнделл Холмс.

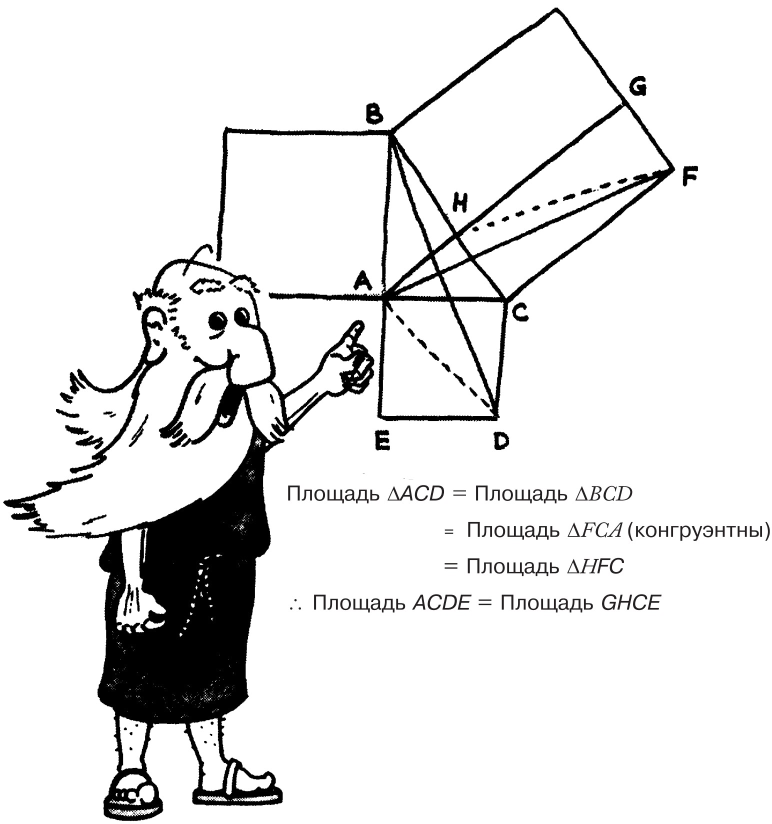
Мы не можем нести груз вдохновения на постоянной основе. Сегодня в воздухе нет электричества, а завтра мир ощетинится искрами, как спина у кошки.

Ральф Уолдо Эмерсон.

Сомневаемся

ОЗАРЕНИЯ часто бывают неверными, частично или полностью. То, что мне казалось, я четко разглядел, может обернуться миражом, так что СОМНЕВАТЬСЯ во всем абсолютно необходимо. Есть несколько различных аспектов. На поверхностном уровне догадка может состоять в том, что вы увидите модель как степени двух в «*Окружности и точках*», от которой потом в результате дальнейшего экспериментирования приходится отказаться. А иногда в результате догадки можно прийти к какому-либо вычислению, как в *Шахматных клетках*, где решение приходит в результате систематического метода счета. Однако в большинстве случаев догадка лишь осязаема, но сформулировать ее непросто и, чтобы точно выразить то, что вы ощущаете, потребуется несколько попыток. В «*Последовательных суммах*» мне понадобилось пять попыток, чтобы записать предположение 5, которое внезапно пришло ко мне как догадка. Это пример проявления состояния «СОМНЕВАЕМСЯ». В главе 5 подробно шла речь о подтверждении, когда нужно, чтобы ваш монитор СОМНЕВАЛСЯ, но как бы ни были вы уверены в том, что решили вопрос, тем не менее, как говорится, пока стакан не осушил, не говори, что не пролил! Каждый шаг доказательства требует тщательной проверки, поскольку очень просто уверовать в собственные идеи. Для этого требуется много энергии, поскольку велик соблазн остановиться и решить, что вы все закончили. Если возбуждение от ДОГАДКИ трансформируется в уверенность в том, что вопрос решен, минуя состояния «СОМНЕВАЕМСЯ» и «ПРОВЕРЯЕМ», то потом велика вероятность «облома», если окажется, что ДОГАДКА была неполной или неверной, и вопрос останется нерешенным. Силы надо черпать у своего скептически настроенного монитора, создающего напряжение, которое необходимо снять: «А ты уверен?». Удовлетворение и уверенность в результате полученного решения и его проверки намного сильнее и продолжительнее, нежели эмоциональные взлеты, характерные для ОЗАРЕНИЯ. Хотя эти взлеты на какой-то миг вас приятно возбуждают, удовлетворение и уверенность в результате убедительного решения значительно прочнее и продолжительнее.

Вполне вероятно, что в трудной задаче исходный вопрос приходится несколько раз видоизменять в попытках найти лазейку к решению. Состояние «СОМНЕВАЕМСЯ в своем решении» необходимо, чтобы убедиться в том, на какой вспомогательный вопрос вы ответили, и не нужна ли дальнейшая работа, чтобы ответить на исходный вопрос.



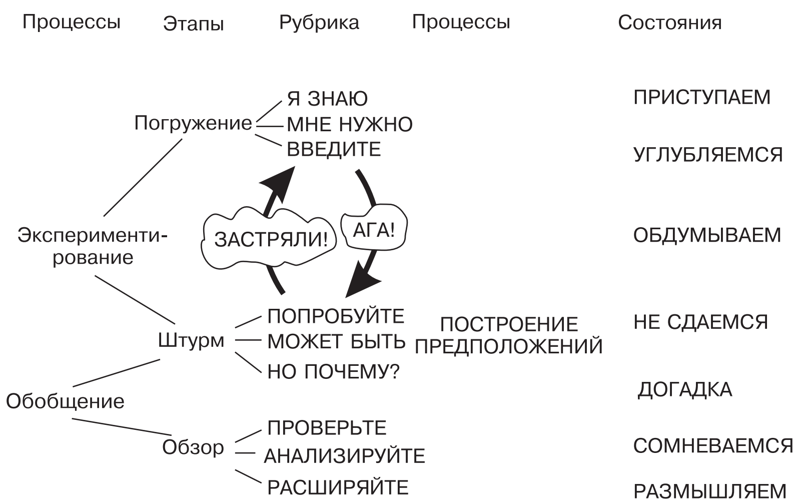
Размышляем

Именно на этом, седьмом состоянии я упорно делаю акцент на протяжении всей книги. Это спокойное состояние созерцания, когда вы вспоминаете важные моменты, чтобы получить окончательное решение, или перечитываете свое решение, пытаясь составить общую картину, увидеть и перенести свою работу в более широкий контекст. Это высшая форма обобщения, когда текущее решение вместе с подобными вопросами из вашего прошлого выступают в роли частных случаев, пока вы ищите, что в них общего. Некоторые состояния могут резко выделяться. Впоследствии вам может пригодиться тот или иной математический навык, так что задайте себе вопрос: что было в задаче такого, что вам может пригодиться позднее. Может статься, вы дойдете до такого момента, когда сформулируете общий математический вопрос, который приведет к новой теории или новому навыку. Именно это состояние, включающее как анализ, так и расширение, стимулирует рост вашего монитора.

Выводы

Накопление ключевых моментов или эмоциональных снимков — это долгосрочный процесс. И он требует некоторой осторожности. Есть соблазн оглядеть свою работу и раскритиковать себя за то, что неумно себя вели, что потратили время зря или застряли несколько раз в аналогичной ситуации. Если вы высказываетесь на этот счет легко и в юмористическом ключе, это одно дело; если же вы сами себе выносите приговор, то это сплошной негатив. Не так просто менять свои личные качества. Подобные изменения могут произойти только в результате внимательного и спокойного наблюдения за собой, а не с помощью жестокой самокритики. С опытом у вас будет накапливаться все больше эмоциональных снимков, вы научитесь лучше узнавать состояние, в котором в данный момент пребываете, а потом, в определенный момент вы четко осознаете, что вы изменились. Другая крайность суждения — это приукрашивание, что бывает не менее вредно. Восстанавливая, что «должно было произойти», добавляя детали, которых нет в снимках, или пытаясь быть чрезмерно точным и педантичным, разграничивая состояния, вы лишь запутываетесь и тормозите рост вашего личного монитора.

Не спешите усвоить все семь состояний, это дело непростое. Ведь они связаны с ощущениями, а ощущения имеют обыкновение ускользать и выразить их словами трудно. Необходимы время и практика, чтобы наполнить их смыслом. Кроме того, хочется думать, что в каждом вопросе состояния плавно перетекают из одного в другое, но ведь это — психологические состояния, а с ними не все так просто. Они быстро сменяют друг друга, порой нарушая порядок; если же пытаться связать их правилами, то это лишь мешает вам развернуть их смысл. Следующий рисунок соотносит состояния с процессами и этапами из предыдущих глав.



ГЛАВА 8

САМ СЕБЕ ВОПРОШАЮЩИЙ

Эта глава посвящена вопросам. В предыдущих главах я поставил перед вами ряд математических задач и структурировал свои советы с помощью вопросов, которые вы должны научиться задавать себе сами. Откуда берутся эти вопросы и какой в них толк? Подробно мы обсудим — это в данной и следующей главах, а краткий ответ таков: математическое мышление это отношение или, если угодно, подход к окружающему миру. Математические вопросы, которые я перед вами ставил, сами по себе не имеют большой ценности. Они были выбраны с тем, чтобы пролить свет на основные процессы. Работая над этими вопросами и впитывая полученный опыт, вы, во всяком случае, накопите богатый практический арсенал, который послужит вам в будущем. Если это будущее подразумевает работу над подобными вопросами, поставленными другими людьми, и если вы получаете от этого удовольствие, то книга написана незря. Однако это только начало. Вы можете намного больше. Как только вы обретете уверенность в себе, вы поймете, что готовы решать проблемы, причем и те, что не являются сугубо математическими и настолько четко структурированными. Дело в том, что благодаря советам из предыдущих глав вы можете предпринимать конкретные действия практически в любой ситуации, даже если вы не понимаете исходный вопрос! По крайней мере, вы можете получить необходимую информацию, чтобы приступить к экспериментированию. Такой подход свидетельствует о том, что у вас формируется отношение МАТЕМАТИКА-МЫСЛИТЕЛЯ, в основе которого лежат вопросы.

В этой главе речь пойдет о том, как научиться понимать, что каждого из нас окружают мириады интересных вопросов. В первом разделе рассматривается многообразие вопросов — от конкретных до самых общих; во втором мы поговорим о том, откуда берутся вопросы, и о том, что и как мы замечаем; в третьем разделе обсудим, что притупляет природную любознательность и как с этим бороться.

Спектр вопросов

Большинство вопросов из предыдущих глав были сугубо конкретными, практически не оставляя сомнения по поводу того, какой ответ от вас ждут. Например:

- «*Палиндромы*»: все ли четырехзначные палиндромы делятся на 11?
- «*Лоскутное одеяло*»: сколько всего цветов потребуется...?
- «*Завтрак дам*»: сопоставьте имена и фамилиями.
- «*Шустрые тосты*»: какое минимальное время необходимо, чтобы поджарить три тоста?
- «*Булавки с нитками*»: сколько кусков нитки потребуется в общем случае?
- «*Чехарда*»: каково минимальное число ходов?
- «*Гипотеза Гольдбаха*»: все четные числа больше двух есть сумма двух простых чисел.
- «*Последовательные суммы*»: какие именно числа можно записать как...?
- «*Пчелиная генеалогия*»: сколько всего предков у мужской особи пчелы?
- «*Разбиение квадрата*»: какие числа «хорошие»?

Однако не все вопросы были настолько конкретными. Особенно выделяются среди них вот эти два:

- «*Покрашенные покрышки*»: какой след я увидел?
- «*Конверты*»: как сделать его своими руками?

Менее конкретные вопросы допускают большее число интерпретаций по сравнению с другими. В таких вопросах не совсем ясно, что именно требуется (на самом деле иногда конкретного ответа может и не быть), и поначалу трудно себе представить, что надо предпринять, во всяком случае, пока не приступишь и не углубишься в вопрос. Именно на эти вопросы я хочу обратить ваше внимание. Один из способов обрести уверенность — это практиковаться в расширении всех сугубо конкретных вопросов, которые вам попадутся. Очень часто конкретный вопрос необходимо привести в более общий вид. Цель этой главы — направить вас на путь генерирования собственных вопросов!

Можно сказать, что вопросы распределяются в спектре от очень ограниченных до в высшей степени обширных. Некоторые из промежуточных типов представлены ниже:

– правильный ответ известен, и вам нужно его найти;
– ответ известен, а процесс достаточно интересен, чтобы предложить вопрос другим;
– предполагаете ответ, известен подход к подобным вопросам; предполагаете подход;
– кажется интересным, но не предполагаете конкретного подхода;
– вопрос невнятный или допускает обобщение;
– вопроса как такового нет, но ситуация привлекательная.

Несмотря на большую степень свободы, как правило, именно обширные вопросы, допускающие много решений, представляют бо́льшую трудность, нежели конкретные вопросы с четкой формулировкой. Похоже, что свобода привносит неопределенность, а вместе с ней и неуверенность в себе. Более того, существует большая разница между вопросом, который возник у вас, и тем, который кто-то вам предложил.

Если из самой природы и формулировки вопроса понятно, что тот, кто задает вопрос, знает на него ответ, то мыслительный процесс превращается в своего рода соревнование. А я могу также быстро и элегантно найти решение? С другой стороны, вопросы, определенные не так жестко, дают возможность следовать в другом направлении, основываясь на *ваших* интересах и на том, что *вы сами* обнаружили. Неоднозначные вопросы, допускающие много решений, часто требуют много времени — на исследование, поиск моделей или сюрпризов, причем за всем этим не стоит конкретной цели, кроме общего интереса или любопытства из желания понять, что же происходит. Как только конкретный вопрос или предположение сформулированы, нет необходимости ими заниматься, если появятся более интересные. Другое дело — конкретно поставленный вопрос, который направляет и ограничивает ваше мышление. Более того, размышления по поводу неточных вопросов подогреваются вашим интересом, а по поводу конкретных, как правило, продиктованы внешними обстоятельствами и духом соперничества.

Даже если вы проводите исследование широкого профиля, весьма полезно формулировать конкретные вопросы и сосредоточивать на них внимание. Разница в том, что теперь это ваши вопросы, а не чьи-либо еще. Тогда в результате экспериментирования и обобщения вы получаете промежуточные цели, которые обогащают исходный вопрос. Накапливая один за другим такие вспомогательные вопросы, вы получаете опыт узнавания и формулирования конкретных задач, а также понимания того, как эти задачи, группируясь, в результате дают способность проникновения в суть явления. Вот почему я настоятельно рекомендую расширять свои результаты на более общий контекст. Даже конкретные вопросы, которые я перед вами ставлю, можно переносить в более общий контекст.

Только когда результат вписывается в более общий контекст, вы начинаете понимать его значимость.

Расширение вопросов — хороший способ начать замечать и ставить свои собственные вопросы.

Некоторые «сомнительные» обстоятельства

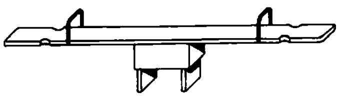
Такие вопросы, как «*Конверты*» (глава 2, стр. 58) и «*Покрашенные покрышки*» (глава 4, стр. 94), возникли во время повседневных событий, и я ставил их перед вами по мере того, как они зародились внутри меня. Хотя все мы каждый божий день встречаемся с уймой потенциальных интересных вопросов, как правило, они так и остаются незамеченными и еще реже мы их формулируем.

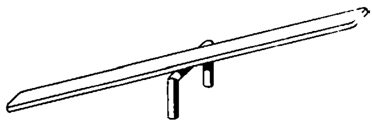
В главе 7 я предположил, что мышление провоцирует удивление или противоречие. Это происходит, когда что-то изменяется и когда я *осознаю*, хотя бы смутно, что что-то *изменилось*. Например, одни люди замечают переставленную мебель, новый дизайн автомобиля или новую прическу и комментируют это, а другие не замечают, во всяком случае, не высказываются на этот счет. Я сторонник постановки вопросов, которые, являются своего рода формой замечания.

Приведу пример.

Качели

Гуляя со своими чадами на детской площадке, я обратил внимание, что все качели находятся в горизонтальном положении. Во времена моего детства такие качели были примитивны: доска на точке опоры. В состоянии покоя один конец всегда был поднят. У меня тут же возникло непреодолимое желание исследовать новомодные качели.

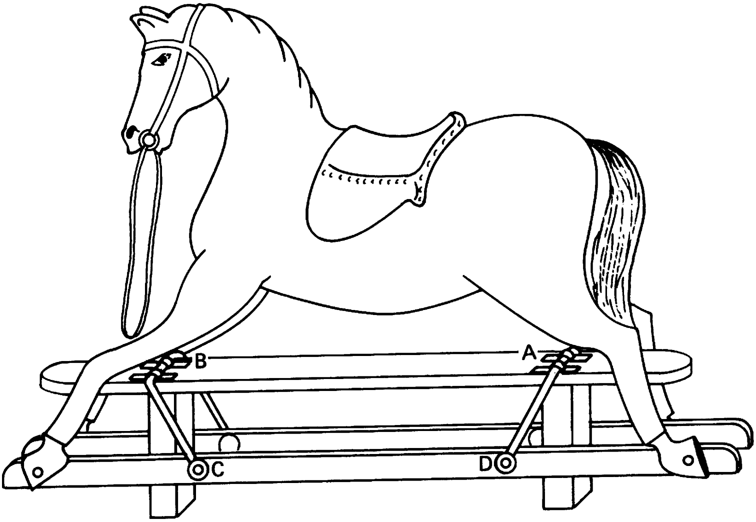




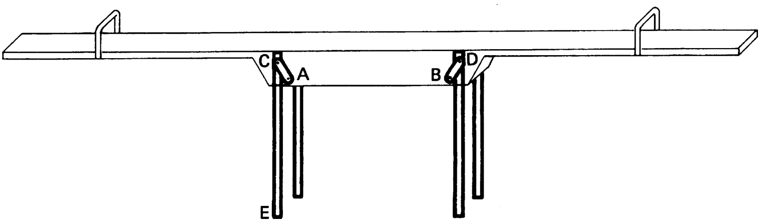
Итак, вопросы уже начались. Еще не взглянув на механизм, я думал о том, что я знаю и что могу увидеть, и понял, что у меня есть предположение. Оно еще не было четко сформулировано, и потом я пожалел, что не остановился и не придал ему более определенную и четкую форму. После осмотра механизма появились новые вопросы:

> *Почему именно такая конфигурация? Другими словами, допустим, меня попросили сконструировать такие качели, на какие вопросы мне бы предстояло ответить?*
>
> *Какова траектория одного из сидений?*
>
> *Зачем кому-то пришло в голову изменять конструкцию качелей?*

Внезапно мне пришло в голову, что у этого механизма точно такой вид, как у лошадки-качалки, которую я видел в доме у моего друга, только размеры другие. Я тогда отметил про себя механизм, но не придал этому значения. Сходство было настолько поразительным, что я не мог не заинтересоваться этим фактом.



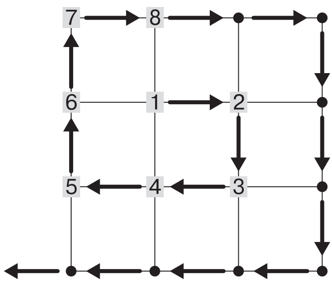
«*Качели*» как вопрос возникли в результате двух моментов: *изменение* в новом по сравнению со старым и *удивление* от узнавания одной и той же структуры в двух внешне разных контекстах. Разумеется, если вы видели или играли с такими качелями сами, это большое подспорье. Все мы с большей готовностью реагируем на удивление или возможность, возникающие из нашего собственного опыта, и, как правило, это подразумевает манипулирование или игру с чем-либо, будь то физические предметы, числа, схемы или символы. Главное — чтобы они были для нас настоящими. Они должны иметь сущность, как в предметном мире, так и в мире идей. Они должны быть удобными для манипулирования как физически, так и ментально.



В математике возникает много интересных вопросов, которые даже если не представляют практической ценности, ничуть не менее привлекательны в интеллектуальном смысле. Причина их привлекательности состоит в том, что они резонируют с нашим прошлым опытом и стимулируют любознательность. Некоторые люди предпочитают практические вопросы, результаты которых влияют на их «внешнюю» жизнь, а другие — более абстрактные вопросы. Однако совсем не обязательно быть всем скроенным по одной мерке, поскольку разницы в процессах решения и тех и других вопросов практически нет. Приведу пример ситуации, которая предлагает мыслителю, склонному к «абстракциям», богатейшие возможности.

Числовые спирали

Числа записаны последовательно в виде спирали, как видно на рисунке:



Расширьте спираль и запишите вопросы, которые приходят вам в голову.

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Ищите модели и пытайтесь делать прогнозы.

Поделюсь с вами вопросами, которые пришли в голову мне:

Какие числа появляются на диагоналях, проведенных через 1?

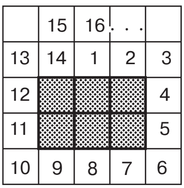
Какие числа появляются в конкретных строках и столбцах?

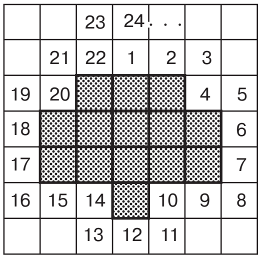
Где появится число 87? Обобщайте!

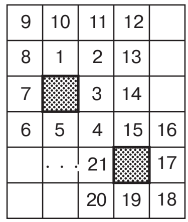
Где четные числа, нечетные, кратные трем?

Где квадраты чисел?

Особенно меня удивила модель расположения квадратов чисел, и я подумал, почему это именно так. Я начал пробовать с другими спиралями на клетчатой бумаге, исключая часть клеток, как видно на рисунке:





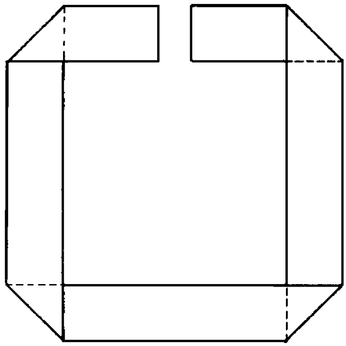


Было много примеров между этими тремя, причем каждый следующий был более интригующим, чем предыдущий. Мне пришлось извести изрядное количество бумаги, прежде чем я сумел сформулировать, что именно я имел в виду под этими более общими спиралями; причем каждый новый чертеж иллюстрировал предположение относительно наиболее общей формы спирали, которая сохраняет свойство данного положения квадратов чисел. (Я намеренно выражаюсь несколько туманно, дабы разжечь в вас интерес к самостоятельному исследованию!) Потом я занялся подтверждением своего предположения, что одна и та же модель будет прослеживаться всегда!

Вопросы в «*Числовых спиралях*» подразумевают поиск связей между числами и их позициями — чтобы найти краткие общие выражения для прогноза, какие числа окажутся в данных позициях. Ситуация в следующем задании, напротив, требует более тонкого поиска модели.

Бумажные банты

Возьмите тонкую полоску бумаги длиной примерно 11 дюймов и шириной в 1 дюйм (28 см на 2,5 см) и сложите, как показано на рисунке.



Соедините концы, чтобы получился бант.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО СЕЙЧАС — ИЩИТЕ ВОПРОСЫ!

«*Бумажные банты*» зародились в один прекрасный день, когда я крутил в руках полоски бумаги. Мне приходили в голову разные идеи, но эта показалась *мне* особенно интересной. Я заметил, что полоска, которую я сложил, в одном месте перекрутилась, и мне пришел в голову вопрос: могу ли я предсказать число перекруток, зная всего лишь последовательность и порядок (сверху или снизу, см. рис.) перегибания полоски.

В большинстве случаев математическое мышление концентрируется на закономерности того или иного рода, хотя закономерность можно толковать широко. Конфигурация, как качели, геометрическая схема или последовательность чисел могут резонировать с прошлым опытом и подсказывать вопросы типа следующих:

Сколькими способами?
Какое наибольшее/наименьшее?
Что собой представляет подлежащая структура?
Будет ли работать тот же метод в более общем случае?
Почему это так?
Почему в другой ситуации это не так?
Почему так происходит?
Какие здесь есть модели?
Откуда взялись эти числа?

Что случится потом?
Могу ли я предсказать, что случится в общем случае?

В более общей ситуации вопросы типа

Частным случаем чего является данная ситуация?
Что тут происходит?

свидетельствуют о желании удалить несущественные детали и сосредоточиться на сути. Подобные вопросы на самом деле являются проявлением отношения, а не набора типичных вопросов, и вскоре я остановлюсь на составляющих этого отношения.

Не существует особых мест, где можно искать вопросы; на самом деле они встречаются повсюду. А мы всячески их избегаем! Часто вопросы возникают по необходимости:

Нужно взять машину напрокат. Что выгоднее: платить по дням или за неделю?
Мне лучше поменять машину в этом году или в следующем?
Как дешевле отправить рождественские подарки за границу: одной большой посылкой или несколькими маленькими?

Вопросы также возникают из природной любознательности:

Дата 01.11.10 (по английской системе: день, месяц, год) — это палиндром. Когда наступит день следующего палиндрома? А по американской системе (месяц, день, год)? А по международной (год, месяц, день)?
Сколько разных типов рисунка обоев существует?
На каком расстоянии должны быть расположены уличные фонари?

Как только вы начнете замечать их, возникнет очень много вопросов, на которые математическое мышление поможет вам ответить.

Замечаем

Я уже говорил, что мы замечаем изменения и удивляющие нас противопоставления. Поскольку они зависят от нашего прошлого опыта, обучения, интересов, знаний и данного психологического состояния, каждый момент, когда ты что-то замечаешь, для тебя уникален. Например, архитектор и музыкант обратят внимание на разные вещи в силу своего образования. Когда я возвращаюсь из очередного путешествия, я часто замечаю упоминания этого места в газетах и журналах. Такое происходило и происходит так часто, что наводит на мысль, что это не может быть простым совпадением, из чего я делаю вывод: мои новые интересы заставляют меня осознавать то, что раньше я не замечал. Пока я не занялся ремонтом кровли, я никогда не замечал, насколько разнообразной формы бывают крыши и скаты, а теперь, благодаря новым знаниям, я часто замечаю детали, которые многие упускают из виду. Состояние уверенности и спокойствия позволяет замечать и запоминать детали, которые в состоянии возбуждения или депрессии вы наверняка бы оставили без внимания. Именно поэтому, когда вы читаете о том, что заметили другие, — это лишь бледное подобие той энергии, которая возникает, если вы сделаете наблюдение самостоятельно.

Способность замечать *можно* развивать, укреплять и совершенствовать. Для этого нужно лишь *желание* замечать плюс запись того, *что* вы заметили. Если вас интересуют подробности, см. Mason (2002). Однако это не значит, что достаточно прогуливаться туда-сюда и задавать праздные вопросы. Вопросы возникают в результате какого-либо действия внутри вас.

Для того чтобы заметить что-нибудь, вроде моих наблюдений в «*Качелях*», «*Числовых спиралях*» или «*Бумажных бантах*», необходимо быть готовым осознавать изменения. Такая готовность возникает в результате действия между состоянием «до» и «после». Однако одних только составляющих «до» и «после» недостаточно: должно быть что-то, что их связывает воедино. По большей части мы замечаем, если какое-то ощущение или впечатление, какое-то новое восприятие, например горизонтальная доска качелей, внезапно (и случайно) противопоставляется многообразию прошлых впечатлений или восприятий, как воспоминание о качелях из детства. Именно это противопоставление впечатлений и вызывает удивление или осознание изменения. Другими словами, вы испытываете внутреннее напряжение, конфликт или противоречие.

Этот вид действия зависит от новых и старых впечатлений, каким-то образом противопоставленных друг другу. По большей части новое впечатление (горизонтальная доска качелей) просто фиксируется где-то в закоулках памяти, вовсе не рядышком со старыми впечатлениями (качели из вашего детства), и поэтому замечания не происходит. Тем не менее у каждого из нас где-то в подсознании содержится необходимая для вопросов информация в виде взаимно противоречащих впечатлений, которые хранятся каждое в своем «отсеке». Иногда новое впечатление внезапно (и опять же случайно) образует мостик между двумя взаимно противоречащими воспоминаниями, и в результате происходит восприятие, или осознание, в виде напряжения. Оно может развиться в сформулированный вопрос.

Хотя вопрос порождается внутренним напряжением, из этого отнюдь не следует, что напряжение вопроса получит свое воплощение. Энергия может быть высвобождена некоторым иным способом, например смехом или какой-то активностью, а вопрос так и не возникнет. Даже если напряжение разрядится вопросом, по своей сути само действие случайное.

Однако совсем необязательно быть зависимым от случайных противопоставлений. Новое впечатление и некоторые старые впечатления в запасниках можно сознательно совместить, если у вас есть желание понимать. Новое впечатление непосредственно воздействует на старую информацию при посредничестве сознательного намерения. Создается напряжение, и рождается вопрос. Следовательно, представляется разумным культивировать намерение замечать и задавать вопросы, быть заинтересованным и удивляться. Умение замечать — это не столько то, что мы *делаем*, сколько результат отношения или намерения.

Препятствия «вопросительному» отношению

Всегда есть соблазн сказать:

> *«Я не из тех, кто задает вопросы»,*

но такая позиция это всего лишь один из способов, которым все мы пользуемся, когда хотим избежать неприятной темы. На самом деле, если есть желание, каждый может стать «одним из тех». Речь идет о том, чтобы занимать активное, небезразличное отношение к миру вокруг нас. Подобно тому, как предположение — это не столько деятельность, сколько отношение к своим мыслям или к утверждениям других, так и вопрос — это отношение, или своего рода подход к жизни.

Еще одна распространенная причина, по которой не задают вопросы, — это

«какой смысл задавать вопросы, если я не могу дать на них ответа».

Если вы решаете, что не можете ответить на вопрос, даже не подступившись к нему, — это признак неуверенности в себе, но не достаточно веская причина для того, чтобы даже не попробовать. Главная цель этой книги — объяснить, чем именно надо заниматься, как только вы признаете, что застряли. Если вы восприняли эти советы всерьез, то наверняка заметили, что ваша уверенность в себе, когда вы решаете задачи, растет. Уверенность происходит от успеха и понимания, ЧТО следует делать, даже если вы понятия не имеете о том, что происходит, или чем все это обернется. Оба эти источника уверенности в себе неразрывно связаны с активным подходом к окружающему миру; в этом подходе есть много общего с отношениями, которые порождают вопросы. Будьте осторожны: не перепутайте активный подход с чрезмерной активностью. Некоторые люди изолируют себя от вопросов своей экстремальной активностью настолько, что никогда не анализируют. Эта чрезмерная активность по своей сути негативна и не способствует математическому мышлению, даже если активность эта в значительной мере математическая. Правда, такой человек в состоянии до определенной степени развить свои математические способности, но я считаю, что намного важнее научиться понимать мыслительные процессы, нежели просто аккумулировать решения конкретных задач.

Более того, я неоднократно подчеркивал, как важно научиться принимать состояние, когда вы застряли, и надо постараться учиться на этом опыте. Нет ничего страшного в том, что вы не в состоянии продвигаться вперед, решая задачу, и вы получаете огромную пользу, когда работаете над вопросом, перефразируете его, дистиллируете, обдумываете в деталях и различным способом видоизменяете. Благодаря всему этому в будущем вы распознаете свежую информацию и новые методы, которые помогут вам продвинуться вперед еще дальше. Это также научит вас обращаться за помощью к экспертам, задавать в процессе исследования разумные вопросы и адекватным образом пользоваться полученными ответами.

Еще одна причина, по которой не задают вопросы, — это леность ума. Как и все формы лени, она подразумевает, что тот, кто ей подвержен, находится на грани возможности. Представьте себе ситуацию: вы чувствуете себя усталым и не хотите ничего делать, как вдруг кто-нибудь к вам приходит и предлагает заняться чем-то новым, и внезапно вы ощущаете прилив энергии. То же самое происходит, когда вы приступаете к вопросу, что неизбежно приводит к углублению в него — к состоянию, в котором генерируется энергия и отступает усталость. Таким образом, нежелание задавать вопросы подобно закрашиванию двери, которую вы даже не попытались открыть. Вы даже не представляете, чего вы себя лишаете!

Квинтэссенция моих аргументов заключается в следующем: те, кто говорят, что они не любят задавать вопросы, утратили связь с природной любознательностью, которая была у них в детстве. Взрослые не только внушают детям, что задавать вопросы не следует, но и передают атмосферу напряженности из-за неспособности отвечать на вопросы. Подобным образом мы формируем в детях отношение

> *«не следует задавать вопросы, на которые я не могу ответить».*

А на самом-то деле вопросы, на которые я *могу* ответить, как правило, менее интересны, чем те, в которых я сомневаюсь. Если я *знаю*, что не смогу продвинуться вперед, то обычно отношу эти вопросы к неинтересным, но почему? Например, если у вас сломался автомобиль, у вас может возникнуть отношение безнадежности. Я могу рассчитывать только на специалиста. Однако многие мужчины и женщины обнаружили для себя, что если вникнуть в вопрос, то обслуживание автомобиля — это не так страшно, как может показаться. Кроме того, есть и побочные положительные эффекты: если вы имеете представление о том, что конкретно необходимо сделать с вашей машиной и каким образом это происходит, — это большой плюс. Приведу еще один более подробный пример.

Ребенок моего друга играет на флейте, и в один прекрасный день одна нота начала упорно фальшивить. Родители, весьма рукастые и технически продвинутые люди, сделали вывод, что во время чистки сместилась одна из пружинок, но не изъявили желания что-либо делать. Они заявили, что не хотят портить инструмент. Я заподозрил, что они не уверены в том, что их ребенок верно оценил проблему. Я сравнил наши две флейты визуально и на слух, и мы с ребенком совместными усилиями выяснили, какой именно клапан не работает. Всего через пару секунд мы поставили на место пружинку, положение которой отличалось от всех остальных, и устранили причину фальши. Зачем я поведал вам эту историю? Дело в том, что я не специалист по ремонту флейт, просто имею общее представление о том, как она устроена, поскольку немного играю. Однако у меня хватило решимости взглянуть, в чем дело. Обратите внимание: я не был уверен, что сумею *починить* флейту. Но я понимал, что кое-что *сделать* могу (я начал с экспериментирования!), поэтому я приступил и углубился. В худшем случае я мог рассчитывать на то, что смогу объяснить специалисту причину неисправности.

Любопытно, что именно в то утро я со страшной неохотой возился с нашей машиной: у нее снова барахлило зажигание, причем после техобслуживания на сервисной станции. Мне пришло в голову взглянуть на одно-единственное место, о котором я много знал, — на свечи зажигания. И представьте себе — у одной из свечей был слишком узкий зазор. Проблема с регулировкой момента зажигания была решена. У меня нет сомнения в том, что именно облегчение и радость при мысли, что не надо снова ехать на станцию техобслуживания, сопровождавшие меня весь день, помогли мне разобраться с флейтой. Для меня это яркий пример кумулятивного эффекта успеха и уверенности.

К сожалению, как правило, успех измеряют с точки зрения достижения цели, попутно делая вывод, что если цель не достигнута, то это не успех, а поражение. Вот почему я неустанно повторяю: пребывание в тупике — это достойное занятие. Я считаю, что наш вечный поиск уверенности и поддержки не увенчивается успехом именно из-за природы наших целей. Мы настолько зациклены на желании получить *ответ*, притом быстрее всех, да еще и самый элегантный вариант решения, что в конечном итоге просто притягиваем неудачу.

Если мы видим цель не как конечный продукт, а как позицию, то у нас больше шансов получить уверенность в себе без страха стать неудачником. Если превыше всего ценить активное участие в мыслительном процессе, то непременно появятся и уверенность, и успех. В таком случае успех в контексте вопроса можно интерпретировать как желание понять вопрос, изменить, прояснить и увидеть в более широкой перспективе. Необязательно требовать ответа. На самом деле наиболее плодотворными, как правило, являются именно те вопросы, ответа на которые нет! Это утверждение справедливо не только для такой науки, как философия (например: в чем смысл жизни?), но и для математики.

Выводы

Способность ставить вопросы можно в себе развить или, скорее, выпустить на волю, выражая и утверждая намерение замечать и задавать вопросы. Можно выделить следующие основные составляющие:

- замечать вопросы, когда они возникают;
- знать, что ДЕЛАТЬ, когда вы застряли;
- довольствоваться прояснением и, может быть, формулированием предположения;
- искренно хотеть узнавать как можно больше об окружающем мире и себе самом.

Мы замечаем неожиданное или то, что изменяется. Новая картина на стене через год воспринимается как обои. Задача в том, чтобы видеть вещи свежим взглядом. Иногда есть пробел во внутреннем диалоге и внешней стимуляции; тогда есть место для вопросов. Даже эта артикуляция сбивает с толку, поскольку к моменту, когда я осознаю вопрос, «опрос» уже начался. Происходит действие. Напряжение спадает. Я хочу принимать участие!

Другой подход состоит в том, чтобы воспринимать все вокруг себя просто как фон, следуя только теми маршрутами, которые дают возможность избежать неопределенности, и принимать все, не ставя перед собой задач, не спрашивая, почему и как.

Лично у меня в основе моего отношения только один вопрос. Время от времени у меня в голове словно щелкает:

что это тут происходит?

И вслед за этим чередой следуют все новые и новые вопросы. Для меня каждый вопрос — это конкретизация моего исходного вопроса. Вполне возможно, что для вас этот вопрос не имеет такой силы, поскольку каждый человек должен идентифицировать свое личное обобщение!

Что свойственно математическому формулированию вопросов? Типичные математические вопросы имеют следующий вид:

Сколько...?
Сколькими способами...?
Какое наибольшее/наименьшее...?
Какими свойствами обладает...?
Что общего в (нескольких разных событиях, фактах, ситуациях)?
Где я видел нечто подобное раньше?
Какая здесь основная мысль?
Почему это работает?

Некоторым людям нравится работать над задачами, поставленными другими; может быть, причина в том, что им нравится чувство уверенности в решаемости задачи, и кто-то еще считает ее интересной. Другие предпочитают корпеть над известными нерешенными задачами. А есть и такие, кому нравится исследовать самому, задавая свои собственные вопросы. Есть много таких, кто получает удовольствие от переваривания готовых решений других, усовершенствования и обработки в более доступный вид для широкой аудитории. Все эти занятия представляют ценность. Но, пожалуй, полезнее всего сбалансированный подход!

Следующие задания из главы 10 либо имеют много решений, либо допускают значительное расширение:

«Переворачивание чашек»,
«Игральная кость»,
«Вынос квадратов».

См. главу 11, где есть другие вопросы, входящие в программу обучения, каждый из которых можно значительно расширить.

Справочная литература

Mason, J. (2002) *Researching Your Own Practice: The discipline of noticing.* London: Routledge Falmer.

ГЛАВА 9

РАЗВИВАЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ

Целью написания этой книги было отправить вас в путешествие, в результате которого вы снова откроете в себе способность мыслить математически. Не удивляйтесь, я говорю «снова откроете», потому что этот процесс сродни тому, что происходит, когда дети открывают мир и учатся понимать его, в особенности учатся говорить (Gattegno, 1963). Я просто напомнил вам, что вы *умеете* мыслить математически, а чтобы вы в этом убедились, извлек на свет божий необходимые процессы, отряхнул от пыли и предъявил вам. По мере того как растет ваше осознание этих процессов, растет и ваш выбор. Теперь, когда путешествие уже началось, вы можете двигаться дальше сами — к более глубокому пониманию математического мышления и отношений, которые его стимулируют. Любопытно, что, когда вы учитесь открывать, использовать и развивать свое математическое мышление, вы становитесь восприимчивее к математическому мышлению других. Вы можете предложить другим инструменты, которые вы собираете, чтобы помочь себе. Используемые в книге методы для усовершенствования владения своим математическим мышлением можно перенести на развитие его и в других. Однако эти методы зависят от способности провоцировать, поддерживать и укреплять этот подход. Именно об этом и пойдет речь в данной главе, и поэтому она будет особенно полезна преподавателям, родителям и всем, кто помогает другим развивать математическое мышление.

Я начну с обзора и анализа математического мышления и с того, как его можно улучшить. Затем расскажу, как его провоцировать, поддерживать и укреплять в других.

На эффективность вашего математического мышления влияют следующие три фактора:

1. Компетентное использование процессов математического исследования;
2. Уверенное управление эмоциональными и психологическими состояниями и использование их себе во благо;
3. Понимание содержания математики и, в случае необходимости, сферы ее приложения.

В центре внимания настоящей книги первые два фактора, но не потому, что знание содержания математики неважно, а потому, что, как правило, именно третьему фактору уделяют максимум внимания. Зачастую его представляют как *единственный* важный фактор. На мой взгляд, чтобы помочь людям обрести более эффективный и творческий подход к математическому мышлению, необходимо привлечь внимание к процессам исследования и эмоциональным и психологическим состояниям, которые его провоцируют, и сконцентрироваться именно на этих факторах. Более того, чрезмерная сосредоточенность на содержательном аспекте математики может препятствовать математическому мышлению, которое в первую очередь отвечает за происхождение и применение отдельных аспектов математики. Например, в «*Булавках с нитками*» (глава 3, стр. 78) несколько экспериментов и ряд предположений привели к высказыванию, которое связало число ниток с *булавками* и *промежутками* с помощью наибольшего общего делителя. Понятие наибольшего общего делителя входит в программу обучения математике во всех школах, так что я вполне могу себе представить, как «*Булавки с нитками*» используют формально в качестве иллюстративного примера для объяснения этого математического понятия. В таком случае возможность извлечь мощь этой идеи с помощью математического мышления погрузится в отвлеченное применение. Очевидность обсуждения смысла и признание ограничивающих факторов, которые имеют место в неформальном исследовании, в замкнутом представлении будут утрачены. Я выбирал вопросы, которые требуют минимальных знаний математики, чтобы наконец-то отвлечь ваше внимание от того, *что* вы узнаете о конкретных разделах математики, и направить его на фундаментальные процессы, необходимые для успешного математического мышления.

Улучшаем математическое мышление

План улучшения вашего мышления строится на двух четко различимых, но связанных между собой факторах:

– процессы исследования;
– эмоциональные состояния.

Я начал с того, что представил вам некоторые основополагающие процессы математического мышления:

– экспериментирование,
– обобщение,
– построение предположений,
– убеждение,

которые мы обсуждали в главах 1, 4 и 5. Хотя в качестве основы математического мышления они могут казаться очевидными, для новичка «автоматом» они таковыми не становятся. Чтобы стать компетентным в этих процессах, недостаточно просто работать над задачами. Несмотря на очевидную простоту, эти понятия — тонкая материя; они становятся вам близкими друзьями только после упорной идентификации и особого внимания к их использованию на практике. Это справедливо как для улучшения вашего собственного мышления, так и для поощрения его в других.

Еще более конкретными были советы, заключенные в словах-РУБРИКАХ. Если вы застряли, весьма разумным будет начать с переключения своего внимания, пытаясь исследовать мысли, которые возникают от следующих ключевых слов:

– Что я ЗНАЮ?
– Что мне НУЖНО узнать?
– Как мне это ПРОВЕРИТЬ?

Об этом шла речь в главе 2. В тексте было дано много предложений, проиллюстрированных в вариантах решений. Эти предположения подсказывают, как надо отвечать на такие вопросы и подобные им и как использовать четыре процесса, упомянутых выше. Хотя я постарался структурировать бóльшую часть своих советов с помощью РУБРИК (см., например, схему в конце главы 2), я не предлагаю использовать их напрямую. Советы эти слишком сложные и в любом случае математическое мышление — это сугубо *личное*. Самый надежный источник советов — ваш собственный опыт, и его можно сфокусировать, связывая ключевые идеи с эмоциональными состояниями. Очень важно, чтобы вы придумали свои собственные слова-РУБРИКИ — такие, которые работали бы на вас. Я настоятельно рекомендую на каждом этапе прояснять «ЗНАЮ» и «НУЖНО узнать». Еще раз подчеркну: улучшение математического мышления зависит от следующих факторов:

– работа над вопросами;
– анализ этого опыта.

Именно такой подход, сочетающий *практику с анализом*, я рекомендую, когда вы продолжаете развивать свое мышление или пытаетесь помогать его росту в других.

Математическое мышление улучшится, не только если вы научитесь, как проводить исследование, но и если вы будете узнавать и применять с пользой для себя ощущения и сопровождающие их психологические состояния. На самом низшем уровне вам предстоит научиться управлять негативными эмоциями.

В частности, в главах 3 и 6 я обращал внимание на состояние «застряли». Я делал упор на том, что у него есть положительные моменты и есть способы извлечь из него пользу. Признание этого факта как обычного и приемлемого состояния, связанного с мыслительным процессом, изменяет фокус — от паники

«ПОМОГИТЕ*! Я застрял!*»

до исследовательского интереса

«ЗАСТРЯЛ*! Ну и что же можно предпринять?*»

В главах 5, 7 и 8 я предложил в качестве одного из способов выхода из тупика развивать в себе внутренний монитор, который будет со всей ответственностью следить за вами, ставить вопросы и проверять вас на прочность. И опять-таки такой монитор зависит от практики и анализа. Необходимо узнавать эмоциональные состояния, чтобы монитор мог

интерпретировать и использовать их,

например, напоминая вам о действиях, связанных с «АГА!», или дистанцируя вас от парализующего воздействия состояния «застряли», а также мог *управлять ими,*

чтобы вы сделали шаги, которые в противном случае могли и не совершить, например притормозить, проверить или убедить себя и других.

Мало кто станет отрицать необходимость практики для более глубокого понимания того, что происходит во время решения вопроса, для увеличения арсенала полезных стратегий и для обучения компетентному их использованию. Но без анализа практика сойдет как с гуся вода, не оставив никаких заметных следов. У большинства из нас был подобный опыт. Помню, в школе учитель часто советовал мне нарисовать схему, но, спеша получить ответ, я отмахивался от совета, как от очередной учительской причуды. В результате опыт, который потом мог оказаться бесценным, исчезал бесследно. Теперь я вижу процесс представления вопроса как время для более тесного ознакомления и одновременного накопления информации. Именно анализ представляет собой необходимое сопровождение практики. Анализируя опыт и фиксируя наиболее яркие моменты с помощью эмоциональных снимков, вы можете хранить важную информацию в готовом виде и удобной форме.

Техника улучшения вашего мышления с помощью практики и анализа достаточно проста, но требует времени. Стремительный формат «вопрос–ответ» многих уроков математики — полная противоположность тому, что необходимо для развития математического мышления; равно как и представление, что математическое мышление — результат практики на повторных математических примерах, причем каждый из них надо решить как можно быстрее. На самом деле практика требует достаточно большого времени для независимой работы над каждым вопросом, а качество анализа зависит от времени, потраченного на вдумчивый обзор, — чтобы рассмотреть альтернативы и проследить расширения.

Если вы не поленитесь и вернетесь назад, то убедитесь в том, что необходимое условие для математического мышления — это время и пространство. Время, потраченное на обзор, дает возможность генерировать множество прогнозов. В таком случае можно исследовать богатство вопроса неоднократно и с различных точек зрения. Кроме того, возрастает способность вопроса выступать в роли аналогии,или шаблона, в последующих вопросах. Например, в главе 4 вы впервые встретились с «*Покрашенными покрышками*». Потом они опять появились в главе 5, во время обсуждения способа опровергнуть предположение. А потом в главе 7, в качестве примера догадки. Каждая новая встреча давала возможность взглянуть на «*Покрашенные покрышки*» по-другому. Таким образом, один и тот же вопрос предоставил много возможностей для изменения направления математического мышления:

«Что еще можно узнать?»

существенно отличается от

«Теперь, когда ты закончил, попробуй что-нибудь другое.»

Эффективный анализ зависит от нового отношения, которое в вас развивается; для роста мышления важно не количество решенных задач, а качество мышления в процессе работы над вопросом и во время обзора проделанной работы. В следующих двух разделах речь пойдет о важной и нелегкой задаче — как совершить этот сдвиг в своем отношении и особенно в отношении тех, кого вы хотите научить.

Провоцируем математическое мышление

Хотя я подчеркивал приятные аспекты мышления, это вовсе не означает, что занятие это простое. Для того чтобы заниматься мышлением всерьез и с его помощью познавать новое, необходимы изрядное упорство, поддержка и позитивное отношение к состоянию «застряли».

Давление со стороны социума и тех, кто стоит выше, часто подталкивает нас изображать видимость мыслительного процесса. Например, уважаемый преподаватель может предложить ученикам заняться какой-либо деятельностью. Однако, если внутри учеников не произойдет никакого изменения, ничего сложнее, нежели механическое применение процедур и использование ранее пройденных правил, не получится. Пробел, пространство, пустоту надо осознавать и принимать таким образом, чтобы запустить мыслительный процесс. В качестве такого спускового крючка могут выступать удивление, противоречие, необъяснимое событие. В «*Складе*» естественное ожидание того, что порядок вычисления имеет значение, опровергается первым же экспериментом. Сюрприз! Равнодушие или слабый интерес замеща.т любопытство. Вы концентрируете внимание. Начинается мыслительный процесс. В «*Покрашенных покрышках*» сам вопрос, пожалуй, необычен или достаточно ожидаем, чтобы возбудить необходимое любопытство. Вопрос кажется простым и естественным. Как правило, предположение строится быстро и принимается в соответствии с простотой вопроса. Обсуждение с другими приводит к взаимно исключающим предположениям, и мыслительный процесс становится еще интенсивнее.

Оба эти примера иллюстрируют случаи, где опыт, в результате которого пришли к одной точке зрения, вступает в противоречие с новой информацией или другим впечатлением. Как только возникает противоречие или удивление, как в случае с конфликтующими предположениями в «*Покрашенных покрышках*», происходит действие иного рода. Новое впечатление воздействует на старую точку зрения, и при условии, что мыслитель любопытен и стремится разрешить конфликт, начинается мышление. Вот что я имею в виду, когда говорю, что мышление провоцируется пробелом. Неожиданность конфликтующих данных выдергивает нас из обычного существования в осознание, пусть и преходящее, пробела, пустоты. Это создает напряжение, которое можно выразить:

– познавательно — как «я не понимаю»;
– эмоционально — как чувство напряжения, волнения или даже страха;
– физически, напряжением мышц.

Не путайте напряжение, которое создается между

ВОПРОСОМ *и* МНОЙ

с напряжением, которое провоцируется

«Я ДОЛЖЕН» *(получить хорошую оценку и т.д.)*

и

«Я НЕ МОГУ» *(не знаю, что делать).*

Напряжение между ВОПРОСОМ и МНОЙ сопровождается волнением, которое стимулирует дальнейший интерес. Напряжение «ДОЛЖЕН – НЕ МОГУ» часто вызвано недостатком уверенности, неспособностью мгновенно увидеть ответ или паникой, характерной для атмосферы урока.

Настоящее мышление подразумевает углублениye в вопрос и период детального обдумывания. Этого не случится, если акцент делается на том, чтобы быстро получить *единственно возможный* ответ, а потом заняться чем-то более приятным. В таком случае нет времени для глубокого и продолжительного удовольствия, которое возникает, если есть понимание!

Погружение в вопрос состоит в концентрации внимания на «Я ЗНАЮ» и «МНЕ НУЖНО узнать», с чего начинается перекидывание мостика через пробел (или пропасть) с помощью какого-либо конструктивного занятия. По мере углубления в вопрос напряжение перемещается с «ВОПРОС–Я» на «ЗНАЮ–НУЖНО». Новое напряжение создает цепочки «АГА!» и «ЗАСТРЯЛИ!» — словно искры летят над пропастью, то исчезая, то вспыхивая вновь. Каждое «АГА!» — это проявление связи между «ЗНАЮ» и «НУЖНО», которая после проверки может обернуться ничем, и тогда предстоит снова обдумывать все в деталях, пока не вспыхнет новая искра. Во время длительного и неоднократного обдумывания содержание «ЗНАЮ» и «НУЖНО» может измениться, давая надежду, что пропасть станет уже. Таким образом, исходный вопрос может претерпеть изменения, он может быть конкретизирован самыми различными способами, обобщен или полностью изменен. Мое внимание может переключиться на подобный или аналогичный вопрос, который, по-видимому, обещает больше возможностей.

Если напряжение слишком велико, я могу так и не приступить. Иногда в результате работы над вопросом пробел между «ЗНАЮ» и «НУЖНО» на самом деле увеличивается, как, например, в на первый взгляд простом вопросе типа «*Итерации*», и простой вопрос превращается в сложный. Когда пробел слишком велик и искра не может перепрыгнуть с ВОПРОСА на МЕНЯ, напряжение может пропасть, и я потеряю интерес. С другой стороны, чрезмерное напряжение может препятствовать мышлению или привести к неоправданно поспешному штурму, ведущему в тупик. Ведь все мы такие разные. Вы должны научиться распознавать последствия своего напряжения и учитывать их, а также уважать и учитывать особенности тех, с кем вы работаете или кому преподаете.

Поддерживать мыслительный процесс во время периодов фрустрации — дело нелегкое. Необходимо воспринимать нерешенный конфликт, парадокс или непоследовательность как личный вызов, кроме того, нужна уверенность в себе, чтобы этот вызов принять. Если преподаватель понимает это и небезразличен к интересам студентов, то он выберет именно такие вопросы, которые провоцируют мышление.

Помогаем математическому мышлению

Мышление происходит не в вакууме. Познавательная и эмоциональная атмосфера воздействует на ваше мышление, осознаете вы это или нет. Если вы хотите быть математиком-мыслителем, вам нужна уверенность в себе, чтобы проверить свои идеи и адекватным образом разобраться со своими эмоциональными состояниями. Чтобы быть уверенным в себе, необходимо убедиться на своем опыте, что сила мышления умножает ваше понимание. Только ваш личный опыт и анализ могут сделать это.

Анализируя свои успехи, пусть даже невеликие, вы умножаете уверенность в себе. Особенно важно, чтобы преподаватель понимал значение уверенности в себе и создавал такую обстановку, чтобы каждый ученик добивался хотя бы маленьких успехов. Эффективна групповая работа, и крайне важен выбор соответствующих вопросов.

Атмосфера, способствующая росту уверенности, необходима, но не достаточна. Для того чтобы математическое мышление расцвело пышным цветом, необходимо не только обучение, но и расширение. Для создания такой атмосферы требуются три составляющие. Они необходимы для вашего собственного математического мышления. Они также важны, если вы воздействуете на математическое мышление других. Итак, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АТМОСФЕРА — это

– вопросы;
– вызов;
– анализ.

Поскольку ключевое слово — это уверенность, то необходимое отношение можно кратко выразить как «*я могу*».

ВОПРОСЫ:

Я могу {
идентифицировать вопросы для исследования,
ставить под вопрос свои допущения,
обсуждать значения терминов.

ВЫЗОВ:

Я могу { строить предположения,
искать аргументы для подтверждения или опровержения, проверять, модифицировать, изменять, обсуждать значения терминов.

АНАЛИЗ:

Я могу { быть самокритичным,
предполагать или оценивать разные подходы,
сдвигать, снова обсуждать, менять направление.

С первых лет жизни дети могут развить способность ставить вопросы, принимать вызов и анализировать. Однако их надо поощрять и укреплять в этом. Их любопытство необходимо пестовать, исследовательский потенциал структурировать, а уверенность в себе поддерживать. Если у вас подобного опыта не было, вам нужно его для себя создать. Культивируйте умение задавать вопросы, которое могло притупиться вследствие сверхсознательного доверия методам и фактам. В главе 8 я подчеркнул разные уровни «вопросительного» отношения, которые помогут упрочить вашу уверенность и навыки для подпитки вашего математического мышления. Воспользуйтесь ими и поставьте под сомнение свои собственные утверждения и утверждения других, ищите обоснования всему и развивайте здоровый скептицизм. Помните: чтобы вопросы представляли ценность, они должны быть адекватными. Если вы учите других, следите за тем, как часто вы предоставляете возможность мыслить *им*, формулировать свои собственные вопросы, ставить под сомнение предположения и анализировать то, что сделано, а что еще нет.

Полистайте книгу, и вы убедитесь, что именно такая атмосфера и была создана. Я взял ВОПРОСЫ, ВЫЗОВ и АНАЛИЗ как наиболее естественный способ начать исследование. Теперь, пока эта памятка свежа у вас в голове, вернитесь к задачам из предыдущих глав и посмотрите, может, новые вопросы, сомнения и анализ изменят некоторые из ваших решений.

Например, в «*Палиндромах*» (глава 1, стр. 23) я бы мог остановиться на предположении, что каждый последующий палиндром можно получить из 1001 добавлением 110. Мой внутренний монитор был активен и предложил встречный пример. Мое предположение поставили под сомнение, и я сделал другое, более успешное. В классе с детьми можно поощрять подобную практику, сделав ее частью опроса, ставя под сомнение ответы и приводя встречные примеры, и в результате появится привычка, с помощью которой вырастет внутренний монитор. Стоит формулировать предположения как гипотезы и оставлять их в таком виде, даже если вы не представляете, где можно их испытать. Ценен сам опыт построения предположений. Есть существенная разница между атмосферой, где от детей ожидают правильных ответов, и той, где делают предположения, ставят их под сомнение и видоизменяют, где главное требование — это

«Убеди!» (Сначала себя, а потом меня!).

Только там, где атмосфера строится вокруг таких вопросов:

«Как мне это интерпретировать?»
«Почему я делаю такое допущение?»
«Когда это так, а когда не так?,»
«Что я имею под этим в виду?»,

развивается математическое мышление.

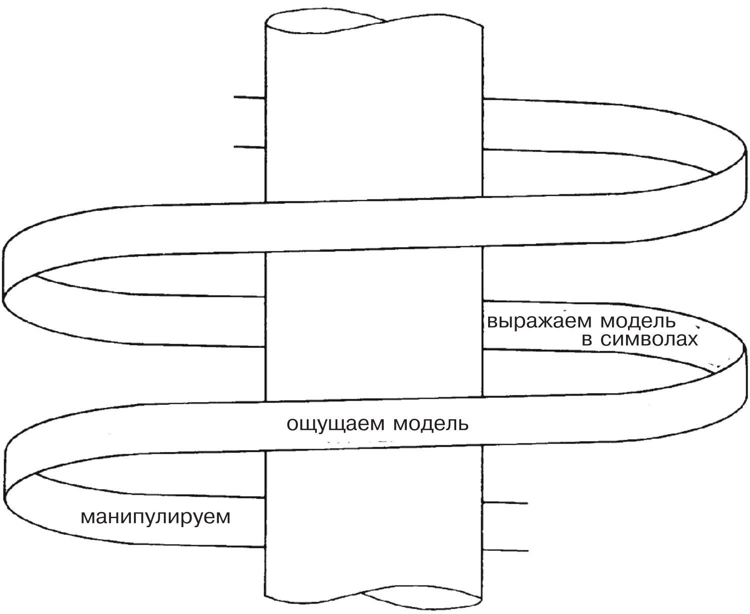
Поддерживаем математическое мышление

Математическое мышление — это не самоцель, а процесс, с помощью которого мы умножаем свое понимание мира и расширяем наш выбор. Поскольку это один из способов что-либо начать или продолжить, у него широкая область применения, не только для штурма сугубо математических или научных задач, но и для более общих случаев. Однако для поддержания математического мышления недостаточно просто давать ответы на вопросы, независимо от элегантности решения или сложности вопроса. Цель этой книги — показать тот вклад, который математическое мышление вносит в рост самосознания. Если вы с интересом ознакомились с предыдущими главами, активно пытались записывать процесс с помощью РУБРИК и, что самое главное, не пожалели времени на то, чтобы сделать паузу и проанализировать ключевые идеи и значительные моменты, то теперь, скорее всего, вы лучше чем раньше, представляете себе, что происходит, когда вы решаете задачи. Однако осознание — это нечто большее. Осознание — это мостик, соединяющий между собой и с окружающим миром отдельные области знания, информации, опыта, восприятия и чувства. Как и вопросы, которые соотносятся сами с собой (глава 6), сознание воздействует само на себя. Мне нужно осознавать существование процессов, которые помогают мне, но пока я учусь использовать эти процессы, я не могу в то же самое время учить содержание. Однако, как только я осознаю и содержание, и процессы, отдельно и во взаимодействии, мое осознание расширяется до другого уровня и я одновременно осознаю, что я углубился, равно как осознаю последующие психологические состояния, которые возбуждает мое углубление в процесс.

Осознание растет не вдруг. Его необходимо взращивать, ухаживать и выстраивать сознательным образом. Я выбрал математику как уместный «полигон» для сосредоточения на осознании. На первый взгляд, для многих, особенно для тех, кто с математикой не дружит, подобный выбор может показаться необычным, даже абсурдным. Осознание традиционно считалось прерогативой гуманитарных, а не точных наук. Однако математическое мышление может сделать особый вклад в осознание: предложить способ структуризации, направление подхода, мощь анализа, а также креативный и эстетический потенциал. Независимо от природы вопроса — будь то материальный мир или более отвлеченный мир чисел, моделей и структур, как в этой книге, поиск решений доставляет удовольствие и внушает уверенность, дает пространство и время для того, чтобы росло осознание, и позволяет развиваться более тесной и эффективной связи между личностным и материальным миром.

Представьте себе математическое мышление как спираль, которая все наращивает и наращивает витки. Каждый виток представляет собой возможность расширить понимание в результате столкновения с идеей, предметом, схемой или символом, которые вас удивят или вызовут любопытство, и вы начнете исследование с помощью МАНИПУЛИРОВАНИЯ. Уровень, на котором вы начинаете манипулировать, должен быть конкретным и внушающим уверенность, тогда результаты манипулирования будут доступны для интерпретации. Напряжение, которое вызывает пробел между тем, что ожидается, и тем, что происходит на самом деле, обеспечивает усилие для поддержания процесса и некоторое ОЩУЩЕНИЕ модели, или же связанность высвобождает напряжение, преобразуя его в достижение, удивление, удовольствие, новое удивление или любопытство, что не дает процессу остановиться.

Если ощущение того, что происходит, остается смутным, необходимо дополнительное экспериментирование, пока сила ощущения не выразится в артикуляции обобщения. Артикуляция необязательно должна быть словесной. Она может быть конкретной, схематичной или образной, но, тем не менее, должна выкристаллизовать суть ощущения, которое возникло в результате манипулирования. Достигнутая артикуляция тут же становится доступной для новой манипуляции, так и продолжается виток за витком спираль. Каждый последующий виток подразумевает, что мыслитель оперирует на более высоком уровне сложности. Связанность витков всегда позволяет мыслителю вернуться и проследить предыдущие уровни и, следовательно, пересмотреть артикуляции, которые могли «пошатнуться».



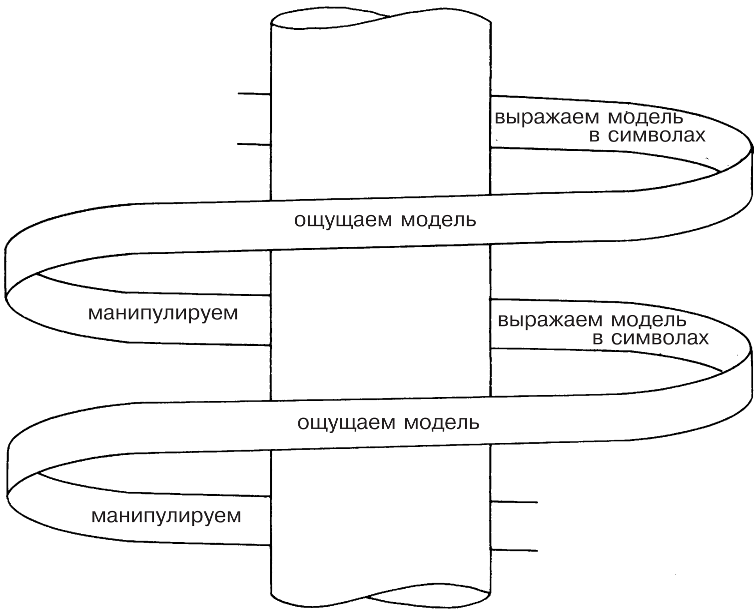
На рисунке показано, как связаны между собой процессы и эмоциональные состояния в динамике. Момент погружения в вопрос на этапе погружения нуждается в экспериментировании. Манипуляция с конкретными (внушающими уверенность) объектами провоцирует пробел, который стимулирует штурм. Построение предположений и убеждение приводят к появлению ощущения того, в чем состоит вопрос, и из этого ощущения вырастает артикуляция обобщения. В таком случае появляется возможность для обзора, когда найдено соответствие

– сзади-между достигнутой общностью, исходным состоянием и опытом на этапе штурма

и

– впереди-между достигнутой общностью и новыми вопросами, которые она провоцирует.

Тогда возникает импульс для дальнейшего манипулирования на следующем уровне сложности.



Вспомните «*Мебель*» из главы 2. Активность началась с манипулирования предметной моделью, ментальным образом или схемой. Целью манипулирования было выяснить, можно ли передвинуть кресло согласно условиям. Возникло чувство безнадежности, высказанное в предположении:

«Нет! Думаю, этого сделать нельзя».

Но почему? Я уверен в этом? Может, попробовать более длинный маршрут? Теперь у манипулирования более веская цель — ответить на вопрос «ПОЧЕМУ?» Может, предметную модель можно заменить более отвлеченным обозначением, пока я ищу причину, почему это сделать невозможно. Я ввел стрелочки, чтобы показать, куда переместилось кресло, но они были недостаточно ясными и нуждались в ссылке назад, к тому ощущению, которое я пытался уловить, особенно до тех пор, пока не понял, что мне нужны не стрелочки, а горизонталь и вертикаль. Потом символы стали расширениями моего мышления, и я манипулировал ими со всей уверенностью, и в конечном итоге они сформировали артикуляцию моего решения.

В любой момент, если вы столкнетесь с моментным провалом в понимании, путаницей или полным ступором, разумно будет вернуться вниз по спирали, обратившись к ощущению модели и к более конкретным примерам. Экспериментирование в целях различения смысла в момент затруднения — это попытка ухватиться за спираль и снова подняться повыше на более прочном основании. К сожалению, когда для вас выражение в символах конкретно и вы пытаетесь помочь мышлению кого-нибудь другого, велик соблазн сразу перескочить к сжатому, точному выражению и использовать специальные термины и символы, не понимая, что человек, которому вы пытаетесь помочь, карабкается по спирали где-то далеко внизу. Различая манипулирование, ощущение модели и ее выражение, поскольку они располагаются на разных уровнях спирали, вы становитесь более восприимчивыми к тому, где вы или студент, которому вы пытаетесь помочь, на самом деле находитесь. Это указывает, где абстракция не имеет под собой достаточно опыта, чтобы нести ощущение смысла. Это также помогает оценить, где появился пробел в понимании, и тем самым указать, где именно необходима непосредственная помощь. Это объясняет, почему, когда бы мы ни пытались понять что-нибудь новое, мы говорим: «приведи мне пример» или «покажи».

Выводы

Мое представление о МАТЕМАТИЧЕСКОМ МЫШЛЕНИИ можно подытожить в виде ответов на ряд вопросов:

ЧТО ТАКОЕ математическое мышление?

– Динамичный процесс, позволяющий нам увеличить сложность идей, которыми мы можем оперировать, в результате чего расширяется наше понимание.

ЧТО мы используем для этой цели?

– Экспериментирование, обобщение, построение предположений и убеждение.

КАК оно происходит?

– Поэтапно: погружение, штурм, обзор.
– По ассоциации с эмоциональными состояниями — приступаем, углубляемся, обдумываем в деталях, продолжаем, догадка, сомневаемся, размышляем.

КАКИЕ этапы особенно важны?

– Погружение — поскольку закладывает фундамент для штурма.
– Обзор — поскольку им чаще всего пренебрегают и он особенно важен для обучения.

ЧТО улучшает математическое мышление?

– Практика и анализ.

ЧТО помогает математическому мышлению?

– Атмосфера любознательности, вызова, анализа плюс достаточное пространство и время.

ЧТО провоцирует математическое мышление?

– Вызов, удивление, противоречие, ощутимый пробел в понимании.

К чему приводит математическое мышление?

– К более глубокому пониманию себя самого.
– К более внятному представлению о том, что вы знаете.
– К более эффективному исследованию того, что вам нужно узнать.
– К более критической оценке того, что вы слышите и видите.

Суть данной главы сводится к следующим пяти утверждениям:

1. Вы *можете* мыслить математически.
2. Математическое мышление *можно* улучшить практикой и анализом.
3. Математическое мышление провоцируется противоречием, напряжением и удивлением.
4. Математическому мышлению помогают атмосфера любознательности любознательности, вызова и анализа.
5. Математическое мышление помогает разобраться в себе и окружающем мире.

В начале книги эти утверждения были даны как пять допущений, на основании которых построена эта книга.

Если у вас есть желание развивать свое мышление самостоятельно, в главах 10 и 11 вы найдете новые задания. Однако настоящее испытание ваш успех пройдет тогда, когда вы осознаете, что мыслите математически, пытаясь решать каждодневные житейские проблемы. Любое мышление подразумевает одновременно боль и удовольствие: боль от непонимания и мучительных попыток понять, а удовольствие от догадки и убедительных аргументов. Математическое мышление не исключение. Надеюсь, что предложенный в этой книге подход снабдил вас методом, своего рода формой «упражнений для релаксации», которые помогут вам справиться с болью и дадут стимул, в результате чего вы получите достаточно удовольствия для того, чтобы опыт стал желанным и регулярным.

Справочная литература

Gattegno, C. (1963) *For the Teaching of Mathematics.* New York: Educational Explorers Ltd.

ГЛАВА 10

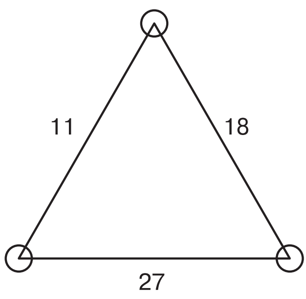
ПИЩА ДЛЯ РАЗМЫШЛЕНИЯ

Задания из этой главы даны в качестве «корма» для подпитки вашего математического мышления. Ответов к ним нет, и это сделано преднамеренно, чтобы вы дерзали самостоятельно и нарабатывали опыт. Задания разнятся по сложности весьма существенно, но вы, наверное, помните историю про студента из главы 3 (стр. 84), так что не волнуйтесь раньше времени. Более того, хотя советы очевидны, это вовсе не означает, что это наилучший способ решения. Прежде чем приступать к конкретному плану, задействуйте свой монитор!

Арифмагоны

Каждой вершине треугольника приписано секретное число. На каждой из сторон треугольника написана сумма секретных чисел на ее концах. Найдите простое правило для нахождения этих секретных чисел.

Например, секретные числа 1, 10 и 17 дают рисунок:



Обобщите на другие многоугольники.

Погружение

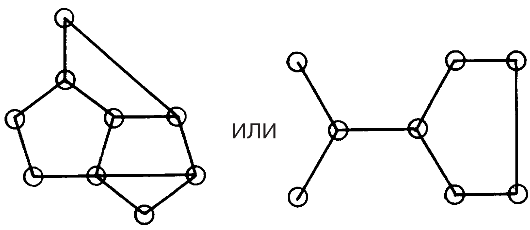
– Можно воспользоваться алгебраическими символами, но эффективнее предметная модель (например горошины в спичечной коробке). Экспериментируйте двумя способами — с арифмагонами, сначала подбирая секретные числа, и с арифмагонами, работая лишь с боковыми числами.

Штурм

– Алгебраический результат необходимо тщательным образом интерпретировать, чтобы вывести простое правило. О чем на самом деле говорит нам алгебра?
– Расчлените проблему. Попробуйте с другими типами многоугольников.
– Правило считается простым, если вы в состоянии объяснить его и как оно работает 12-летнему «противнику».
– Убедитесь, что правило работает с самыми разными числами на сторонах.

Расширение

– Рассмотрите многоугольники с более общим расположением вершин и сторон. Например,



– Рассмотрите другие действия, помимо сложения.

Черная пятница

Как известно, черной называют пятницу тринадцатого числа. Какое наибольшее/наименьшее число черных пятниц может быть в году? А в течение 12 месяцев?

Погружение

– Прежде чем заглянуть в календарь, сделайте предположение.

Штурм

– Попробуйте найти систематический способ.
– Какую минимальную информацию вам необходимо иметь относительно конкретного года, чтобы определить число черных пятниц?
– Не забудьте про високосные годы!

Расширение

– Как насчет пятницы двенадцатого или других чисел? В тринадцатых есть что-то особенное?

(См. также «*Лунный свет*» на стр. 236.)

Буклеты

Книжки-малышки можно сделать из одного листа бумаги, сложив его несколько раз, а затем разрезав и скрепив степлером. Мне бы хотелось пронумеровать странички до того, как я сложу лист. Можете подсказать мне, как я должен поступить?

Погружение

– Попробуйте сложить лист несколько раз, потом пронумеруйте странички, не разрезая лист, и разверните лист снова.
– Экспериментируйте, следуя системе.
– Что вам НУЖНО узнать?

Штурм

– Как соотносятся номера страниц на противоположных сторонах бумаги?
– Попробуйте найти общее правило, которое работает для любого числа сложений.

– Каким образом можно наиболее эффективно сообщить это другим?
– Какие проверки вы мне порекомендуете сделать, чтобы я не сделал ошибки?
– Экспериментируйте на полоске бумаги, когда все сгибы параллельны.

Картезианская погоня

Это игра для двух участников на прямоугольной сетке с фиксированным числом строк и столбцов. Игра начинается в левом нижнем квадрате, где первый игрок ставит свою фишку. Поочередно игроки ставят свои фишки в квадратик

– *прямо над,*
– *непосредственно справа от*
– *или по диагонали над и справа от последнего хода противника.*

Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не доходит до правого верхнего квадратика. Именно он и считается победителем. Найдите способ прийти первым, причем такой, чтобы его поняла и освоила двоюродная бабушка Мод.

Погружение

– Экспериментируйте. Выберите сетку поменьше и поиграйте.
– Вам НУЖНО дать инструкции относительно следующего:

  (а) ходить первым или вторым,
  (б) какой ход делать в ответ на любой возможный ход противника.

Штурм

– Работайте в обратном направлении. Подумайте над тем, как прийти к финишу, а не над тем, с чего начать.
– Где бы вам хотелось, чтобы был ваш противник? Как его туда можно загнать?

Расширение

- А что если правила изменятся и тот, кто первым достиг правого верхнего угла, считается проигравшим?
- Помог бы вам ваш метод, если бы вы играли на огромном поле и ничего не просчитывали?
- А как насчет трехмерного игрового поля?

Обзор

- Сравните с заданием «*Спичка за спичкой*» (стр. 255).

Заведенный

Когда у нас родился сын, мы с женой договорились, что, если он просыпается до 5 утра, она встает и кормит его, а если после 5 часов, то встаю я и несу его к нам в кровать. Однажды, когда он проснулся, жена посмотрела на часы в полутьме и сказала, что сейчас моя очередь. Несколько удивившись, поскольку было еще довольно темно, я повиновался. Как потом оказалось, жена смотрела на будильник снизу вверх и спросонья приняла 12.30 за 6.00. Когда стрелки перевернутых часов покажут верное время?

Погружение

- Дерзайте!
- Сделайте несколько предположений и проверьте.

Штурм

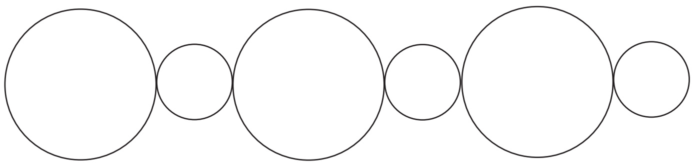
- Попробуйте несколько примеров, прежде чем делать предположение.
- Но почему?
- Что меняется со временем, а что остается неизменным?

Расширение

- А что если на часы смотреть под другим углом зрения?
- А что если смотреть на них в зеркало?

Головоломка с монетами

Возьмите три большие монеты и три маленькие и положите их в ряд — так, чтобы они соприкасались, а большие чередовались с маленькими. Ход состоит из перемещения двух соседних монет в новое место в ряду, не меняя их местами. Можно ли последовательностью ходов переместить монеты таким образом, чтобы все большие были с одного края, а все маленькие — с другого? В конечном ряду соседние монеты должны соприкасаться.



Погружение

– Экспериментируйте на меньшем числе монет.
– Проясните, что значит «ЗНАЮ» и «НУЖНО узнать». Старайтесь применить стратегию к любому числу монет.
– Введите обозначение.

Штурм

– Найдите способ представить допустимые ходы и возможные позиции.
– Если это невозможно, предоставьте убедительный аргумент! Помните «*Чехарду*» (стр. 84)?

Расширение

– Попробуйте с монетами трех размеров.
– Попробуйте передвигать одновременно три монеты.

Раскрась куб

Сколько можно сделать разных кубиков, у которых на каждой грани была одна линия, соединяющая срединные точки пары противоположных ребер? А если начертить диагональ?

Погружение

– Четко определите, как выглядят грани (что вы ЗНАЕТЕ).
– Четко определите, что значит «разные» (что вам НУЖНО).
– Введите картинку, отражающую все шесть граней!

Штурм

– Вы исчерпали все возможности?
– Повторов нет?
– Убедите противника!

Расширение

– Попробуйте то же задание с тетраэдром ...

Циклические цифры

Я задумал число, которое увеличится вдвое, если последнюю его цифру поставить на первое место[1]*. Я говорю правду?*

Погружение

– Четко определите, что вы ЗНАЕТЕ.

Штурм

– Начните с чего-нибудь! Сделайте предположение!
– Не сдавайтесь!

[1] Например, $ab\dots cd \to dab\dots c$. — *Прим. ред.*

– Записывайте все свои действия для создания новых цифр.
– Одно-единственное число не является полным решением.

Расширение

– Какое самое маленькое число обладает данным свойством?
– Замените 2 другими числами. Они должны быть однозначными? Сравните модели.
– Поместите первую цифру числа на последнее место.

Переход пустыни

Пересечь пустыню можно за девять дней. Путнику нужно доставить письмо на другую сторону, где нет еды, и потом вернуться. Один человек может нести запас еды на 12 дней. Еду можно закопать и взять на обратном пути. В дорогу готовы отправиться двое. За сколько дней можно доставить письмо, чтобы обоим хватило еды?

Погружение

– Экспериментируйте. Начните с пустынь меньшего размера.
– Используйте физические предметы или схемы.
– Введите удобный способ записи для обозначения того, где находятся люди и что происходит с запасом еды.

Штурм

– Десять дней на то, чтобы пересечь пустыню и вернуться, — это хороший результат, но может быть и лучше!
– Есть ли смысл в том, чтобы путники делали больше одной ходки?

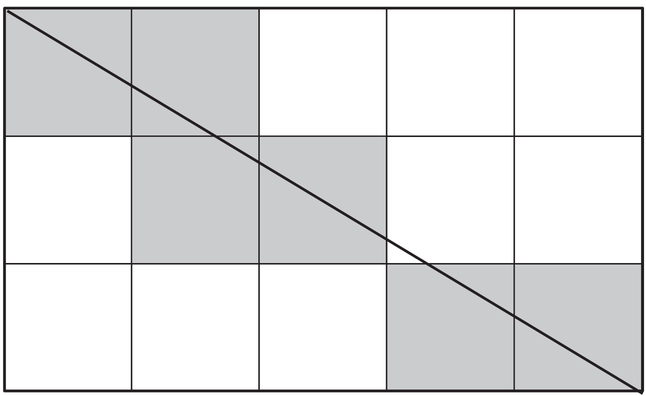
Расширение

– Является ли пустыня, которую можно пересечь за девять дней, наибольшей, если не разрешено давать лишнее время на пополнение запасов еды?

– Какую по величине пустыню могут пересечь за минимальный срок M мужчин?
– Если речь идет о «грузоподъемности» мужчин, то какую максимально большую пустыню могут пересечь двое, доставив сообщение и не умерев с голоду?

Диагонали прямоугольника

На клетчатой бумаге начертите прямоугольник 3 на 5 и проведите в нем диагональ. Сколько клеток затрагивает диагональ?



Погружение

– Что значит «затрагивает»? Решать вам!
– Экспериментируйте. Следуйте системе.

Штурм

– Очевидно, что клетки можно сосчитать, так что обобщайте!
– Сосредоточьтесь на горизонтальных линиях сетки. Составьте таблицу.
– Ищите модель. Проверьте ее!

Расширение

– А что если диагональ заменить газонокосилкой, срезающей полосу травы?
– А что если прямоугольник разделить на прямоугольники?
– А как насчет трехмерной фигуры?
– А что если линии сетки расположены неравномерно?

Игральная кость

Возьмите игральную кость и лист бумаги в клетку под размер кости. Положите кость на одну клетку так, чтобы на верхней грани было одно очко. Пометьте клетку с костью цифрой 1. Переверните кость через одно ребро и пометьте новую клетку цифрой выпавшей грани. Экспериментируйте.

Погружение

– Какого рода вопрос возникает?
– Вы всегда начинали с первой клетки и перевертывали кубик в одну и ту же сторону?

Штурм

– Можно ли придать любое число любой клетке?
– Можете убедить в этом противника?

Расширение

– Какой самый короткий путь от первой клетки с единицей до данной клетки с данной цифрой на верхней грани?
– Какие числа можно получить, двигаясь по правилам?

Делимость

Чтобы узнать, делится ли число на 11, сложите разряды нечетных позиций слева (первый, третий, ...), а потом сложите остальные *разряды. Если разность двух сумм делится на 11, то и исходное число тоже делится на 11. В противном случае не делится. Почему это правило работает?*

Погружение

– Убедитесь в том, что вы ЗНАЕТЕ. Вы попробовали на простых примерах расшифровать то, что сказано в задании?

Штурм

– Попробуйте использовать разрядное значение.

Расширение

– Что особенного в числе 11? Можете ли вы составить подобные тесты для других чисел?
– А как насчет других позиционных систем счисления, кроме десятичной?

Яйца

Яйца бывают разного размера. Яйца какого размера покупать лучше?

Погружение

– Для какой цели?
– Соберите некоторый объем информации!

Штурм

– Четко сформулируйте, что вам нужно.

Расширение

– Попробуйте на картошке, апельсинах, мясе...

Всем поровну

Мне нужно поровну разделить 30 одинаковых сосисок на 18 человек. Какое минимальное число разрезов нужно сделать? Какое минимальное число кусков мне нужно получить?

Погружение

– Найдите какой-нибудь способ сделать это.
– Это лучший способ?

Штурм

– Ответ на конкретный вопрос найти просто. Обобщайте!
– Экспериментируйте, следуя системе. Записывайте результаты.
– Соотнесите число разрезов с числом сосисок и количеством людей.
– Попробуйте найти процедуру подсчета минимального числа сосисок/кусков.
– Хорошо бы найти четкую формулу.
– Вы уверены, что нашли минимальное число? Убедитесь в этом!

Расширение

– А что если едоки не хотят, чтобы поделили поровну?

Неправильные кирпичи

Длина многих строительных кирпичей вдвое больше ширины. Я хочу сложить некоторое количество кирпичей, чтобы потом было удобно с ними работать, и хотел бы сделать это таким образом, чтобы в каждом слое не было «неправильной» линии, проходящей через слой. Какого размера могут быть слои?

Погружение

– Экспериментируйте на маленьких слоях.
– Сформулируйте точнее, что вам НУЖНО.

Штурм

– Можно построить большие слои без «неправильной» линии?
– Можно сложить большие слои из маленьких? Есть ли самый большой слой, в котором должна быть «неправильная» линия?

Расширение

– Сколькими способами можно сделать слой без «неправильной» линии?
– Поменяйте относительные размеры кирпичей.

Умножение на пальцах

Такой способ умножения широко использовался в средневековой Европе. Зная, как перемножить два числа менее 6, можно перемножить два числа от 5 до 10 следующим образом. Раскройте обе ладони перед собой. Например, чтобы умножить 7×9, *загните* $7 - 5 = 2$ *пальца на левой руке и* $9 - 5 = 4$ *пальца на правой руке. Сосчитайте число загнутых пальцев* $(4 + 2 = 6)$ *и умножьте на число поднятых пальцев* $(3 \times 1 = 3)$, *а потом соедините два ответа (63). Этот метод работает? А почему?*

Погружение

– Пробуйте на примерах, строго следуя системе.

Штурм

– Попробуйте сформулировать, что происходит. Это поможет ввести символы.

Расширение

– Стоило учиться этому методу?
– Можно ли расширить этот метод, используя пальцы ног?

Переворачивание чашек

Мой сын открыл упаковку чашек и расставил их на столе перед началом вечеринки. Некоторые стоят на донышке, а некоторые вверх дном. Переворачивая две чашки за раз, можно ли все поставить на донышко?

Погружение

– Экспериментируйте. Попробуйте несколькими чашками.

Штурм

– Вы уверены? Сможете убедить противника?
– Попробуйте с меньшим числом и запишите все возможные позиции. Ищите нечто общее для всех.

Расширение

– Представьте, что одновременно переворачиваете три и более чашек.
– Представьте, что вместо чашек у вас циферблаты; пусть на циферблатах будет три и более позиций; может, циферблаты не все одинаковые.

Складные многоугольники

Какие многоугольники можно сложить (одним прямым сложением) вдоль линии симметрии таким образом, чтобы обе полученные в результате фигуры были похожи на исходный многоугольник? Что если линия сгиба не совпадает с линией симметрии?

Погружение

– Попробуйте найти хотя бы одну фигуру, отвечающую этим условиям.

Штурм

– Сколько сторон может быть у многоугольника?
– Работайте в обратном направлении. Как можно состыковать два подобных куска, чтобы полученная комбинация снова была аналогичной?

Расширение

– А что если для того, чтобы фигуры были подобными, нужно больше одного перегиба?

Фред и Фрэнк

Два фаната фитнеса Фред и Фрэнк бегут из пункта A в пункт B. Фред половину пути пробежал, а половину прошел спортивной ходьбой. Фрэнк бежит половину времени, а другую половину идет. Бегут и идут они с одинаковой скоростью. Кто финиширует первым?

Погружение

– Четко определите, что вы ЗНАЕТЕ. Для этого экспериментируйте!
– Экспериментируйте с конкретными числами, чтобы определить, какие вычисления необходимы.
– Может, нужна схема?

Штурм

– Кто дальше бежит?
– А нужно ли вам на самом деле знать, с какой скоростью они бегут?
– Покажите все, что вам известно на схеме.

Расширение

– К ним присоединился Фрэнсис и научил их бежать трусцой. Теперь Фред бежит третью часть пути, другую треть бежит трусцой и последнюю треть идет, а Фрэнк бежит третью часть времени, другую треть бежит трусцой и последнюю треть идет. Кто финиширует первым? Фрэнсис помог им прийти к финишу раньше или позже?

Зеркала в полный рост

Какова высота самого короткого настенного зеркала, в котором вы отражаетесь от макушки до пят?

Погружение

– Вам необходимо ЗНАТЬ кое-что относительно зеркального отражения.

Штурм

– Сделайте предположение: если отступить на шаг назад, видно больше.
– Попробуйте обвести пальцем отражение своего лица на запотевшем зеркале.

Расширение

– Какова наименьшая ширина зеркала?
– Как соотносятся вопросы о высоте и ширине зеркала? Почему?
– Где нужно стоять, чтобы увидеть свое отражение полностью?
– Что будет, если зеркало не висит на стене?

Домино Глэйзера

Джордж Глэйзер из Страсбурга выложил на подносе кости домино более или менее случайным образом и сфотографировал. Он ошибся с выдержкой, и, хотя цифры на снимке были различимы, положение отдельных костей неразличимо. Можете восстановить разбиение на кости?

3	6	2	0	0	4	4
6	5	5	1	5	2	3
6	1	1	5	0	6	3
2	2	2	0	0	1	0
2	1	1	4	3	5	5
4	3	6	4	4	2	2
4	5	0	5	3	3	4
1	6	3	0	1	6	6

Погружение

– Что вы ЗНАЕТЕ о комплекте костей домино?
– Числа на снимке правильные?

Штурм

– Запишите свои умозаключения, чтобы потом можно было их повторить и проверить!
– Следуйте системе. Организуйте.

Расширение

– Можете ли вы составить подобную фотографию для меньшего числа костей домино, чтобы дать единственное, но не очевидное решение?
– Можете ли вы «найти» другую фотографию Глэйзера с единственным решением для полного набора?

Сплетни

В одном городке старые люди собираются парами по вечерам, чтобы обменяться последними сплетнями. При каждом таком «обмене» каждый передает все, что он узнал из жизни городка за минувший день. Какое минимальное число обменов необходимо, чтобы все были в курсе свежих сплетен?

Погружение

– Экспериментируйте на меньшем объеме.
– Четко определите то, что вы ЗНАЕТЕ, и то, что вам НУЖНО узнать.
– Введите схематичные обозначения.

Штурм

– Экспериментируйте, следуя системе.
– Ищите общие модели, в которых число обменов мало.
– Попробуйте убедить друга, что вы нашли минимальное число. Это не так просто.

Расширение

– А что если заменить обмены односторонней связью?
– А что если некоторые люди поведают о том, что знают, не всем, а лишь избранным?

Полжизни

Гуляя несколько лет назад по своему родному городу, я вдруг понял, что целую четверть жизни работаю на своей теперешней работе. Настроение у меня тогда было не лучшее, и я подумал: а через сколько лет я проведу на ней треть жизни?

Погружение

– Не хватает информации? Внимательно изучите, что вы ЗНАЕТЕ.
– Будьте гибким, формулируя, что вам НУЖНО узнать.
– Может, использовать схему? Хотя бы попытайтесь какимлибо образом зрительно представить вопрос до этапа погружения.
– Может, ввести буквы (как можно меньше), только не спешите прибегать к алгебре!

Штурм

– Напишите, что вы ЗНАЕТЕ, используя удобные обозначения.
– Напишите, что вам НУЖНО.
– Средневековые математики обошлись бы без символов!
– Выразите результат как можно проще, сродни исходному вопросу.

Расширение

– А через сколько лет мой стаж составит полжизни?
– Если меня уволят или я выйду на пенсию, то сколько лет мне осталось проработать до момента, когда можно будет сказать, что треть (четверть) моей жизни прошла на этой работе?

Половинка Луны

В Оксфорде есть паб «Половинка Луны», на вывеске которого изображено звездное небо и половинка Луны с идеально ровным вертикальным краем. По-моему, что-то на вывеске не так. А вы как думаете?

Погружение

– Можно ли увидеть на небе половину Луны с идеально ровным краем?

– Если можно, то когда? А если нельзя, то почему?
– Вы ЗНАЕТЕ, как прибывает и убывает Луна? Вы уверены?

Штурм

– Под какими углами можно увидеть прямую линию ночью? А днем?
– Экспериментируйте! Возьмите воздушные шарики. Остановите вращение Земли.

Расширение

– Допустим, Луна была в другой фазе.
– Допустим, плоскость вращения Луны была другой.

Рукопожатия

На вечеринке, куда меня пригласили, некоторые гости обменивались рукопожатиями. В конце двое из гостей с удивлением обнаружили, что пожали одинаковое число рук.

На вечеринке, которую устроил я, были только пары; некоторые гости обменивались рукопожатиями. Я полюбопытствовал, и оказалось, что в конце все остальные пожали разное число рук. Со сколькими людьми обменялась рукопожатием моя жена?

Погружение

– Разбейте вопрос на части!
– Экспериментируйте, чтобы выяснить, что вы «ЗНАЕТЕ», и что из этого следует.
– Сделайте несколько разумных выводов относительно рукопожатий.

Штурм

– Для того чтобы приступить к штурму, вам необходимо предположение!

– Какую вещь точно ЗНАЕТ каждый из приглашенных (это имеет значение!)?
– Какие варианты есть для рукопожатия?

Расширение

– А что бы случилось, скажем, на Марсе, где приветствия всегда «дело рук» троих?

Сто квадратов

Сколько прямых линий нужно провести на странице, чтобы в результате получилось ровно 100 квадратиков?

Погружение

– 22 линии явно имеют отношение к квадратам.

Штурм

– Измените вопрос. Сколько квадратов в прямоугольной сетке?
– Не ленитесь экспериментировать!
– Вспомните «*Шахматные клетки*» (глава 1, стр. 40).

Расширение

– Замените квадраты прямоугольниками или треугольниками.

Внутри и снаружи

Возьмите полоску бумаги и сложите ее несколько раз, как в задании «Полоска бумаги» *(стр. 22)**. Разверните ее, и вы заметите, что часть складок* ВНУТРИ, *а часть* СНАРУЖИ. *Например, если вы ее сложили три раза, то получилась такая последовательность:*

ВНУТРИ ВНУТРИ СНАРУЖИ ВНУТРИ ВНУТРИ СНАРУЖИ СНАРУЖИ

А какая будет последовательность, если сложить полоску 10 раз (при условии, что длина полоски это позволяет)?

Погружение

– Экспериментируйте на бумаге.
– Вы записали четкое определение, что есть ВНУТРИ?

Штурм

– Следуйте системе.
– Ищите модель.
– Что происходит с последовательностью, когда вы складываете полоску еще один раз?
– Что происходит со складкой, когда вы складываете полоску еще раз?

Расширение

– А что если складывать не пополам, а на три части?
– А что если каждую складку разворачивать на прямой угол и укладывать на его сторону полоску, какие модели вы видите? Полоска вернется в исходное положение?

Якобинские замки

Во время правления короля Якова в одном селении все ценные вещи хранились в сундуке в церкви. На сундуке был ряд замков, каждый из которых открывался своим ключом. Идея состояла в том, что у каждых трех селян было достаточно ключей, чтобы открыть сундук, но двое сделать этого не могли. Сколько для этого нужно было замков и сколько ключей?

Погружение

– Экспериментируйте.
– Попробуйте с маленького селения.

– Попробуйте изменить условие: каждые два человека могут открыть сундук, а один — нет.

Штурм

– Чтобы помочь жителям селения, повесьте на замки ярлыки.

Расширение

– Если вы сосчитаете замки на конкретном якобинском сундуке, сумеете ли вы определить число людей, у которых были ключи при такой системе хранения?
– Представьте, что в соседнем феодальном селении всех селян ранжировали по значимости (1-й — самый важный). Феодал учредил такое правило: если селяне хотят открыть сундук, их должно быть хотя бы столько, сколь велика значимость одного из группы.

Работа

У каждого из троих мужчин есть по две работы. Шофер обидел музыканта, посмеявшись над его длинными волосами. Музыкант и садовник любили ловить рыбу с Джоном. Художник купил четверть джина у консультанта. Шофер ухаживал за сестрой художника. Джек задолжал садовнику 5 фунтов. Джо обыграл Джека и художника, играя в кольца. Один из троих парикмахер, и у всех работы разные. У кого какая работа?

(Задача 44.3 из M500 Society Magazine, 1977, OU Student Journal.)

Погружение

– Четко формулируйте любые предположения, которые вы делаете.
– Введите таблицу или еще какую-либо систему записи.

Штурм

– Записывайте все свои умозаключения, чтобы потом их можно было ПРОВЕРИТЬ.

Расширение

– Найдите способ придумывать подобные головоломки.
– Решение всегда должно быть единственное.

Монеты Кэти

25 монет лежат квадратом 5 на 5. Муха садится на одну монету и пытается перепрыгнуть на каждую монету только один раз, каждый раз перемещаясь на соседнюю монету в том же ряду или столбце. Это возможно?

Погружение

– Экспериментируйте на меньших квадратах.
– Старайтесь соответствовать общим прямоугольным расположениям.

Штурм

– Какие инструкции вы дали бы мухе, предполагая, что она не может обдумать все заранее?
– Можно ли использовать симметрию?
– Можно ли найти модель для хорошей и плохой отправной точки?
– Как можно убедить противника в том, что это возможно или невозможно?

Расширение

– А что если в квадрате нет некоторых монет?
– А что если разрешаются переходы по диагонали? Какие-нибудь еще ходы?

Узел

Насколько короче станет веревка, если завязать ее простым узлом?

(Эта головоломка есть под номером 6297 в Mathematical Monthly, ***87*** *(5), 1980, с. 408.)*

Погружение

– Попробуйте на веревках разной длины.
– Что вы измеряете?
– Как туго вы затягиваете узел?
– Вам нужен определенный вопрос.
– Точно сформулируйте, что вы ЗНАЕТЕ и что вам НУЖНО узнать.
– Введите схематичную диаграмму.

Штурм

– Упростите диаграмму до такой степени, чтобы получилась формула для вычисления ответа.
– Отвечают ли ваши прогнозы конкретным данным?
– Можете усовершенствовать свою схему или формулу?

Расширение

– Попробуйте другие узлы.

Високосный день рождения

Однажды я был на дне рождения и своими ушами слышал, как отец со всей прямотой сказал своей семилетней дочери, что это его девятый день рождения. Дочка спросила, когда они впервые отметят одинаковое число дней рождений.

Погружение

– Что вы ЗНАЕТЕ и что НУЖНО узнать? Ищите скрытые допущения.

Штурм

– Не верьте своему предположению. ПРОВЕРЬТЕ!

Расширение

– Какой самый длительный период, в течение которого отец и дочь могут отпраздновать одинаковое число дней рождений?

Лиувилль

Возьмите любое число и найдите все его положительные делители. Найдите число делителей каждого из этих делителей. Сложите полученные результаты и возведите в квадрат ответ. Сравните его с суммой кубов чисел делителей первоначальных делителей.

Погружение

– Спокойствие, все не так страшно, как может показаться на первый взгляд!

Штурм

– Экспериментируйте на числах с меньшим числом делителей или с простыми делителями.
– Если ваше предположение верно для двух чисел, верно ли оно для их произведения?

Спичечные коробки

Спичечные коробки бывают разной длины, ширины и высоты. Из трех коробков можно составить прямоугольный блок, в котором все коробки будут параллельны друг другу, тремя способами.

А сколькими способами можно составить 36 коробков аналогичным образом?

Погружение

– Четко определите, что вы ЗНАЕТЕ.
– Попробуйте буквально или фигурально.

Штурм

– Экспериментируйте на двух размерах.
– Экспериментируйте на кубиках.
– Не довольствуйтесь первым предположением.
– Вам нужен убедительный аргумент.
– Можно ли получить ответ для больших чисел на основании результатов с маленькими числами?
– Есть ли число коробков, для которого существует единственный способ? А всего три способа?

Расширение

– Соотнесите ответы для спичечных коробков, кубиков и коробок с двумя одинаковыми размерами.

Средневековые яйца

Женщина шла на рынок продавать яйца. На вопрос, сколько у нее всего яиц, она ответила так: если разделить их на 11, останется еще 5; а если на 23, то останется 3. Какое наименьшее число яиц могло быть у торговки?

В другой раз она ответила: если их разделить на 2, 3, 4, 5, 6 и 7, то в остатке будет 1, 2, 3, 4, 5 и ни одного соответственно.

Погружение

– Экспериментируйте на маленьких числах.
– Что вам НУЖНО узнать?

Штурм

– А есть ли вообще числа, которые могли быть даны в качестве ответа?
– Ограничьтесь ответом на вопросы про яйца! Формулы может и не быть.

Обзор

– Эти два вопроса типичны для головоломок, распространенных в средние века.
– Есть письменные свидетельства тому, что подобные головоломки были популярны 2000 лет назад!

Пакеты с молоком

Сколько картона потребуется для того, чтобы сделать пакет для 1 литра молока?

Погружение

– Какую форму пакета вы выбрали? Почему?

Штурм

– Не забудьте про соединительные детали и т.п.

Клетка с молоком

Квадратная клетка вмещает 36 молочных бутылок. Можно ли расположить 14 бутылок в клетке таким образом, чтобы в каждом ряду и столбце было четное число бутылок?

Погружение

– Опишите клетку. Придумайте замену молочным бутылкам и поэкспериментируйте.
– Экспериментируйте с клетками других размеров.
– Сколько бутылок может быть в каждом ряду и столбце?

Штурм

– Экспериментируйте с клетками большего размера.
– В конечном итоге у вас клетка на 36 бутылок, а как насчет квадратных клеток вообще?
– Можно ли на основе исходных расположений придумать новые?

Расширение

– Попробуйте разместить другое число бутылок.
– Попробуйте прямоугольные клетки.
– Какое максимальное/минимальное число бутылок можно разместить в данной клетке?
– Сколько есть разных способов разместить бутылки?

Лунный свет

В прошлую среду было полнолуние. Когда будет следующее?

Погружение

– Четко определите, что вам НУЖНО узнать. Я полагал, что в следующий раз полнолуние снова будет в среду в то же самое время.
– Четко определите, что вы ЗНАЕТЕ про Луну.

Штурм

– Ваше предположение соответствует вашему опыту?
– Проверьте то, что вы ЗНАЕТЕ, по атласу.
– Что означает фраза «Луна в той же фазе»?

Расширение

– Как часто полнолуние бывает на Рождество?

Опять последовательные суммы

В задании «Последовательные суммы» (глава 4, стр. 97) я спрашивал, какие положительные числа можно выразить как сумму последовательных положительных чисел. Теперь мне любопытно узнать, сколькими разными способами можно выразить данное число.

Погружение

– И снова следуйте системе!
– Воспользуйтесь подсказками из «*Последовательных сумм*».

Штурм

– Вам НУЖНА модель, связывающая структуру числа и число его представлений последовательными суммами.
– Вы ЗНАЕТЕ, какие числа можно представить единственным способом?
– Не пугайтесь лишних допущений. Попробуйте «встроить» в свой мыслительный процесс степени 2.
– Попробуйте найти все числа, которые можно представить как последовательные суммы только двумя способами.
– Вспомните «*Спичечные коробки*» (стр. 233).

Расширение

– Попробуйте изменить вид суммы на другие условия, например сумма квадратов или сумма последовательных нечетных чисел.

Опять про мебель

Попробуйте заменить квадратное кресло из «Мебели» (глава 4, стр. 95) софой размером два блока на 1.

Погружение

– Используйте ту же стратегию, что и в «*Мебели*».

Штурм

– Сформулируйте предположения, проверьте их и видоизмените.
– Не сдавайтесь!

Расширение

– Измените пропорции софы.
– Попробуйте другие предметы мебели (диванчик для двоих?).
– Попробуйте ограничить перемещения другими углами.
– Можете вывести общее правило для всех этих случаев?

Не крикет

Из девяти внешне идентичных шаров для крикета один легче остальных восьми одинакового веса. Как быстро можно найти легкий шар, используя лишь примитивные самодельные весы[1]?

Погружение

– Экспериментируйте на меньшем числе шаров.
– Что вам НУЖНО?

Штурм

– Не полагайте, что некий конкретный шар легкий!
– Что самое плохое может случиться?
– Вы убеждены, что этого нельзя сделать меньшим числом взвешиваний?

[1] Чашечные весы без гирь. — *Прим. ред.*

Расширение

– А что если шаров больше девяти?
– А что если вам известно лишь то, что один из шаров имеет другой вес?
– Что если у вас два типа шаров, тяжелые и легкие, но неизвестно, сколько легких и сколько тяжелых?
– Что если шары все разного веса и вы хотите выстроить их по весу?

Равнина Налларбор

Путник, заблудившийся в пустыне Налларбор в Австралии, слышит паровозный гудок по направлению с запада. Видеть поезд он не может, но знает, что поезд мчится по очень длинному прямому пути. Единственный способ не умереть от жажды — это добраться до пути, пока поезд не промчался мимо. В каком направлении ему нужно идти при условии, что он и поезд движутся с постоянной скоростью?

Jaworski et al. (1975)

Погружение

– Что ЗНАЕТ путник?
– Если бы он знал направление пути, в какую сторону ему нужно было бы идти?
– Что ему НУЖНО? Будьте рассудительны!

Штурм

– Предположение: путник идет на север (почему бы и нет, верно?).

Нечетные делители

У каких чисел нечетное число делителей?

Погружение

– Что вам НУЖНО узнать?
– Делайте записи и ищите модель.

Штурм

– Продолжайте работу, пока не построите предположение.
– Четко сформулируйте его.
– А теперь убедите противника.

Расширение

– Есть ли число, у которого точно 13 делителей?
– Обобщайте.

Одна сумма

Возьмите два любых числа, сумма которых один. Возведите в квадрат б´ольшее и сложите с меньшим. Возведите в квадрат меньшее и сложите с бóльшим. Какой результат, по-вашему, будет больше?

Погружение

– Экспериментируйте до тех пор, пока не построите предположение.
– ПРОВЕРЬТЕ все вычисления с дробными числами!

Штурм

– Вы должны найти способ убедить противника.

Расширение

– Найдите соответствующую пару вычислений для двух чисел, сумма которых равна 5.

– Проиллюстрируйте «*Одну сумму*» с помощью схемы прямоугольных участков.
– Найдите соответствующую пару вычислений для двух чисел, произведение которых равно P.

Блины

Когда я пеку блины, у меня все получаются разного размера. Я складываю их в тарелку по мере готовности, но мне бы хотелось подать их на стол красиво — чтобы они лежали горкой, с самым маленьким сверху. Как мне поступить?

Единственный разумный шаг — перевернуть самый верхний блин. Можно ли таким образом уложить блинчики по порядку?

Погружение

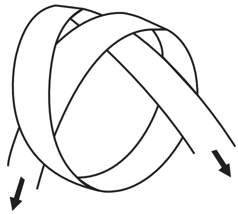
– Экспериментируйте.
– Выясните, что вам НУЖНО.
– Вам НУЖНО узнать, возможно ли это?
– Вам НУЖНО узнать минимальное число переворачиваний в худшем случае?
– Может, вас устроит примерное число наименьшего числа переворачиваний.

Штурм

– Экспериментируйте, следуя системе; ищите стратегию и то, как может выглядеть худший вариант.
– Не у всех вопросов есть элегантные решения. Довольствуйтесь примерным подсчетом числа переворачиваний в худшем варианте.

Бумажный узел

Возьмите узкую полоску бумаги и завяжите ее обычным узлом. Осторожно затяните его, пока не получится плоский правильный *пятиугольник. Почему это именно пятиугольник? Почему он правильный?*



Погружение

– Попробуйте!
– Сделайте это несколько раз, пока не убедитесь в том, что вы делаете (что вы ЗНАЕТЕ).

Штурм

– Будьте абсолютно уверены в том, что вы ЗНАЕТЕ и что вам НУЖНО.
– Попробуйте ухватить суть на схеме.
– Попробуйте проследить движение полоски, не сплетая ее в узел.

Расширение

– Можете сделать другие правильные многоугольники?
– Запишите четкие инструкции для многоугольников, которые вы можете сделать.

Третий на вылет

Запишите числа 1, 2, 3, … в ряд. Вычеркните каждое третье, начиная с третьего. Запишите совокупные суммы тех чисел, что остались. Таким образом,

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots \\ 1, & 2, & & 4, & 5, & & 7, & \dots \\ 1, & 3, & & 7, & 12, & & 19, & \dots . \end{array}$$

А теперь выбросьте каждое второе число, начиная со второго, и запишите совокупные суммы оставшихся чисел. Узнаете последовательность?

Это явление открыл Месснер (1952). Если вас интересует экстремальное обобщение, см. Conway and Guy (1966).

Погружение

– Продолжите исходную последовательность.

Штурм

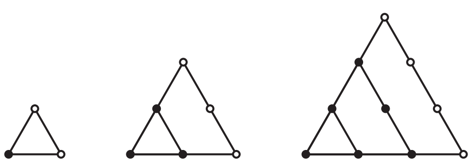
– Сделайте предположение. Убедите себя в том, что оно работает.
– Почему оно работает?
– Попробуйте экспериментировать. Начните снова с исходной последовательности, выполните только последнюю серию выбросов и посмотрите, что получится.
– Работайте в обратном направлении — от «НУЖНО узнать» к «ЗНАЮ».

Расширение

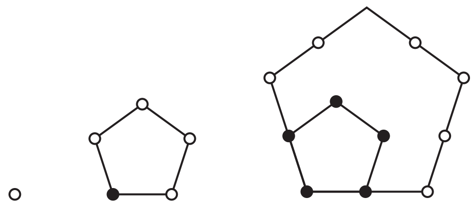
– Поместите в более общий контекст. Обобщите число серий выбросов.
– Начните с других последовательностей или измените правило выброса.

Многоугольные числа

Число, которое может быть представлено как число точек в треугольнике, называется треугольным.



Число, которое может быть представлено как число точек в пятиугольнике, называется пятиугольным.



Какие числа треугольные, какие пятиугольные и, в более общем варианте, P-угольные?

Эти числа изучали Пифагор, Никомах из Герасы (конец первого века н.э.) и многие другие математики всех времен.

Погружение

- Вам нужна формула для K-го треугольного члена.
- Экспериментируйте сначала на квадратных членах. Это может оказаться более простым делом!

Штурм

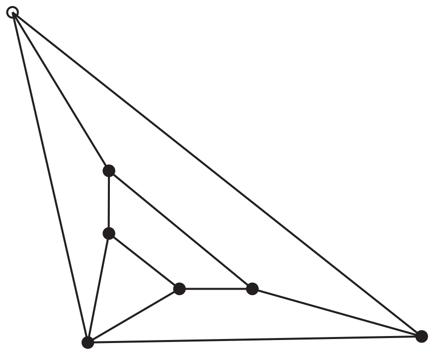
- Выясните, как возрастают треугольные числа.
- Попробуйте «склеить» треугольные числа воедино.
- Попробуйте разложить квадратные числа на треугольные.
- Попробуйте разложить другие многоугольные числа.

Расширение

- Какие числа одновременно квадратные и треугольные?
- Попробуйте сосчитать другие варианты расположения точек.

Четырехугольники в треугольнике

Этот треугольник разделен на четыре четырехугольника и один треугольник. Сумеете ли вы разделить его только на четырехугольники? (Новые вершины на стороне исходного треугольника не разрешаются.)



Погружение

- Экспериментируйте, уменьшив число четырехугольников.
- Сформулируйте предположение!

Штурм

- Попробуйте предположить, что вы сделали это. Что вы можете заключить?

Расширение

- А что если разрезать другие многоугольники?
- Что если разрешить и другие многоугольники?

Кулинарные рецепты

3 литра апельсинового концентрата смешали с 5 литрами воды и получили напиток. Потом 2 литра апельсинового концентрата смешали с 3 литрами воды. Который из напитков более концентрированный? Рассмотрите следующую стратегию. Чтобы сравнить

> *3 части апельсина и 5 частей воды с 2 частями апельсина и 3 частями воды,*

удалите второе из первого и сравните

> *1 часть апельсина и 2 части воды с 2 частями апельсина и 3 частями воды.*

Удалите первое из второго и сравните

> *1 часть апельсина и 2 части воды с 1 частью апельсина и 1 частью воды.*

Теперь вы видите, что второй напиток был более концентрированный.

Работает ли эта стратегия всегда?

Мы взяли это задание у Алана Бэлла, но его можно найти также у Нолтинга (1980) и Стрифленда (1991).

Погружение

– Что происходит? Проясните, что вы ЗНАЕТЕ и что вам НУЖНО узнать.
– Экспериментируйте на других примерах.

Штурм

– В чем суть стратегии? Всегда ли она сохраняет то, что должна сохранять?

Расширение

– Что если добавить еще один ингредиент?
– Что если необходимо сравнить три и более трех смесей?

– Что если удалить несколько порций одной смеси, в результате чего в другой смеси получатся отрицательные количества?

Перекрашивание

Клетки шахматной доски произвольно перекрасили черным и белым. Обязательно ли найдется прямоугольник, все угловые клетки которого будут одного цвета?

Погружение

– Попробуйте на маленьких досках.
– Попробуйте показать, что такого прямоугольника может и не быть.

Штурм

– Измените вопрос, чтобы найти самую большую доску, для которой такого прямоугольника не существует.
– Обязательно ли доска должна быть квадратной?
– Что вы имеете в виду под «самой большой прямоугольной доской»?
– Экспериментируйте, анализируя, что случится, если все клетки в одном ряду будут одного цвета.
– Найдите систематический способ экспериментирования.
– Имеет ли значение порядок рядов и столбцов?
– Будьте четким, когда вы конкретизируете на частных случаях, относительно того, что вы ЗНАЕТЕ.
– Каков может быть приемлемый ответ?

Расширение

– Вы попробовали с тремя цветами?
– А как насчет трехмерного пространства?
– Можно ли с уверенностью сказать, что есть квадрат со всеми угловыми клетками одного цвета?

Перевертыши

Возьмите трехзначное число, поменяйте местами разряды и вычтите меньшее из бо́льшего. Переверните разряды результата и сложите. Таким образом,

$$123 \textit{ становится } 321 \textit{ и } 321 - 123 = 198,$$

$$198 \textit{ становится } 891 \textit{ и } 198 + 891 = 1089.$$

Что произошло? Почему?

Погружение

– Возьмите калькулятор и экспериментируйте.
– Сделайте предположение.

Штурм

– Введите рисунки или схемы.

Расширение

– Попробуйте с четырех- и пятизначными числами.
– Попробуйте в разных системах счисления.
– Измените правило: переверните разряды и вычтите бо́льшее из меньшего, повторяя процедуру еще и еще раз.

Прямые углы

Если известно число сторон многоугольника, каково максимальное число прямых углов, которые у него есть?

Fielker (1981).

Погружение

– Проясните, что вы ЗНАЕТЕ и что вам НУЖНО.
– Должен ли многоугольник оставаться в той же самой плоскости?

– Что вы имеете в виду под прямым углом? Внутренний или внешний угол?
– Какого рода многоугольники вы допускаете? Могут ли они пересекать сами себя?

Штурм

– Экспериментируйте.
– Ищите принципы, которые помогают вам строить большие многоугольники с многими прямыми углами.
– Делайте предположения. Не верьте им. Проверяйте их.
– Найдите конструкцию, которая, по-видимому, максимизирует то, что вам НУЖНО.
– Найдите убедительный аргумент.
– Убедитесь в том, что вы проверили любые предположения, прежде чем подтверждать их.

Расширение

– Попробуйте максимизировать появление других углов.
– Каково максимальное число прямых углов на гранях тетраэдра?
– Попробуйте многогранники с максимально большим числом граней, стыкующихся под прямыми углами.

Вращаем монеты

Положите две монеты, вращайте одну вдоль кромки другой, как будто это шестеренки. Пусть вращающаяся монета совершит оборот вокруг окружности неподвижной монеты, сколько раз она при этом обернется вокруг собственного центра?

Погружение

– Попробуйте для начала угадать. Удивлены?
– Для более точного экспериментирования можно воспользоваться деталями спирографа.
– Четко определите, что вам НУЖНО.

Штурм

– Разбейте каким-либо образом движение на части.
– Могут вращаться обе монеты с тем же эффектом?
– Может, помогут углы?

Расширение

– Что если у вращающейся монеты диаметр в два, три раза меньше или в два раза больше диаметра неподвижной монеты?
– Что если монета движется по более замысловатой траектории — по квадрату, по внутренней поверхности большой окружности, по восьмерке?
– Сравните движение монеты с движением Луны вокруг Земли.

Последовательность

Запишите последовательность из нулей и единиц. Под каждой последовательной парой напишите 0, если члены одинаковые, и 1, если они разные. Повторяйте процесс, пока у вас не останется один разряд. Можете ли вы предсказать, каков будет конечный результат?

Погружение

– Экспериментируйте, следуя системе.
– Изменяйте систему по мере того, как начнете понимать, что происходит.
– Пытайтесь следовать системе относительно моделей, а не длин последовательностей.

Штурм

– Попробуйте работать в обратном направлении от конечного разряда.
– Найдите убедительный аргумент, чтобы поддержать свое предположение.

Расширение

– Напишите последовательность из нулей и единиц по кругу и продолжайте, как и ранее.
– Поместите свой результат в более общий контекст, используя 0, 1 и 2 в соответствии с некоторым правилом.

Тени

Я утверждаю, что у меня есть виток проволоки, который, если держать его на солнце в трех взаимно перпендикулярных положениях, каждый раз отбрасывает квадратную тень. Я говорю правду?

Погружение

– Проясните и экспериментируйте то, что вы ЗНАЕТЕ.
– Дайте более точную формулировку.

Штурм

– Какие предметы отбрасывают квадратную тень?

Расширение

– Может ли один виток проволоки отбрасывать три тени в виде окружности?
– Какие фигуры могут появиться как тень от витка проволоки? Может, здесь важно подходящее обозначение?
– Какие твердые предметы отбрасывают круглую тень с любого направления?
– Осторожно! Попробуйте два измерения!
– Какие твердые предметы отбрасывают тени, которые всегда имеют одинаковую площадь независимо от направления? Попробуйте в двух измерениях!

Скоростная ловушка

Говорят, в некоторых странах полиция не останавливает за превышение скорости, если вы едете со скоростью, превышающей допустимую скорость не более чем на 10%. В одной из этих стран не так давно на всех дорожных знаках перешли с милей на километры. Каково же новое эмпирическое правило?

Погружение

– Экспериментируйте.

Штурм

– Сделайте предположение!
– Но почему? Так будет всегда?

Расширение

– Поищите другие примеры роли процентов.
– А что случится в стране, которая переходит от галлонов к литрам, если, как правило, цены на бензин растут на один или два пенса единицы объема?

Хитроумные квадраты

Возьмите любые числа, отвечающие модели следующего вида:

$$4^2 + 5^2 + 6^2 = 2^2 + 3^2 + 8^2.$$

Соедините левые и правые члены любым способом, например, 42, 53, 68. Обратите внимание, что

$$42^2 + 53^2 + 68^2 = 24^2 + 35^2 + 86^2.$$

Почему?

Погружение

– Экспериментируйте.
– Что вы знаете о числах из левой и правой части последнего уравнения?

Штурм

– Как соотносится то, что вы ЗНАЕТЕ, с тем, что вам НУЖНО?
– Попробуйте использовать разрядное значение.
– Выразите то, что вам НУЖНО, с помощью символов.

Расширение

– Вы пробовали соединять по-другому?
– А будет ли это работать для этих равенств:

$$
\begin{aligned}
&1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2,\\
&1 + 4 + 6 + 7 = 2 + 3 + 5 + 8,\\
&3^3 + 3^3 + 5^3 = 0^3 + 0^3 + 6^3?
\end{aligned}
$$

Вынос квадратов

Возьмите прямоугольный лист бумаги и отрежьте от него максимально большой квадрат. Повторите процедуру с оставшимся прямоугольником. Что получится? Можете предсказать, когда это все случится?

Погружение

– Попробуйте разные пропорции. Можно воспользоваться клетчатой бумагой.
– Старайтесь использовать только карандаш и клетчатую бумагу.
– Поищите удобное обозначение.

Штурм

– Экспериментируйте с вопросом. Он слишком общий для того, чтобы с него начать.
– Обратите внимание, сколько раз отрезается квадрат одного размера.
– Ищите модель.
– Помните, как искали наибольшие общие делители?

Расширение

– А что если удалять кубики из кубоидов?

Строим углы

У вас есть набор палочек одинаковой длины и набор углов одного размера. Можно ли соединить палочки концами друг с другом и с данным углом и образовать замкнутое кольцо?

Погружение

– Попробуйте с физическими предметами.
– Введите способ сделать набор углов!

Штурм

– Вы остались в той же плоскости?
– Попробуйте сложить полоску бумаги таким образом, чтобы воспроизвести много палочек, соединенных под правильным углом.
– Будет ли ваш метод работать всегда, или этот угол чем-то отличается от всех прочих?

Расширение

– При какой кратчайшей подобной последовательности это возможно?
– Какие последовательности длины возможны?

– Может, лучше, когда у вас больше одного угла, особенно если вы ограничены плоскостью?

Суммы квадратов

Обратите внимание, что

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2,$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2, \qquad 4^2 + 5^2 + 20^2 = 21^2.$$

Это часть общей модели? Обратите также внимание, что

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2,$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

Это часть общей модели?

Погружение

– Можете построить единственно возможный следующий пример?

Штурм

– Каков общий вид примеров?
– Попробуйте описать их, не прибегая к конкретным числам.

Расширение

– Что если изменить первую модель — три последовательных квадрата и один другой квадрат?

Спичка за спичкой

На столе две кучки спичек. Игрок берет по одной спичке из одной кучки или сразу из обеих. Проигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Если играют двое, как следует играть, чтобы выиграть?

Погружение

– Поиграйте с кем-нибудь в эту игру!
– Какое обозначение вам поможет?

Штурм

– Какие позиции гарантируют победу?
– Как сделать так, чтобы остаться на победных позициях?

Расширение

– А что будет, если будет не две, а три кучки спичек?
– А что если играют больше двух игроков?
– А что если можно за один ход брать больше, чем одну спичку?
– А что если тот, кто берет последнюю спичку, выигрывает?

Обзор

– Сравните с «*Картезианской погоней*» (стр. 211).

Коза на привязи (вариант с силосной башней)

Коза привязана к круглой силосной башне веревкой, длина которой составляет половину окружности башни. На какой площади коза может общипать травку?

Погружение

– Нарисуйте схему.
– Нарисуйте более точную схему.
– Попробуйте использовать кусок веревки.

Штурм

– Замените округлую силосную башню прямоугольным объектом (с которым вы ЗНАЕТЕ, что справитесь).
– Попробуйте с другими фигурами, похожими на круг.

Расширение

– Задачки с козой на привязи легко придумать, но не так-то просто решать.
– Например, какой длины должна быть веревка, если коза привязана на круглой лужайке, чтобы она съела травку на половине лужайки? Не ждите легкого решения!
– А что если коза привязана к кольцу на проволоке, протянутой между двумя столбиками? (Эту идею нам подарила Эва Нолл.)

Тридцать один

Два игрока поочередно называют числа 1, 2, 3, 4 или 5. Выигрывает тот, кто первым назовет такое число, что общая сумма названных чисел будет равна 31. Какое число следует назвать, если вы ходите первым?

Погружение

– Попробуйте поиграть!
– Что необходимо записывать?

Штурм

– Какие суммы позволяют выиграть за один ход? Обобщайте!
– Можете найти стратегию игры, гарантирующую выигрыш?

Расширение

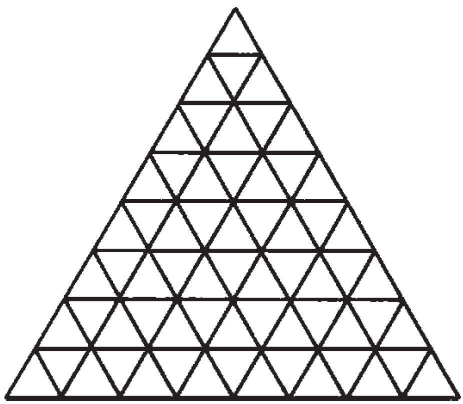
– Что если заменить 31 другим числом?
– Что если разрешить числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6?
– Что если игроков трое?
– Что если разрешенные числа — 1, 3, 5 или 2, 3, 7?

Обзор

– Сравните со «*Спичкой за спичкой*» (стр. 255) и с «*Картезианской погоней*» (стр. 211).

Считаем треугольники

Сколько равносторонних треугольников в восьмиуровневой треугольной сетке?



Погружение

– Экспериментируйте? Следуйте системе!

Штурм

– Припомните похожий вопрос.

Расширение

– Попробуйте с сетками большего размера.
– Попробуйте другие формы сетки, например шестиугольную.

Шерстяная пряжа

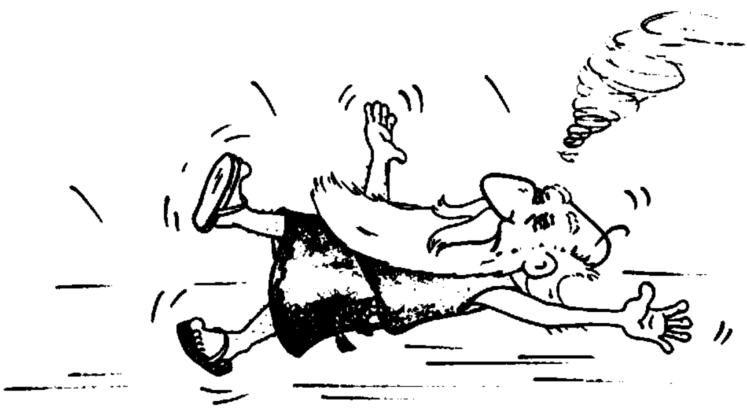
Шерсть для вязальных машин продается на специальных бобинах. Машина использует одновременно несколько бобин, но, когда садишься за вязание, не хочется отвлекаться на замену бобины или перематывать нитки на пустую бобину. Если у меня есть c бобин с разным количеством шерсти (все одного цвета), а для моего узора нужно одновременно k бобин на вязальной машине, как же мне подсчитать, могу ли я использовать всю шерсть на бобинах без перемотки?

Погружение

– Экспериментируйте. Упрощайте.
– Вам НУЖНО подсчитать вес шерсти и прогнозировать...

Штурм

– Найдите необходимое условие.
– Найдите способ использовать k бобин за один раз, когда используется вся шерсть, при соблюдении вашего условия.
– Попробуйте свести то, что вам НУЖНО, к более простому случаю, который вы уже ЗНАЕТЕ.



Расширение

– Есть ли простая стратегия для максимизации количества шерсти, использованной на c бобинах в узоре, требующем k бобин одновременно, без перемотки бобины?

Справочная литература

Conway, J. and Guy, R. (1996) *The Book of Numbers.* New York: Copernicus, Springer-Verlag.

Fielker, D. (1981) Removing the shackles of Euclid. *Mathematics Teaching* **96**, 24–8.

Jaworski, J., Mason, J. and Slomson, A. (1975) *Chez Angelique: The Late Night Problem Book.* Milton Keynes: Chez Angelique Publications.

Moessner, A. (1952) Ein Bemerkung über die Potenzen der natürlichen Zahlen. S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., **29**(14), 353b.

Noelting, G. (1980) The development of proportional reasoning and the ratio concept part I: differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics,* **11**(2), 217–253

A. Streefland, L. (1991) *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research.* Dordrecht: Kluwer.

ГЛАВА 11

МЫСЛИМ МАТЕМАТИЧЕСКИ В ПРОГРАММНЫХ ТЕМАХ

В этой главе систематизированы вопросы, которые можно использовать в качестве мостика между сложными задачами, которые поставлены и проанализированы в основной массе текста, и прогрессом в математическом мышлении на материале тем, входящих в стандартную программу. Моя цель состоит в том, чтобы продемонстрировать, что и стандартные темы могут быть пронизаны духом математического мышления. Большинство вопросов появились в результате анализа программных тем и их наиболее эффективного использования студентами.

Поскольку первое издание книги использовалось в различных контекстах и учебных заведениях различного уровня с тем, чтобы

- привлечь и заинтересовать студентов старших курсов;
- заинтересовать начинающих учителей начальной школы;
- заинтересовать учеников старших классов;
- заинтересовать выпускников,

эта глава построена в соответствии с программными темами. Некоторые из этих тем уже были широко представлены в предыдущих главах. Мы также расширили некоторые темы, которые изучают в старших классах средней школы и в вузах, но которые недоступны для широкой аудитории и по этой причине не вошли в основной текст. Однако разделение по темам весьма произвольное. Многие вопросы затрагивают другие разделы математики, и к их решению можно подходить по-разному, поэтому вопросы из одной темы можно с успехом использовать и в других. Большинство вопросов можно расширить или изменить с тем, чтобы привлечь людей с любым уровнем знаний или любой степенью математической зрелости.

Хочется верить, что каждый, кто взялся за эту или предыдущую главу, уже впитал в себя советы относительно экспериментирования и в состоянии делать обобщения, строить предположения, подтверждать и анализировать действия, равно как и последствия этих действий. Таким образом, стандартные советы опускаются. Вопросы снабжены предложениями, где это необходимо, чтобы привлечь внимание к программным и математическим темам, которые могут вам встретиться.

Вопросы в этой главе располагаются под следующими заголовками. Поскольку глубина проникновения в большинство вопросов может быть самой разной, образовательный уровень достаточно условный:

Разрядное значение и арифметические алгоритмы
Множители и простые числа
Дроби
Отношение и пропорция
Проценты и скорости
Периметр, площадь и объем
Числовые модели
Решение уравнений
Геометрические рассуждения
Графики
Функции
Математический анализ
Последовательности и итерации
Математическая индукция
Абстрактная алгебра
Логика

Начальные и подготовительные классы

Средние и младшие классы средней школы

Старшие классы

Студенты

Разрядное значение и арифметические алгоритмы

Вопросы, затрагивающие числа, предоставляют полезный контекст для развития способности оценить значение арифметики в десятичной системе счисления и алгоритмов, а также способствуют совершенствованию навыка выражать общность. Мыслить о многозначном числе с точки зрения разрядного значения ($234 = 2\times100+3\times10+4$) очень важно, особенно работая над вопросами с числами в десятичной записи.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Палиндромы	1, 5	Разрядное значение и десятичная запись.
Делимость	10	Роль разрядного значения и десятичная запись для различных эмпирических правил.
Умножение на пальцах	10	Свойства десятичной записи; алгебраическое объяснение использует любопытное, но элементарное расширение.
Циклические цифры	10	Разрядное значение и десятичная запись; степени 10.
Перевертыши	10	Разрядное значение и десятичная запись; использование алгебры для выражения общности.

Дополнительные вопросы

Медная табличка умножения

Ну и что же здесь происходит? Опишите «метод» кому-нибудь, причем на бумаге, чтобы другие могли использовать его для умножения различных многоразрядных чисел.

$$
\begin{array}{c}
7\quad 9\quad 6\quad 4\quad 5 \\
6\quad 4\quad 7\quad 8\quad 9 \\
\hline
30 \\
2\quad 4\quad 2\quad 0 \\
3\quad 6\quad 1\quad 6\quad 3\quad 5 \\
54\quad 2\quad 4\quad 2\quad 8\quad 40 \\
423\quad 6\quad 4\quad 2\quad 3\quad 245 \\
28\quad 6\quad 3\quad 4\quad 8\quad 36 \\
4\quad 9\quad 7\quad 2\quad 5\quad 4 \\
5\quad 6\quad 8\quad 1 \\
6\quad 3 \\
\hline
516\quad 0\quad 1\quad 1\quad 9\quad 905
\end{array}
$$

Предположения

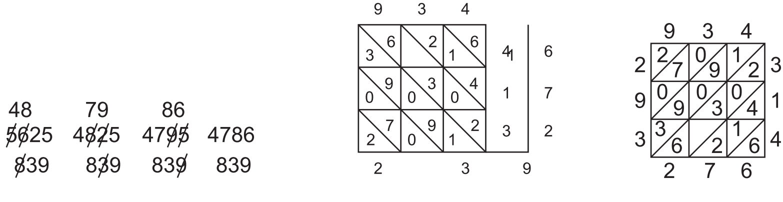
– Когда вы разберетесь, что к чему, приведите свой пример, чтобы показать, что делать в каждой конкретной ситуации.
– Если вы в состоянии уловить движение своего внимания, то можете заметить, что иногда вы рассматриваете какую-то черту (может, целое, может, часть); иногда различаете детали, которые упустили ранее; иногда узнаете связи между этими деталями; иногда ощущаете эти связи и относитесь к ним как к свойствам, которые могут нести нечто более общее; иногда используете эти свойства в качестве аргументов, чтобы подтвердить свое предположение относительно того, что происходит.

Переход от «объяснения того, что происходит» к формулированию того, «как выполнить любую подобную задачу» — значительный шаг в понимании и оценке мощности того или иного метода. Правило становится инструментом, когда вы понимаете, как и почему оно работает.

Клетка заперта

Вы можете понять, что происходит в этих древних исчислениях?

Первое взято из арабской рукописи «Индийского счета» Кушьяра ибн-Леббана (примерно 1000 н.э.); второе — из первого в истории учебника арифметики неизвестного итальянского автора, изданного в Тревизо в 1478 г., а третье — у Луки Пачоли (примерно 1497 г.).



Анализируя работу других, можно эффективным образом узнать какой-либо метод; кроме того, это наверняка поможет вам глубже проникнуть в тайны арифметики.

Продуктивный обмен

$$27 \times 18 - 28 \times 17 = 10,$$
$$37 \times 18 - 38 \times 17 = 20.$$

Обобщайте!

Предположения

– «Скажите, что вы видите» самому себе; ищите изменения и варианты. Потом попробуйте что-нибудь изменить и посмотрите, что происходит.
– Чтобы оценить в полной мере красоту арифметики, нужно не просто делать вычисления и получать ответы, а учиться искать структурные связи.

Множители и простые числа

Важно понимать, что число можно назвать или представить с помощью его разрядов в десятичной записи, или разложив его на простые множители, или еще каким-нибудь способом. Когда студенты строят модели, они часто ограничиваются поиском связей через сложение, но очень часто секрет заключается именно в связях умножения. На первый взгляд кажется, что для определения наибольшего общего делителя двух чисел необходимо разложить числа на множители, однако Евклид открыл метод, который обходится без этого. Таким образом, наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) представляют собой значительное явление в арифметике и стоят того, чтобы ими заняться, даже если формально они и не входят в программу обучения.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Булавки с нитками	3	Множители; НОД используется, т.к. новые нитки нужны, когда кратные размера промежутка и числа булавок совпадают. Сравните с «*Диагоналями прямоугольника*»
Последовательные суммы	4	Использование среднего из последовательных чисел помогает преобразовать сумму последовательных чисел в произведение.
Разности квадратов	4	Нужно преобразовать разность в произведение с помощью обычного алгебраического тождества.
Многогранники	6	Множители; связано с задачей «*Булавки с нитками*».
Диагонали прямоугольника	10	Пожалуй, неожиданное использование НОД.
Лиувилль	10	Любопытное расширение свойства суммы кубов.
Средневековые яйца	10	Особый случай китайской теоремы об остатках, использующий остатки в соответствии с разными делителями.
Опять последовательные суммы	10	Зависит от количества множителей конкретного типа.
Нечетные делители	10	Как совмещаются множители; тесно связано с «*Привратниками*» (см. на стр. 266).
Вынос квадратов	10	Тесно связано с алгоритмом Евклида для нахождения НОД.

Дополнительные вопросы

Привратники

В одном здании есть длинный коридор с большим числом комнат, пронумерованных 1, 2, …, и с таким же большим числом привратников. У каждого привратника k есть ключ, который запирает и отпирает все двери, номер которых кратен k. Сначала все двери заперты.

Если привратники поочередно запирают и отпирают каждую из дверей, к которым подходят их ключи, то какие двери будут открыты, а какие закрыты? Имеет ли значение порядок, в котором они выполняют свои обязанности?

Допустим, есть конечный список открытых дверей, кто из привратников должен при этом присутствовать? Какими свойствами должен обладать такой список, чтобы быть возможным?

Предположим, привратники начали свой ритуал, когда часть дверей была открыта, а часть закрыта. В конце ритуала сможете ли вы определить по состоянию дверей, которые из них были первоначально открыты?

Предположения

– Не торопитесь с выводами; убедительно подтверждайте свои предположения!

– Тесно связано с «*Нечетными делителями*», но расширения дают возможность превратить ритуал привратников в математическое действие и потом исследовать результаты этого действия как отдельный объект, достойный изучения.

Решето Эратосфена

Напишите (аккуратно, на большом листе бумаги) первые, скажем, 200 целых чисел, расположив их в 10 столбцов. Обведите 1 квадратиком. Обведите 2 кружком (наименьшее число, еще не помеченное), потом вычеркивайте каждое второе число, начиная с 2 (например 4, 6, 8, ...). Продолжайте, обводя кружком наименьшее еще непомеченное число (назовем его m) и зачеркивайте каждый m-й член, следующий за ним. Продолжайте в том же духе, пока не пометите все числа. Какие числа обведены кружком? Почему? Сколько раз число будет вычеркнуто (будьте внимательны!)? Почему? Некоторые числа не надо зачеркивать. Что это за числа? Почему?

Предположения

– Выполняя это задание, заметьте, как сначала вы концентрируетесь на самом процессе, а потом внимание переключается на поиск закономерностей и причин.
– Обратите внимание, как меняется процесс, когда вы проходите квадратный корень конечного числа. Эратосфен пришел к этому в пятом веке до н.э., и это на удивление эффективно. Выбор разных чисел из столбцов «высвечивает» разные модели. Например, попробуйте поставить числа всего в шесть столбцов или в 18. Объясните, почему то, что происходит, должно продолжиться.

Остатки сладки

Найдите

– *число, которое при делении на 2 дает в остатке 1,*
– *неполное частное которого (целое число в результате деления на 2) дает остаток 1 при делении на 3,*
– *соответствующее неполное частное которого дает 1 в результате деления на 4.*

Почему такое число должно делиться на 3?

Предположения

– Один подход состоит в том, чтобы с самого начала не просто подбирать конкретные числа, а искать выражения для всех таких возможных чисел; другой путь — начать с конца и работать в обратном направлении.
– Попробуйте менять остатки и поискать другие результаты деления. Как насчет цепочек подлиннее?

Для арифметики характерно движение вперед, от известного к неизвестному. Алгебра, напротив, исходит от неизвестного, обозначенного буквой или другим символом, и возвращается к известному, выражая связи с помощью уравнений и решая их. Вот вам возможность сделать открытие: иногда двигаться назад продуктивнее, нежели вперед.

Рациональные делители

Поскольку $14/15$ делит $28/3$ целое число раз (10 раз), можно сказать, что $14/15$ — это рациональный делитель $28/3$.

- *Найдите все рациональные делители $28/3$.*
- *Найдите все рациональные делители $1/2$, а потом найдите все числа, которые являются рациональными делителями $28/3$ и $1/2$.*

Имеет ли смысл говорить о наибольшем общем рациональном делителе двух дробей и наименьшем общем рациональном кратном двух дробей?

Предположения

- Для начала попробуйте более простые случаи. Беда с простыми случаями в том, что они могут затуманить происходящее в более общих случаях. Есть ли проблема в том, что $2/3$ и $4/6$ — это два разных обозначения одного и того же рационального числа?
- Выявляя детали знакомых процедур, может оказаться эффективным представить какой-нибудь аспект в незнакомом виде, чтобы новички ощутили его вкус.

Китайские остатки

Набор чисел $\{3 \times 5 \times 3 \times 2 + 3 \times 11 \times 2 \times 2 + 5 \times 11 \times 1 \times 2 + 3 \times 5 \times 11n\colon n$ — *целое число*$\}$ *состоит из целых чисел, которые при делении на 3, 5 и 11 дают в остатке 2. Почему? Обобщите.*

Предположения

- Определяя остатки, старайтесь использовать только два числа, а не три. Попробуйте поменять двойки и посмотреть, можете ли вы изменить остатки. Тогда в чем же дело?

– Остатки работают не только с положительными, но и с отрицательными числами.

Дроби и проценты

Дроби представляют большие затруднения для некоторых студентов. Вопросы, предложенные нами, предназначены не столько для знакомства с дробями, сколько для их исследования. Арифметика дробей также часто встречается во многих вопросах, касающихся пропорций и скорости (см. следующий раздел).

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Склад	1	Выражение процентных изменений с помощью умножения облегчает работу с последующими изменениями.
Дроби	2	Работая с дробями, важно четко знать, что такое целое, даже выполняя стандартное умножение и деление.
Скоростная ловушка	10	Выражение процентного изменения как умножение весьма полезно, как в «*Складе*». Развивает интуицию относительно того, что изменяется с изменением единиц измерения.

Дополнительные вопросы

Гамбургеры

Гамбургер готовят из хлеба, помидора, салата и мяса. Если каждый из ингредиентов станет дороже на 5%, насколько подорожает общая стоимость ингредиентов?

Предположения

– Будьте внимательны! Для объяснения общей причины верного ответа может потребоваться больше математики, чем предполагалось (в том числе закон распределения). И будьте осторожнее на рынке: там могут обмануть подобным образом!

– Это очень простая задачка, но некоторые люди идут по ложному пути, поскольку их интуиция строится на структурах сложения, а не умножения. Сравните с ситуацией сложения, когда каждый ингредиент увеличивается в цене на £2.

Единичные дроби

Сколькими разными способами можно записать $1/n$ как разность двух единичных[1] дробей?

Предположения

– Единичные дроби могут оказаться сложнее, чем вы думали. Для начала попробуйте найти общую модель, однако надо убедиться в том, что вы нашли все возможные способы!
– В процессе поиска всех возможных путей студенты могут чрезмерно увлечься арифметикой. Эффективнее прибегнуть к алгебре, чтобы выразить все варианты, а потом уже заняться множителями чисел.

Дроби Фарея

Возьмите две любые дроби. Сложите числители и знаменатели — и получите новую дробь. Сравните размер новой дроби с размером исходных дробей. Обобщите и объясните результат. Найдите диаграмму, чтобы показать, почему ваш результат верен всегда (при определенных ограничениях).

Затем составьте ряд дробей: используя первую и вторую дроби, чтобы получить третью; потом, используя вторую и третью, сделайте четвертую дробь и т.д. Например, если начать с $1/3$ и $2/7$, мы получим последовательность $1/3, 2/7, 3/10, 5/17, 8/27, \ldots$.

Что происходит с этой последовательностью? Это происходит со всеми начальными дробями? Останется результат тем же, ес-

[1] Единичной автор называет дробь, чей числитель равен 1, а знаменатель — любое натуральное число. — *Прим. ред.*

ли дроби из этой последовательности заменить их несократимой формой (например 5/3, 7/3, (12/6 = 2/1), 9/4, ...)?

Предположения

– Эффективно перевести дроби в десятичные: десятичные дроби легче сравнивать; хотя если работать с обыкновенными дробями, развивается беглость в алгебре. Чтобы понять, что происходит и почему, можно нанести дроби на числовую ось.
– Самая распространенная ошибка учеников при сложении дробей — складывать числители и знаменатели. Однако это вполне уместная операция при складывании оценок, полученных за различные вопросы, но это не есть сложение дробей. Это уместно при аппроксимации корней уравнений и при сочетании выборок в теории вероятности. Этот вопрос призван повысить бдительность студентов относительно данной ошибки с помощью изучения эффекта этой, как правило, некорректной операции. При каких условиях она уместна, а при каких нет?

Джон Фарей, геолог по образованию, в 1816 году написал статью об этих дробях, как и математик Харос в 1802 году. Огюстен Коши в 1816 году опубликовал доказательство. Эти дроби тесно связаны с плотной упаковкой окружностей, касательных к прямой линии!

В гору

Существуют ли четыре дроби $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{c_1}{d_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{c_2}{d_2}$, *для которых* $\frac{a_1}{b_1} > \frac{c_1}{d_1}$ *и* $\frac{a_2}{b_2} > \frac{c_2}{d_2}$, *но* $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} < \frac{c_1+c_2}{d_1+d_2}$*?*

Предположения

– Пробовать примеры наугад не слишком эффективно, лучше интерпретируйте дроби как наклоны линейных отрезков.
– Возьмите четыре разные дроби разного значения и упорядочьте их. А теперь возьмите первую пару и последнюю.

– Проанализируйте дроби с тем же значением, что и ваши, но с увеличенными числителями и знаменателями, и попробуйте подогнать их. Есть ли связь между разностями или отношениями объединенной дроби с точки зрения исходных четырех?
– Сравните два разных изучения одного и того же явления, приведшие к вашим первым двум неравенствам как мерам частоты некоторого атрибута. Объединение данных дает обратный эффект. Статистики называют это эффектом Юла-Симпсона или парадоксом Симпсона.

Пропорции и скорости

Вопросы со скоростями, пропорциями и отношениями входят в большой спектр вопросов со структурами умножения. Они входят в программу обучения практически всех лет обязательного образования. Часто структуры умножения ведут себя вопреки интуиции, как можно убедиться на следующих вопросах.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Складные многоугольники	10	В основе подобие; отношения, углы и даже теорема Пифагора, а также немного алгебры помогут найти ответ.
Фред и Фрэнк	10	В задачах на скорость эффективны графики расстояние–время.
Кулинарные рецепты	10	Иногда отношения можно сравнить с помощью обычного вычитания, наподобие алгоритма Евклида.

Дополнительные вопросы

Экспоненциальные проценты

– *Если население растет на 10% от текущего размера за каждый месяц, то когда оно увеличится вдвое?*

- *Если население убывает на 10% от текущего размера каждый месяц, то когда оно уменьшится вдвое?*
- *Если население попеременно растет и убывает на 10% каждый месяц, что будет в конечном итоге?*

Предположения

- Имеет ли значение исходная величина населения? Найдите метод для решения общего класса вопросов, частным случаем которых является данный вопрос. Это примеры экспоненциального роста и падения. Какие еще обстоятельства имеют подобные модели роста/падения?
- Здесь используется то же наблюдение относительно изменения процентов, как и в решении задания «*Склад*».

Скорости

Что есть общего, а что разного в следующих вопросах, с которыми сталкивался каждый:

1. *Старой развалине на колесах надо проехать две мили, в гору и с горы. Поскольку машина такая убитая, первую милю (подъем) машина едет со скоростью 15 миль в час. С какой скоростью она должна ехать, чтобы скорость всего путешествия составила 30 миль в час?*
2. *Два велосипедиста на исходном расстоянии 30 миль друг от друга едут навстречу. Велосипедист A едет со скоростью 14 миль в час, а велосипедист — со скоростью 16 миль в час. Муха летает от носа одного к носу другого и обратно со скоростью 30 миль в час. Сколько миль пролетит муха?*
3. *В гору ведет извилистая тропа, по которой путник начинает свой путь в гору в 6 утра и достигает вершины в 6 вечера. На другой день он начинает спуск позднее 6 утра и оказывается у подножия раньше 6 вечера. Есть ли на тропе некая точка, которой он достигает в одно и то же время в оба дня?*
4. *Самолет летит в неподвижном воздухе со скоростью 100 миль в час. Пилот взлетает из точки A и летит в пункт B при*

встречном ветре 50 миль в час. Таким образом, скорость самолета над землей — 50 миль в час. Потом самолет возвращается при попутном ветре со скоростью 150 миль в час. Какова средняя скорость самолета за все путешествие?

5. *Человек договорился, что его встретят на вокзале в 3 часа ночи, но успел сесть на более ранний поезд и приехал на вокзал в 2 часа. Он идет пешком по трассе, его встречают на машине, и он оказывается дома на 20 минут раньше, чем рассчитывал. Как долго он шел пешком?*
6. *Винни Пух и Пятачок отправились друг к другу в гости. Они вышли в одно и то же время и шли по одному и тому же пути. Однако Пух был увлечен сочинением очередной «сопелки», а Пятачок считал птичек над головой, поэтому они не заметили друг друга и прошли мимо. Через минуту после их встречи Пух пришел к Пятачку, а через три минуты после этого Пятачок добрался до дома Пуха. Как долго шел каждый?*

Предположения

– Не спешите с выводами! Начертите график расстояние — время или еще как-либо представьте себе эту ситуацию.
– Скорости, которые являются одной из форм размерных отношений (другие имеют дело с плотностью, потреблением и давлением) представляют для многих большую трудность.
– Будьте внимательнее к мультипликативным связям и воспользуйтесь ментальными образами для «погружения» в ситуацию.

Средняя скорость

Как-то раз, проезжая по участку шоссе, где шли ремонтные работы, я увидел дорожный знак «предельно допустимая скорость 50; определяется средняя скорость». Я заметил, что какое-то число минут ехал со скоростью 60 миль в час. Как долго я должен ехать со скоростью 30, чтобы не нарушить закон? А со скоростью 35? Обобщите.

Я заметил, что некоторое расстояние ехал со скоростью 60 миль в час. Сколько километров я должен ехать со скоростью 30? 35? Обобщайте.

Предположения

– Графики могут помочь, равно как погружение в ситуацию в своем воображении и выражение взаимосвязей между вовлеченными объектами.

– Задачи на скорость — отличный контекст для развития глубокого понимания мультипликативных связей.

Цистерна наполняется

Цистерна наполняется через три трубы. Каждая в отдельности может наполнить цистерну за три, четыре и пять дней соответственно. За сколько дней наполнится цистерна с помощью всех трех труб?

Предположения

– Попробуйте для начала с двумя трубами. Найдите хотя бы два разных способа решения задачи. Может, вы сможете найти способ, который сразу приведет вас к выражению решения в общем виде. А что если вам скажут скорость наполнения цистерны парами труб?

– Задачи про наполнение бочки были крайне популярны в средние века, их можно найти в любом учебнике арифметики. Они также предоставляют контекст для работы с отношениями умножения. Обратную величину суммы обратных величин иногда называют *параллельной, или гармоничной суммой*.

– Что есть общего, а что различного между этим вопросом и «*Арифмагонами*» или «*Взвесим улов*»?

Рабочая сила

Мужчина может выполнить определенную работу за три часа, женщина — за четыре, а ребенок — за пять. А за сколько они выполнят эту работу все вместе?

Предположения

– Измените задание: пусть работников будет несколько. Что если вам скажут темп работы при работе парами, а не поодиночке?
– Что есть общего, а что различного между этим вопросом и вопросом про цистерну? Какие еще варианты приходят вам на ум?

Вопросы наподобие этого были распространены в учебниках арифметики викторианской эпохи. Сегодня их использование дает информативный и культурный комментарий; тогда вопросы предоставляли дополнительный опыт следования отношений умножения и гармоничных сумм.

Загородная прогулка

Из двух городов в одно и то же время выходят люди и идут навстречу друг другу. Они должны встретиться в полдень и в течение часа вместе пообедать. Одна группа идет дальше и приходит в другой город в 7.15 вечера, а остальные возвращаются в первый город в 5 часов вечера. Во сколько они вышли?

Придумано Арнольдом и передано нам по цепочке, конкретно Питером Лильедалем.

Предположения

– Нарисуйте график или схему, чтобы проиллюстрировать зависимость расстояния от времени.

Верхом и пешком

В девятнадцатом веке до пришествия автомобилей было принято, отправляясь в долгий путь, ехать на лошади поочередно. Один ехал верхом, а другой шел пешком; потом всадник привязывал лошадь к какому-нибудь удобному месту и шел дальше пешком; потом тот, кто шел пешком ранее, дойдя до этого места, садился на лошадь и ехал верхом. Таким образом, лошадь успевала отдохнуть, поджидая другого всадника. Так могло повторяться несколько раз. Как рассчитать участки верхом и пешком, чтобы оба путешественника оказались в пункте назначения одновременно?

Предположения

– Начните с графика. Удобнее время отложить на горизонтальной оси, а расстояние от начала пути — на вертикальной. Решите, что вам нужно, и обозначьте буквами — это освобождает мышление. Еще эффективнее использовать динамическую геометрию, поскольку в таком случае вы сумеете разобраться с точками, где привязывают коня, поджидающего второго путешественника. Тогда вы сможете заметить постоянную величину и точно обнаружить, какая информация вам нужна, чтобы распределить участки так, чтобы прибыть в пункт назначения одновременно.

«*Верхом и пешком*» описал Генри Филдинг в «Истории приключений Джозефа Эндрюса и его друга мистера Эйбрахама Адамса» (*History of Joseph Andrews and his friend Mr Abraham Adams, 1742)*, а также упоминал Томас Пэйн в своем трактате «Права человека» (*Rights of Man, стр. 33*). В 1798 году Джеймс Карнахан и Джэкоб Линдли именно таким способом перешли Аллеганские горы на своем пути в Принстонский университет; со временем Карнахан стал президентом Принстона, а Линдли — президентом университета Огайо. «Верхом и пешком» легла в основу спортивных состязаний. Есть условия, что лошадь должна каждый час отдыхать определенный временной интервал. Разумеется, можно ввести другие транспортные средства и увеличить число путешественников на велосипеде, скутере и т.д.

Задача «*Верхом и пешком*» появилась в сборнике Рэнсома (1952), а вариант решения — у Рэнсома и Брауна (1953). Упоминается вариант с несколькими путешественниками и одной лошадью, который «представляет собой значительно более трудную задачу».

Коровы на лугу

Если 12 коров полностью съедят траву на площади в 10/3 акров за четыре недели, в том числе траву, которая вырастет за это время, а 21 корова полностью съест траву на площади в 10 акров за девять недель, то сколько коров полностью съедят траву на площади в 36 акров за 18 недель?

Предположения

- Здесь важно понять, что такое «*полностью съедят*». В конце срока трава на пастбище вся съедена, но она ведь растет и в процессе выпаса.
- Для начала выясните, за какой срок одна корова съест траву на одном акре или сколько акров одна корова объест за один день.

Исаак Ньютон поместил эту задачу в своем учебнике алгебры, решив ее и для конкретного, и для общего случая. Представьте себе, как стоит он у окна и задумчиво смотрит на коровок, пасущихся на лугу. Сборник задач Ньютона ознаменовал конец его интереса к «словесным задачам». Математикам намного интереснее понять, как решаются уравнения, которые возникают в результате алгебраического выражения отношений в словесных задачах.

Вероятности

В одном клубе 10% членов были поэтами. Некоторые члены были выбраны для участия в одном мероприятии, и 40% участников должны были быть поэтами. Объясните, почему у поэтов вероят-

ность попасть в число выбранных в шесть раз больше, чем у тех, кто поэтом не является.

Если число предметов данного цвета в наборе отражено в отношении $c_1 : c_2 : \ldots : c_n$, а те, что обладают свойством P, — в отношении $p_1 : p_2 : \ldots : p_n$, то каковы отношения частот встречаемости различных цветов со свойством P?

Предположения

– Удивлены? Будьте предельно четкими относительно того, что вы хотите узнать!
– Попробуйте использовать прямоугольник, чтобы определить членство, и разделить прямоугольник горизонтальной и вертикальной чертой, чтобы представить два процесса отбора (поэты и участники).
– Переход к более чем двум «цветам» потребует уверенного подсчета в конкретном случае с двумя «цветами».
– Обобщение иногда может привести к изменению взгляда на исходный вопрос.

Уравнения

Решение уравнений алгебраическим путем — один из наиболее эффективных инструментов решения математических задач. Исаак Ньютон, понимая, насколько это эффективно, привлек внимание других математиков к проблемам решения уравнений, невзирая на сложности обучения выражениям отношений на языке алгебры. Как видно из нескольких приведенных ниже вопросов, зачастую алгебра превращает головоломку в рутинное занятие. Такова мощь алгебры. Однако рутинное решение отрывает решение вопроса от контекста задачи, и есть опасность потери смысла.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Ползучие бяки	2	Это пример диофантова уравнения (того, где должны быть целые значения). Эта дополнительная информация делает возможным решение некоторых систем уравнений с помощью малого, как может показаться, объема информации.
Вращаем монеты	2 и 3	Помогут полярные координаты.
Эврика!	5	Делайте предположения и используйте контрпримеры.
Арифмагоны	10	Идеально сравнить решения с помощью логической арифметической аргументации и решая уравнения.
Полжизни	10	Выразите неизвестное символами, но будьте осторожны. Решите, переменная — это возраст человека в один момент времени или всегда. Подчеркивает, как важно быть точным относительно того, какое количество представляет конкретная буква.
Високосный день рождения	10	Составить и решить уравнение просто, а интерпретировать ответ трудно.
Одна сумма	10	Алгебра кратко излагает свойства числовых операций, а рутинная манипуляция позволяет им выстроиться в рутинное решение.

Дополнительные вопросы

Взвесим улов

Рыболов поймал три рыбы. Рыбы не взвешивали по отдельности, а взвесили попарно. Большая и средняя рыба вместе весят 16 кг. Большая и маленькая рыба весят 14 кг. Маленькая и средняя рыба весят 12 кг. Сколько весит каждая рыба в отдельности?

Предположения

- Решите задачу, составив три линейных уравнения с тремя неизвестными. Потом попробуйте решить задачу без уравнений — это нетрудно. Потом сравните, как соотносятся два решения. Что можно вынести из каждого метода? Сравните свои методы с «*Арифмагонами*» (стр. 208).
- А теперь обобщайте: что если вес у рыбин другой? Сделайте условие менее жестким: вес рыбы должен быть положительным. Как обобщить решение системой уравнений и логическую аргументацию? Затем обобщайте с другим числом рыбы, тоже попарно. Есть несколько типов решения в зависимости от числа рыб. А что если взвешивать рыбу по три или четыре штуки?

Как и «*Арифмагоны*», «*Взвесим улов*» необходимо обобщать и изучать со всем вниманием. Значительную часть линейной алгебры можно освоить с помощью этих вопросов. Теория линейных уравнений со многими переменными объясняет изменения в «сценарии» при увеличении количества рыбы.

Возрастные проблемы

Суммарный возраст A и B 48 лет. A вдвое старше, чем был B, когда A был вдвое моложе, чем будет B, когда B будет в три раза старше, чем был A, когда A был в три раза старше, чем был тогда B. Сколько лет B?

Предположения

- Можно использовать пустую числовую прямую, чтобы проследить за информацией в разные моменты времени; алгебра очень пригодится.
- Неменьшее удовольствие вам доставит составление подобных задачек своими силами; кроме того, это даст возможность разобраться с внутренней структурой подобных задач.

Среднее арифметическое

Среднее арифметическое списка положительных целых чисел — это 5, и известно, что среди этих чисел есть 16. Если 16 исключить, среднее арифметическое уменьшится до 4. Какое самое большое число может быть в исходном списке и сколько всего чисел было в этом списке?

Предположения

- Важно четко определить, что известно и что нужно узнать. Любопытно выяснить, каким образом можно получить подобные примеры. Поработать самыми разными способами — отличная возможность оценить такое понятие, как среднее арифметическое.

Модели и алгебра

В некоторых из приведенных ниже вопросов главная трудность — описать модель алгебраически, а потом доказать ее с помощью алгебраических манипуляций. В других вопросах основная трудность — собрать числовую информацию, обнаружить модель, описать модель алгебраически, а затем объяснить, почему описанная модель соответствующим образом описывает математическую структуру.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Шахматные клетки	1	Найти способ считать системно и выразить общие отношения между членами.
Полоска бумаги	1	Считать с учетом рекуррентных отношений; использование экспоненциальных формул.
Шахматные прямоугольники	2	Расширение метода на новый контекст; использование прежней общности для выражения большей. Многочленные связи.

Название	Глава	Тема
Чехарда	3	Действовать системно; узнавать связи; выражать их как общности. Объясняет необходимость обобщения до начала алгебраических манипуляций.
Окружность и точки	4, 5	Не спешить с выводами об общности на основе скудной информации, затем найти более глубокие связи. Биномиальные коэффициенты и их суммы.
Пчелиная генеалогия	5	Важность соотнесения моделей в числах контекста со структурными чертами этой ситуации. Числа Фибоначчи.
Спички 1 и 2	5	Соединение структурных аспектов физической ситуации с числовыми связями; элементарная алгебра.
Числовые спирали	8	Соединение структурных аспектов источника и числовых рядов; построение предположений и убеждение других в том, что так будет всегда.
Рукопожатия	10	Узнавание и выражение структурных связей; привлечение сумм последовательных чисел или произведения.
Многоугольные числа	10	Соединение структурных связей в геометрическом контексте со связями в соответствующей числовой последовательности.
Прямые углы	10	Соотнесение геометрических свойств прямых углов со счетом. Некоторые модели могут быть ложными. Обобщение требует обращения к целой части числа.
Суммы квадратов	10	Обнаружение и выражение связей между числами; обобщение и убеждение; алгебраические манипуляции.

Дополнительные вопросы

Вариации с бумажной полоской

Вернитесь к сложению в задании «Полоска бумаги» (глава 1, стр. 22). Пусть $C(n)$ — число складок в полоске после n сложений, а $S(n)$ — число отрезков, на которые разделена полоска после n

сложений. Объясните, почему верны следующие утверждения:

$S(n+1) = 2S(n)$, $\quad C(n) = 1 + 2 + 22 + 23 + \ldots + 2n - 1$,

$C(n+1) = C(n) + S(n)$, $\quad C(n) = 2n - 1$,

$C(n) = S(n) - 1$.

Какие еще верные утверждения можно сделать относительно $C(n)$ *и* $S(n)$*?*

Предположения

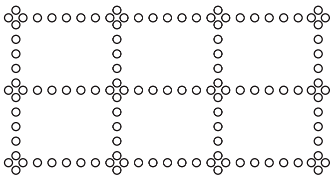
- Один из способов — составить таблицу значений для n, $S(n)$ и $C(n)$, обнаружить в таблице модели и интерпретировать приведенные утверждения на языке таблицы. Однако это не доказывает верность моделей из таблицы с точки зрения оригинального контекста сложения бумаги. Другой подход состоит в том, чтобы подтвердить утверждения с точки зрения сложения бумаги, а затем сделать выводы на основании табличных значений.
- Тот факт, что $1 + 2 + 2 + 23 + \cdots + 2n - 1 = 2n - 1$, можно показать с помощью формул для суммы геометрической прогрессии, а можно с помощью рассуждений на языке числа отрезков и складок и используя приведенные выше соотношения. Алгебра — это абстрактный язык, который не дает прямых ссылок на контекст, однако, думая над конкретными контекстами типа этого, вы глубже проникнете в алгебру.

Перфорации

Во времена, когда почтовые марки выпускались на листе бумаги с перфорацией, чтобы марки было проще отделять одну от другой, листок с шестью марками напоминал картинку, изображенную на следующей стр. Сколько перфораций должно быть на листе с r *рядами и с столбцами марок?*

Обобщите для w *перфораций по ширине, и* b *перфораций по высоте, и с перфораций по углам.*

Если бы кто-нибудь заявил, что у него есть лист с определенным числом перфораций, то как проверить, возможно ли это, *(и сколькими способами), не используя для этой цели настоящие перфорированные листы?*



Предположения

– Некоторые предпочитают зафиксировать один или несколько параметров, чтобы исследовать последствия изменения других параметров.
– Любопытные вещи случаются, если заменить нулем число рядов и столбцов марок!
– Чтобы «обратное» к расширению действие имело смысл, найдите способ манипулировать выражением таким образом, чтобы его можно было выразить яснее, например как произведение. Затем приложите требование к произведению к конкретному числу перфораций, соответствующим образом выраженному.
– В полностью обобщенном виде это довольно сложная задача. Придется системно контролировать изменение и обращать внимание на то, каким образом вы используете примеры в качестве руководства для подсчета перфорации.

Зри в корень

Обобщите следующие наблюдения:

$$2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2\frac{2}{3}}, \quad 5\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{5\frac{5}{24}}, \quad 6\sqrt{\frac{6}{35}} = \sqrt{6\frac{6}{35}}.$$

Каков диапазон допустимого изменения вашей переменной?

Предположения

- Что есть одно и то же, а что разное? Что остается постоянным, а что изменяется?
- Некоторые студенты склонны делать «ошибки», которые выглядят примерно так. В данном случае внимание привлечено к скрытому знаку «плюс» в смешанных дробях и скрытому умножению за пределами знака квадратного корня.

Вычитания с делением

Обобщите следующие наблюдения:

$$4 - 2 = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}, \quad \frac{16}{3} - 4 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}, \quad \frac{49}{6} - 7 = \frac{49}{42} = \frac{7}{6}.$$

Каков допустимый диапазон изменения?

Предположения

- Что есть одно и то же и что разное? Что остается постоянным, а что изменяется?
- Используйте связи, очевидные во втором и третьем примере, чтобы переписать первый, и выразите это как общую характеристику или свойство генерировать.

Работая со связями в моделях, вы получаете опыт в вычитании дробей, а также выражении общности.

Результат в кубе

Замечено, что $2 \times 3 \times 4 + 4 \times 10 = 43$, *а* $5 \times 6 \times 7 + 7 \times 19 = 83$. *Это примеры некой общей модели или просто аномалии, а не часть непрерывной модели?*

Предположения

– Что остается неизменным, а что меняется и каким образом? Какие связи тут могут быть?
– Работает ли ваша общность для отрицательных чисел? А как насчет дробей?
– Может ли быть нечто похожее для четвертых степеней?
– Различая конкретные элементы, узнавая связи между ними и выражая эти связи как свойства, вы используете структурный подход. Потом стоит проверить на других примерах. Генерация новых примеров и поиск связей — подход эмпирический.

Графики и функции

Зачастую графики рассматривают как конечный результат математической работы, а не способ представить связи визуально в целях дальнейшей интерпретации и исследования. Умение видеть связи как алгебраически, так и графически — мощный ресурс. Работа по программе часто сосредоточена исключительно на графиках функций, однако графики отношений, которые функциями не являются, также представляют интерес.

Дополнительные вопросы

Разница на два

– *Нарисуйте графики двух прямых, чьи наклоны отличаются на 2. Потом еще одну пару и еще одну.*
– *Нарисуйте графики двух прямых, чьи отрезки на оси*[1] x *отличаются на 2; потом еще одну пару и еще одну.*
– *Нарисуйте графики двух прямых, чьи отрезки на оси* y *отличаются на 2; потом еще одну пару и еще одну.*
– *А теперь нарисуйте графики двух прямых, чьи наклоны, отрезки на оси* x *и отрезки на оси* y *отличаются на 2.*

Запишите выражения для всех таких пар. Что особенного в 2?
Перенесите на более широкий контекст.

[1] X-координаты точек пересечения с осью Ox. — *Прим. ред.*

Watson and Mason (2006).

Предположения

– Должны ли двойки быть одинаковыми для каждого аспекта пары прямых? Что можно сделать в трехмерном пространстве?
– Смысл в «и еще одной» заключается в том, что, согласно третьей инструкции, многие начинают искать более интересные примеры, что дает отправной пункт для выражения общности. Вопросы построены таким образом, чтобы создать ограничения. Создавая общий класс объектов на каждом этапе, проще справиться с любым дополнительным ограничением. Когда я сталкиваюсь с задачей с несколькими ограничениями, я предпочитаю накладывать их последовательно, а не все сразу.

Вращения

При каких условиях можно вращать график функции вокруг начала координат и в результате также получить график функции? Если график функции нельзя вращать вокруг начала координат так, чтобы он по-прежнему оставался графиком функции, есть ли другие точки, которые можно использовать в качестве центра вращения, сохраняя при этом свойство «график функции»?

Предположения

– Попробуйте несколько знакомых функций, чтобы понять, какое качество разрешает или блокирует вращение. Начните с конкретных углов вращения, например 180 и 90°.
– Работая над этой задачей, вы поймете, что происходит с функцией, когда x становится очень большим по модулю как положительно, так и отрицательно. Кроме того, есть разница между графиком как объектом и функцией, графиком которой он является, рассматриваемый как множество точек. Также можно использовать понятие наклона.

Четные и нечетные функции

Если функция не меняет своего значения, будучи отраженной (симметричной) относительно линии $y = 0$, то она называется четной. Если же она инвариантна при двойном отражении, один раз относительно линии $x = 0$, а второй — относительно линии $y = 0$, ее называют нечетной функцией. Какие функции можно записать как сумму четной и нечетной функции?

Предположения

- Выразите, что значит быть четной (нечетной) с помощью символов как свойство $f(x)$.
- Исследуйте эффект композиции функции из четной или нечетной функции и попробуйте взять композицию двух нечетных функций.

Отражения

Если функция в определенной области с взаимно однозначна[1], то отражение ее графика относительно прямой — $y = x$ также график функции (обратной функции) в соответствующей области. Существуют ли функции, симметричные относительно прямой $y = mx$ для некоторого m? Для каждого m классифицируйте функции, отражение графиков которых относительно прямой $y = mx$ также является графиком функции.

Предположения

- Подумайте, как отразить любую точку относительно прямой $y = mx$. Затем сформулируйте условие, при котором геометрическое место точек $[x, f(x)]$ является графиком функции. На каждом этапе сравнивайте вычисления с частным

[1] Каждому y соответствует единственный x, для которого $f(x) = y$ и наоборот. — *Прим. ред.*

случаем, когда $m = 1$. Намного проще работать с графиками на прозрачном пластике.

Этот вопрос демонстрирует особую природу взаимной однозначности как свойства, гарантирующего существование обратной функции при помещении ее в более общий контекст.

Свойства многочленов

Для любого многочлена и любого интервала I постройте хорду[1] *AB этого многочлена в интервале I. Согласно теореме о среднем значении*[2] *есть хотя бы одна точка в интервале I, где касательная параллельна хорде. Где бы вы стали искать эту точку?*

Другими словами, классифицируйте кривые, для которых точка касания соответствует середине интервала для каждого интервала. Существует ли многочлен, для которого есть фиксированное отношение, отличное от $1 : 1$, где есть эта касательная? Что происходит по мере уменьшения интервала?

Предположения

- Поэкспериментируйте с аналогичными функциями. Найдите способ представить функции, используя производные, чтобы понять, что происходит по мере уменьшения интервала?
- Найти соответствующее свойство или теорему не всегда так просто. Можно использовать теорему Тейлора.

Свойства кубик

Представьте себе график многочлена третьего порядка[3]. *Начертите хорду между двумя точками кривой. Отметьте середину хорды и проведите через нее вертикальную прямую. А теперь возьмите любую другую хорду, у которой срединная точка лежит на этой же вертикальной прямой. Где пересекутся эти две хорды?*

[1] Соедините точки $(A, f(A))$ и $(B, f(B))$. — *Прим. ред.*
[2] Теорема Лагранжа. — *Прим. ред.*
[3] Такой график называется кубической параболой, или кубикой. — *Прим. ред.*

Предположения

– Можно воспользоваться программами динамической геометрии, однако не стоит верить изображениям, пока предполагаемое свойство не будет убедительным образом подтверждено.
– Если у кривой третьего порядка есть три вещественных корня, что случится, если вы начнете с хорды, проходящей через два из этих корней? Расширяйте до случая, когда первая хорда параллельна оси x.

Исследование свойств многочленов приводит к знакомству с ними как математическими объектами. В результате можно обобщать в нескольких направлениях.

Симметрия кубик

Известно, что графики квадратных многочленов симметричны. Однако графики всех многочленов третьего порядка также симметричны. Какого рода симметрия у всех таких кривых? Докажите свой ответ.

Предположения

– Хорошо начать с экспериментирования, например, распечатайте некоторые графики на прозрачном пластике и исследуйте их. Идентифицируйте геометрические/пространственные свойства графиков многочленов третьего порядка и исследуйте те симметрии, которые сохранят эти свойства. Для упрощения необходимых для доказательства вычислений воспользуйтесь компьютерной программой.

Вопросы, подобные этому, дают студентам возможность основательно познакомиться с классами примеров (в данном случае кривыми третьего порядка), в результате чего впоследствии им будет проще воспользоваться ими в качестве примеров, когда они познакомятся с другими понятиями.

Середина хорды

– *Что собой представляет геометрическое место точек (ГМТ), являющихся средними точками хорд графика данного многочлена второго порядка?*
– *Что собой будет представлять ГМТ, если заменить отношение 1 : 1 каким-либо другим? Что если это отношение больше 1 или меньше 0?*

Предположения

– Есть две противоположные стратегии. Зафиксируйте один конец хорды, а другой пусть движется по кривой, или зафиксируйте координату x средней точки, и пусть оба конца хорды изменяются.
– Любопытно сделать расширение на кривые третьего порядка; расширение на кривые четвертого порядка интересно, но туманно.

Функции и математический анализ

Понятия и инструменты исчисления составляют основной компонент обучения студентов на средних и старших курсах студентов-математиков. Следующие вопросы заостряют внимание на центральных понятиях в новых путях и применении идей анализа в необычном геометрическом контексте.

Дополнительные вопросы

Касательная мощность

Допустим, у нас есть гладкая функция (например дважды дифференцируемая) на $\mathbb{R}$; определите касательную мощность точки P, т.е. число касательных к графику функции в точке P. Исследуйте участки поверхности с такой же мощностью.

Предположения

– Можно начать с некой точки и представить себе касательные, проходящие через нее, а можно представить касательную, движущуюся по кривой и вращающуюся в плоскости.

Это задание полезно для углубления знания графиков функций, когда абсолютное значение x становится очень большим. Кроме того, это задание является своего рода вступлением к производной второго порядка.

Катимся вниз

Начертите график гладкой функции на $\mathbb{R}$.

– *Зафиксируйте точку* P *и нарисуйте график наклонов хорд, соединяющих точки* P *и* Q *на графике функции в зависимости от координаты* x *точки* Q. *Что произойдет, когда* Q *приблизится к* P?
– *Зафиксируйте интервал шириной* δ *и начертите график наклонов хорды от* $(x, f(x))$ *до* $(x+\delta, f(x))$ *в зависимости от* x. *Повторите то же самое для меньших значений* δ. *Что происходит с кривой, когда* δ *стремится к 0?*
– *Зафиксируйте радиус* r *и начертите график наклонов хорды длины* r *от* $(x, f(x))$ *до* $(t, f(t))$*в зависимости от* x, *где* $t > x$ *(в общей ситуации это трудно сделать!). Что происходит с графиком наклона, когда* r *стремится к 0?*

Предположения

– Динамическая геометрия и компьютерная алгебра — идеальные инструменты для создания первых двух конструкций как анимаций — с тем, чтобы ощутить динамику различных способов мышления о наклонах касательных и производных. Алгебраические препятствия последнего задания объясняют, почему это не используется для определения наклона гладкой кривой.

Свойства хорды квадратичных кривых

Возьмите две любые точки A и B на квадратичной кривой[1] *и проведите хорду AB. Пусть M — срединная точка AB, а C — точка пересечения квадратичной кривой и вертикали, проведенной из точки M. Проведите хорды AC и BC. А теперь поставьте срединные точки M_A на AC и M_B на BC, а также соответствующие по вертикали точки D и E на квадратичной кривой. Что можно сказать о длине отрезков M_AD и M_BE?*

Возьмите любую хорду AB кривой второго порядка. Начертите касательную к этой кривой, параллельную AB. Сравните точку касания со срединной точкой.

Предположения

– Попробуйте использовать самую простую квадратичную кривую. Можно ли в таком случае расширить аргументацию на все квадратичные кривые? Все параболы (может, придется по-другому интерпретировать «вертикальный»)? Вам придется найти подходящий способ представления хорд и их срединных точек.

Касательные к кривым второго порядка

Что представляет собой геометрическое место таких точек (ГМТ), что проведенные из них две касательные к графику квадратного многочлена расположены под определенным углом?

Предположения

– Можно прибегнуть к алгебре и вывести уравнения, с помощью которых определить ГМТ, но, может, есть геометрический способ увидеть его? Теперь попробуем действовать от обратного: допустим, у нас есть такое ГМТ, графики каких многочленов второго порядка и связанные с ними углы

[1] Автор имеет в виду график квадратного многочлена. — *Прим. ред.*

будут в таком случае? Это даст вам опыт работы с координатами точек на графиках функций.

Касательные между корнями кубических функций

Пусть a и b — два любых корня кубической функции $f(x)$. График $f(x)$ пересекается с осью x в точках $(a, 0)$ и $(b, 0)$. Пусть P — точка на графике $y = f(x)$ посередине между этими корнями (т.е. с x-координатой $(a+b)/2$). Проведите касательную к графику $f(x)$ через точку P и найдите, где она пересекает этот график. Докажите удивительный результат, который вы наверняка заметите.

Предположения

– Используя динамическую геометрию, вы быстро сумеете построить предположение. Доказывая результат, рассмотрите лучший способ представить $f(x)$ как сумму членов или произведение множителей. Выбор алгебраической формы для выявления наиболее значимой структуры задачи — неотъемлемая часть математического искусства. Поскольку в задаче задействованы корни $f(x)$, я решил выразить ее как произведение. Получите опыт использования координат точек на графиках функций. Что особенного в этих корнях? Можно ли использовать любую хорду? Как насчет расширения на многочлены более высоких степеней и/или не просто хорды, а параболы через три точки и далее?

Интегрирование по частям

Найдите функцию, для вычисления неопределенного интеграла от которой нужно будет 2 раза применить формулу интегрирования по частям.

Предположения

– Вспомните, что формула интегрирования по частям получается из формулы для производной произведения.

Задача становится интересной, когда вы идете дальше двух, трех, четырех и когда ищете разные способы, чтобы интегрировать по частям. В то же самое время она дает опыт интегрирования по частям и понимание того, когда именно стоит прибегать к этому методу.

Правило Лопиталя

Подберите функцию, для вычисления предела от которой нужно дважды применить правило Лопиталя (на самом деле Иоганна Бернулли[1]).

Обобщите: измените два; найдите разные способы многократного привлечения правила.

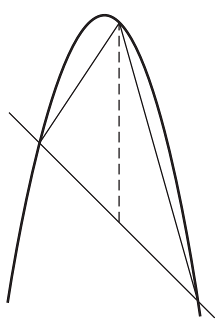
Предположения

– Независимо от метода, попытки построения примеров, требующих многократного использования, правила дают возможность более глубокого проникновения в него и понимания, как именно оно работает.

Делим площадь

Архимед сделал такое открытие: если основанием треугольника служит хорда параболы, а его вершина лежит на пересечении параболы и вертикали, проведенной из срединной точки хорды, то площадь этого треугольника составляет $\frac{3}{4}$ площади, заключенной между параболой и хордой, а также является максимальной площадью для любого треугольника в этой области с хордой в качестве основания.

Существуют ли другие функции с такой же или с другой константой[2]?



[1]В российской традиции правило Бернулли–Лопиталя. — *Прим. ред.*

[2]Автор имеет в виду отношение площадей. — *Прим. ред.*

Предположения

– Найдите красивое вычисление, проверяющее предположение Архимеда. Прежде чем расширять дальше, попробуйте срединные точки хорд на кубиках[1].
– Для кубики рассмотрите площади областей между кривой и выше и ниже любой прямой, проходящей через точку перегиба. Для графика многочлена четвертой степени рассмотрите площади областей между кривой и выше и ниже линии, проходящей через две точки перегиба. Можно ли расширить на кривые пятого порядка?
– Отличная практика построения и исчисления интегралов для площадей, а также для работы с несколькими неизвестными. Параметрическое представление точек на кривой значительно упрощает вычисления.

Комбинируем функции

Сколько разных функций можно построить с помощью операций сложения, вычитания и композиций функций из функции $f(x) = x^2$*, если она входит в выражение два, три, четыре, ... раз? Попробуйте объяснить на словах, как распознать такую функцию.*

Используя функции $f(x) = x^2, g(x) = x - 1$ *и* $h(x) = 3x$*, а также операции сложения, вычитания, умножения и композиции функций, сколько разных функций можно построить, используя каждый раз все три функции? Попробуйте объяснить на словах, как распознать функцию, образованную подобным образом.*

Попробуйте использовать другие тройки функций.

Предположения

– Создавать свои собственные примеры намного интереснее, чем решать те, что придумали другие; кроме того, это ведет к усвоению и отработке рутинных процессов, в данном случае — композиции функций.

[1] Графиках кубических многочленов. — *Прим. ред.*

– Попробуйте вместо x^2 использовать другие функции, например x^3 или $\sqrt{x}$ и т.д.

Последовательности и рекурсии

Обнаружение и выражение структуры генерирования последовательности или рекуррентные последовательности могут привести к замечательным возможностям выразить общность, а также строить предположения и подтверждать их. Все это дает богатую основу для последующей работы с пределами.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Полоска бумаги	1	Соотнесение входной последовательности с последовательностью результатов.
Итерации	5	Знаменитая нерешенная задача; понятие итерированного действия.
Внутри и снаружи	10	Соотнесение конечной последовательности с последовательностью действий. Сложная модель итерации в доступной постановке.

Дополнительные вопросы

Циклические рекурсии (А)

Рекуррентная последовательность, заданная правилом $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$*, повторяет себя после шести итераций*[1] *независимо от того, каковы два начальных числа. То же самое происходит с последовательностью* $u_{n+2} = u_{n+1}/u_n$*. Поэкспериментируйте с другими рекурсиями, такими как* $u_{n+2} = (1 + u_{n+1})/u_n$*, чтобы получить другую длину цикла.*

[1] Периодична с периодом 6. — *Прим. ред.*

Предположения

– Попробуйте изменить аддитивную константу 1; попробуйте изменить знак.
– Попробуйте наложить на параметр t условие, при котором рекуррентная последовательность $u_{n+2} = tu_{n+1} - u_n$ будет иметь конкретную длину цикла.

Переход от нахождения длины цикла к поискам рекурсий с другой длиной цикла, к наложению условий на параметры — это распространенный математический подход к исследованию.

Циклические рекурсии (B)

Возьмите любое отличное от нуля число p. А теперь выберите два начальных числа a и b, итеративно примените действие, которое замещает $[a, b]$ *на* $\left[b, \frac{p(b+p)}{a}\right]$. *Какое это имеет отношение к «Циклическим рекурсиям (A)»? Почему происходит то, что происходит? Найдите другие рекурсии с другой длиной цикла.*

Предположения

– Для начала выберите простые, но не слишком, числа для p, a и b или, если вы дружите с алгеброй, работайте с буквами. Предположения необходимо сразу же проверять на бумаге.

Ограничения

Правда ли, что $3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots}}}}$

Jackson and Ramsay (1993); Rabinowitz (1992).

Предположения

– Поиск рекуррентной формулы, которая всегда верна, метод «развертывания» для создания все более длинных последовательностей весьма эффективен, но с точки зрения математики не слишком убедителен.

– Подтвердить предел, если он существует, не составляет большого труда; показать, что предел существует — совсем другое дело!
– Постройте подобные последовательности сами с помощью подобной процедуры развертывания и метода подстановки.

Развертывание девяток

Допустим, что $x = 0{,}99999\ldots$.
Тогда $x = 0{,}9+x/10 = 0{,}99+x/100 = 0{,}999+x/1000\ldots$. *Каждое из этих уравнений можно использовать, чтобы вывести значение* x. *Назовем это методом развертывания для нахождения значения бесконечных процессов, если они сходятся. Каково значение* x?

Попробуйте приложить процесс развертывания к

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1\ldots .$$

Предположения

– Эйлер решил, что подходящим значением для этого бесконечного процесса сложения и вычитания 1 была $1/2$. Почему он пришел к такому выводу? Коши не согласился бы с этим значением, поскольку, согласно критериям Коши, эта последовательность на самом деле не сходится. Вместо этого частичные суммы колеблются между 0 и 1.

Развертываем связь Фибоначчи

Допустим, что x *— значение следующего бесконечного процесса (если он сходится):*

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

А теперь используйте развертывание, чтобы заменить часть вычисления им самим. Например,

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}.$$

Допустим, что y — значение процесса $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$ (если он сходится). Каково значение y?

Пусть z — значение процесса $-1 + \left(-1 + \left(-1 + (\cdots)^2\right)^2\right)^2$ (если он сходится). Чему равно z?

Допустим, что w — значение процесса, представленного формулой ниже (если он сходится).

$$1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \frac{1+\cdots}{(\cdots)}}{\frac{1+\cdots}{(\cdots)}}}{\frac{1+\cdots}{(\cdots)}}}{\cfrac{1 + \frac{1+\cdots}{(\cdots)}}{\frac{1+\cdots}{(\cdots)}}}}{\cfrac{1 + \cfrac{1 + \frac{1+\cdots}{(\cdots)}}{\frac{1+\cdots}{(\cdots)}}}{\cfrac{1 + \frac{1+\cdots}{(\cdots)}}{\frac{1+\cdots}{(\cdots)}}}}$$

Каково значение w?

Предположения

- Один подход состоит в том, чтобы аппроксимировать эти выражения, урезать их и вычислить или посмотреть, что произойдет, если брать все больше и больше членов.
- Другой подход — предположить, что у них есть значение, и использовать бесконечность в их описании, чтобы сформулировать связь между двумя выражениями, используя это значение.
- Исследуйте другие аналогичные этим последовательности. Которые из них сходятся?

Дает возможность научиться видеть связь между частью и целым, а затем подтвердить предположение, что они сходятся.

Накапливание пределов

Что характеризует множества S на действительной прямой, которые могут быть множеством предельных точек (пределами последовательностей) некоторого подмножества действительных чисел?

Предположения

- Начните с построения примеров и рассматривайте их как множества предельных точек, представляющих типы подмножеств действительных чисел.

С одним из подходов можно ознакомиться в книге Thomas Sibley (2008). Исследуя вопросы о том, какие типы объектов возможны в качестве результатов некоторого конкретного действия с этими объектами, вы получите более глубокое знание того, что влечет за собой это действие.

Математическая индукция

Большинство общих формул, выведенных в предыдущих вопросах и каких бы то ни было еще из этой книги, можно доказать с помощью математической индукции. Доказательство методом математической индукции используется очень часто и зачастую является самым простым подходом, как только у вас есть формула. Однако этот подход не всегда дает такое же глубокое понимание, как доказательство с использованием структуры непосредственно самой задачи. В начальных главах книги мы делали упор именно на структуре, а не на доказательстве методом математической индукции.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Лоскутное одеяло	1	Подтверждение общей формулы, полученной в результате экспериментирования; требует понимания того, как создаются дополнительные участки.
Шахматные клетки	1	Подтверждение общего выражения с одним неизвестным.
Шахматные прямоугольники	2	Подтверждение общей формулы с двумя параметрами (длина и ширина).
Чехарда	3	Подтверждение общей формулы с двумя параметрами, если слева и справа допускается разное число колышков.
Окружность и точки	4 и 5	Подтверждение общей формулы с биномиальными коэффициентами или, более экспериментально, общей формулы, полученной подгонкой многочлена к опорным точкам.
Многоугольные числа	10	Отличная практика для подтверждения формул.

Дополнительные вопросы

Сортируем по номерам

Представьте, что перед вами лежат несколько стопок керамических плиток, у каждой из которых свой уникальный номер. Плитки довольно большие и тяжелые, так что перекладывать из одной стопки в другую можно только по одной. Вы выбираете положительное число d и решаете положить плитку поверх другой, только если номер плитки, которую вы перекладываете, хотя бы на d меньше, чем номер плитки, которая в данный момент лежит сверху. Если вы хотите положить плитки в стопках в порядке *убывания снизу вверх, вам понадобится как минимум d стопок. Какое минимальное число стопок вам нужно, чтобы вы всегда могли рассортировать плитки для данного d?*

Предположения

- Можно экспериментировать с $d = 1$ (вариант «Ханойская башня», Tower of Hanoi), но в данном случае следует начать с плиток в некотором произвольном порядке в каждой стопке. Чтобы быть уверенным в том, что вы всегда можете переложить хотя бы одну плитку, вам нужно $d + 1$ стопок. Этого достаточно?
- Можно прибегнуть к индукции с номерами плиток. Мыслите на языке действия и того, что оно сохраняет.
- Выбирать то, к чему применять индуктивный метод, не всегда так просто, как может показаться.

Шахматные клетки — математическая индукция

Докажите, что число клеток на шахматной доске — $n(n+1) \times \times (2n+1)/6$. Это другой вариант решения задания из главы 1.

Возможно ли объяснить этот результат с точки зрения шахматной доски, или же это можно сделать только с помощью алгебры, видоизменив выражение, полученное в главе 1?

Предположения

- Есть ли способ организовать физические квадраты с единичной толщиной в трехмерном пространстве? Может, рассмотреть шестерку, разложив шесть копий всех квадратов? Поиск способов организации предметов таким образом, чтобы их было удобно считать, — это часть искусства комбинаторного мышления.

Лоскутное одеяло полностью

Докажите результат «Лоскутного одеяла» (стр. 31) с помощью математической индукции.

Выясните историю проблемы четырех красок. В чем разница в условиях «*Лоскутного одеяла*» и проблемы четырех красок?

Предположения

– Убедитесь в том, что все случаи задействованы в индукционном переходе. Будьте осторожны, выбирая переменную для индукции: это должно быть натуральное число, а не геометрическая фигура или какой-либо другой математический объект. Есть много лоскутных расположений с определенным числом линий или участков. Как можно быть уверенным в том, что вы охватили все случаи?

Абстрактная алгебра

Эти вопросы можно использовать в качестве вступления к теории групп и смежных тем, если расширить их за пределы конкретного, однако первый из этих вопросов доступен даже детям — если поставить вопрос соответствующим образом; его можно менять, чтобы выразить основную мысль различными способами. Вместе с тем эти задачи используют и могут развить идеи, без которых немыслима абстрактная алгебра, а именно: замыкание, бинарная операция и свойства операций, подобных ассоциативности.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Мебель	5	Процесс обобщения затрагивает идею группы.

Дополнительные вопросы

Простые остатки

В этой задаче рассматриваются только те числа, которые при делении на 3 дают в остатке 1. Выпишите 10 таких чисел и убедитесь в том, что если вы перемножите любые два из них, то получите еще одно число с этим свойством. Почему это так?

Выпишите первые 10 чисел, которые «просты» в этом множестве. Это те числа, которые нельзя записать как нетривиальное произведение чисел с тем же свойством. Что общего и в чем разница в разложении на множители числа 100 в обычной системе и в данной системе?

Что особенного в числе 1? А в 3? Что если их изменить?

А теперь рассмотрите только те числа, которые при делении на 5 дают остаток 1 или 4. Сохраняют ли они это свойство, если два из них перемножить? Одинаковые ли простые числа, если рассматривать только числа с остатком 1 и если разрешить числа с остатком 4?

Предположения

- Не так-то просто подобрать примеры для проверки: они не должны быть слишком простыми, но и не должно быть слишком много арифметики.
- По-настоящему понятие (в нашем случае простые числа) осознаешь лишь тогда, когда расширяешь его и видишь сходства и различия. Согласно основной теореме арифметики разложение на простые множители дает единственно возможное представление натурального числа. Но единственно возможное не значит универсальное!

Эту задачу можно рассматривать как путь в раздел математики под названием «*теория групп*».

Полезное расширение — рассмотреть *простые числа Гаусса*[1]: комплексные числа вида $a + ib$, где a и b – целые числа. Можно изменить i на $\sqrt{5}$, или даже $\sqrt{-5}$, или еще какое-нибудь иррациональное выражение и задать вопрос: единственное ли разложение на такие простые множители? Сначала убедитесь в том, что если вы перемножите два числа, то останетесь в выбранной системе.

Теорема Кёнига

В прямоугольной сетке у некоторых ячеек есть противоположная пара, а у других нет. Покрытие — это множество строк и

[1] Как всегда, число Гаусса считается простым, если не имеет нетривиальных делителей. — *Прим. ред.*

столбцов, которые включают или покрывают все паросочетания. Независимое множество пар — это подмножество таких пар, никакие две из которых не лежат в одной строке или столбце.

Утверждение: минимальное число строк и столбцов, которые покрывают все паросочетания, равно размеру максимального независимого множества этих паросочетаний. Другими словами, размер минимального покрытия — это размер максимального независимого множества паросочетаний.

Двудольный граф имеет два множества вершин, и каждое ребро соединяют вершины из разных множеств.

Утверждение: минимальное число вершин, где сходятся все ребра, равно максимальному числу ребер без общих вершин.

Попробуйте доказать, что каждое из этих двух утверждений можно доказать на основании другого. Но верны ли эти утверждения?

Предположения

– Вам нужна логическая цепочка. Одно из утверждений может казаться проще, так что попробуйте доказать, что они эквивалентны. Примеры могут подсказать доступ к скрытой структуре. С помощью примера попробуйте соотнести два утверждения, попрактикуйтесь в интерпретации и моделировании.
– Придется напрячь свою логику, зато других математических сложностей тут нет. Попробуйте найти способ сделать независимое множество паросочетаний больше, если все покрытия больше (или сделать покрытие меньше, если все покрытия меньше). Это подтверждает основную мысль: любой потенциальный кандидат (в данном случае для самого большого множества) можно видоизменить при наличии другой информации (в данном случае — что все покрытия больше). Что произойдет в трехмерном пространстве?

Найди тождество!

Возьмите множество чисел $\{1, 2, 3, 4\}$ по модулю 5 (возьмите остаток от деления на 5). Произведение любых двух из них (по мо-

дулю 5) тоже одно из них. А теперь умножьте каждое число на 6 и на этот раз используйте модуль 15 (возьмите остаток от деления на 15). Какой элемент служит единицей[1] *по модулю 15? Подобным образом умножьте каждое число на 8 и используйте модуль 20.*

Возьмите числа $\{1, 3, 5, 7\}$ *по модулю 8. Они также имеют свойство — произведение каждых двух из них (по модулю 8) тоже одно из них. А теперь умножьте каждое число на 3 и используйте модуль 24 или умножьте каждое число на 5 и используйте модуль 40. Выясните в каждом случае, какое число является единицей по данному модулю и почему? Обобщите. Почему это не работает, если число умножить на 2 и использовать модуль 16?*

Предположения

– Может, есть связь между множителем 6 и модулем, с учетом которого берутся остатки, что позволяет прогнозировать, который элемент будет единицей в общем случае.

Занятно, что важно не само прогнозирование, которое из чисел будет единицей, а понимание того, когда и почему конструкция работает. Эти группы чисел — отличный иллюстративный пример для студентов, которые могут наивно полагать, что единица «очевидна».

Подмножества группы

Допустим, у нас есть конечная группа G, *а* $P(G)$ *обозначает множество всех подмножеств группы* G. *Возьмите операцию над подмножествами:* $A \circ B = \{ab : a \in A, b \in B\}$. *Какие наборы подмножеств* $P(G)$ *образуют группу относительно этой операции?*

Предположения

– Пробовать на конкретных группах не слишком эффективно,

[1]То есть при умножении на него остаток от деления на 15 не меняется. — *Прим. ред.*

если сначала не осознать задачу. Подумайте вместо этого, что значит для множества быть единицей в этой новой группе.
- Что насчет обратных величин? Можно прибегнуть к понятиям смежных классов и нормальных подгрупп.

Группа кубической кривой

Даны любые две точки на кривой третьего порядка, проходящая через них прямая пересекает кривую в единственно возможной третьей точке. Это приводит к операции на действительной прямой: $x \circ y = z$, где $(x, f(z))$ — третья точка пересечения прямой, проходящей через точки $(x, f(x))$ и $(y, f(y))$. Если x и y совпадают, то прямая — это касательная к кривой в этой точке. Корректно ли определена эта операция? (Другими словами, всегда ли возможно найти одно-единственное значение для $x \circ y$?) Является ли эта операция ассоциативной? Есть ли у этой операции единица? Является ли она коммутативной? Есть ли обратная величина для каждого действительного числа?

Предположения

- Разумно начать с очень простой кубической кривой или с представителей трех возможных типов кубических кривых.
- Конструкция расширяется на скрученные кубические кривые в пространстве, т.е. кривые вида $(t, t2, t3) : t \in \mathbb{R}$.
- В более общем случае для графика многочлена степени d многочлен степени $d - 2$, пересекающий кривую в любых $d - 1$ точках, должен пересекать ее в d-й точке, так что аналогичную операцию можно определить, отправляя $d - 1$ экземпляров действительных чисел в $\mathbb{R}$. Какого вида математическую структуру они подтверждают?

---

j-k-соответствие

Функция f называется j-k-соответствием, если число значений в области определения, которые отображают в любое другое множество из k значений в множестве значений, не больше, чем j.

Иными словами, для любого множества S в области определения, если число элементов множества $\{f(s) : s \in S\}$ больше k, то число элементов множества S больше j. Говорят, что соответствие f — строго j-k, если число элементов в образе каждого j-элементного множества из области определения ровно k.

Допустим, композиция $f \circ g$ является j-k-соответствием . Какие выводы можно сделать относительно соответствий f и g? А что если соответствие $f \circ g$ строго j-k?

Предположения

- Начните с $k = 1$ и пусть j меняется.
- Случай $j = k = 1$, похоже, вам знаком. Попытки расширять то, что вам уже знакомо, часто открывают новые возможности.

Свойства, сохраняющиеся при сопряжении

Пусть f — взаимно-однозначная функция, таким образом, обратная к ней — тоже функция. Функция $f^{-1} \circ g \circ f$ сопряжена с g посредством f. Какие свойства (такие как взаимная однозначность, непрерывность, периодичность и т.д.) функции g сохраняются при сопряжении? Какие дополнительные свойства f сохранят разные свойства g?

Предположения

- Будьте осторожны, работая с примерами: если они слишком простые, могут возникнуть ложные выводы.
- Производя действие или операцию с математическим объектом (в данном случае сопряжение функции) и анализируя, какие свойства сохраняются, а какие нет, вы глубже понимаете роль этих свойств.

Периметр, площадь и объем

Понятия периметра, площади и объема имеют практическое значение. Эти понятия проходят в начальных классах, однако тонкости определения помогут изучающим математику подняться на высочайший уровень понимания. Формулы варьируются от элементарных до сложных.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Коза на привязи	2	Интерпретация словесного определения как схемы и использование геометрических отношений для определения составляющих фигур площади.
Коза на привязи (силосная башня)	10	Определение площади с помощью методов математического анализа.

Дополнительные вопросы

Площадь и периметр

– *Какие действия можно произвести с фигурой, не изменяя ее периметра?*
– *Какие действия можно произвести с фигурой, не изменяя ее площади?*
– *Какие действия можно произвести с фигурой, не изменяя ни периметра, ни площади?*

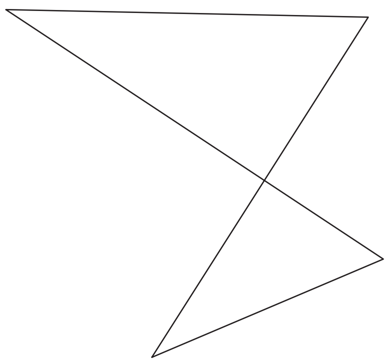
Предположения

– Для начала ограничьтесь конкретным классом фигур, например прямоугольниками, чтобы ощутить возможности. Затем постарайтесь расширить или видоизменить описание этих действий, чтобы применить их к разным многоугольникам или ко всем фигурам, которые не пересекают сами себя.

Одно из достижений математиков двадцатого века состоит в следующем открытии: если сосредоточиться на действиях и свойствах, которые остаются неизменными, то зачастую это приводит к мощным определениям с точки зрения практического применения — как за пределами математики, так и внутри нее. Тогда чистая математика зачастую изучает сами действия как объекты и анализирует инвариантные действия с ними!

Расширяем площадь

Есть ли разумный способ определить площадь самопересекающегося многоугольника?



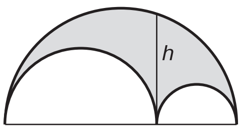
Предположения

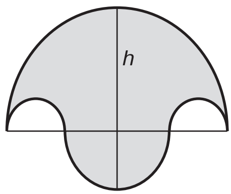
– «Разумный» в данном случае подразумевает, что он не противоречит обычному определению, если применить его к несамопересекающимся многоугольникам, и сочетается с общими свойствами площади. Есть ли разница в определении площади вогнутого многоугольника и самопересекающегося многоугольника?

Только пытаясь расширить идеи, вы начинаете по-настоящему понимать ограничения, которые делают их эффективными. Если вы озадачите площадью самопересекающегося многоугольника программу динамической геометрии, то можете получить нулевой результат!

Архимедовы области

Затененная часть первой области называется «арбелос» (греч. «нож сапожника»), а затененная часть второй — «салинон» (греч. «солонка»). Обе области состоят из полуокружностей. Выразите площадь заштрихованных фигур через расстояния, обозначенные h.



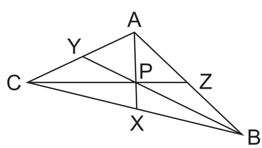


Предположения

- Обозначьте то, что вам неизвестно, буквами, чтобы выразить геометрические отношения алгебраически.
- Не забывайте о том, что вам НУЖНО узнать, и о том, что вы ЗНАЕТЕ.

Сумма и произведение пропорций

Пусть P — любая точка внутри треугольника. Начертите прямые APX, BPY и CPZ, как показано на рисунке.



Найдите следующие выражения:

$$\frac{PX}{AX}+\frac{PY}{BY}+\frac{PZ}{CZ}, \quad \frac{AZ}{ZB}+\frac{AY}{YC}-\frac{AP}{PX}, \quad \frac{AY}{YC}\times\frac{CX}{XB}\times\frac{BZ}{ZA}.$$

Предположения

– Подумайте об использовании отношений для расчета соотношения площадей. Попробуйте соотнести все площади с площадью ABC. Если две дроби равны, то они также равны дроби, числитель которой — сумма их числителей, а знаменатель — сумма их знаменателей.
– Использование динамической геометрии может только подтвердить промежуточное измерение.
– Чтобы перейти от соотношений отрезков к соотношениям площадей, вспомните о том, что площади треугольников с основаниями на одной прямой и общей вершиной вне этой прямой связаны.
– Что будет, если точка P за пределами треугольника? Вспомните теорему Чевы.

Рожок с мороженым

Шарик мороженого вложен в конусообразный рожок. Какой должен быть радиус шарика, чтобы в рожок с заданным углом вошло максимальное количество мороженого?

Идея взята из сборника Matt Richley Jackson and Ramsay (1993), с. 119.

Предположения

– Пожалуй, потрудиться придется больше, чем может показаться сначала. Начните с работы над вспомогательными вопросами, например объем неполного шара. Попробуйте выразить объемы через параметры, с которыми легче производить вычисления.

Средние линии фигуры

Охарактеризуйте плоские фигуры со следующим свойством: есть неподвижная точка P, лежащая на каждой прямой, которая делит площадь этой фигуры пополам.

Поменяйте площадь на периметр.

Предположения

– Следите за неоправданными выводами относительно центров тяжести и деления площади пополам!

Геометрические рассуждения

Вопросы из этого раздела имеют отношение к общим геометрическим и пространственным рассуждениям и по большей части доступны и без обширного знания геометрии. Геометрическое рассуждение подкрепляется использованием визуализации и воображения, а также систематическим мышлением и анализом. Кроме того, необходимо наблюдение за физическим миром, причем внимание необходимо направлять с помощью известных математических построений, а именно линий, плоскостей и пересечений.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Конверты	2	Использование геометрических отношений.
Кубы в кубе	2	Использование пространственного представления куба, состоящего из маленьких кубиков.
Покрашенные покрышки	4	Рассуждения построены на конструкции велосипеда и длине окружности.
Четырехугольники в треугольнике	5	Применение геометрических ограничений; может помочь метод проб и ошибок, но более убедителен системный разбор возможных случаев с помощью геометрических отношений.

Название	Глава	Тема
Многогранники	6	Использование геометрических отношений в трехмерном пространстве.
Бумажный узел	6	Геометрические отношения, возникающие при складывании бумаги.
Качели	8	Выражение геометрических ограничений.
Бумажные банты	8	Вопросы, возникающие при сложении бумаги, используя пространственные отношения.
Раскрась куб	10	Использование пространственных отношений.
Прямые углы	10	Прояснение определений; поиск связей, налагаемых геометрическими ограничениями.
Тени	10	Выражение общего опыта математическими средствами.

Дополнительные вопросы

Геометрические итерации 1

Начертите треугольник ABC. Возьмите любую точку P_0 на плоскости треугольника. Отразите P_0 относительно AB, обозначьте полученную точку P_1; отразите P_1 относительно BC и получите точку P_2, а P_2 отразите относительно CA и получите P_3. Повторите цикл еще раз, пока не получите точку P_6. А теперь проследите за отрезком P_0P_6 по мере изменения точки P_0. Дайте объяснение.

Предположения

– Сформулировать предположение значительно проще с помощью динамической геометрии, но почему так происходит?

Геометрические итерации 2

Выберите три прямые на плоскости L_0, L_1 и L_2 (никакие две не параллельны). Поставьте точку P_0 на окружности в этой плоскости. На k-м шаге проведите линию перпендикулярно линии L_k

(k берется по модулю 3) через точку P_k. Пусть P_{k+1} — еще одно пересечение перпендикуляра и окружности. Продолжайте в том же духе. Объясните, что и почему происходит!

Снова выберите три прямые L_0, L_1 и L_2 на плоскости (не параллельные). Поставьте точку A_0 на L_0. Проведите перпендикуляр к L_0 через точку A_0 и пометьте точку пересечения с L_1 как B_0. Проведите перпендикуляр к L_1 через точку B_0 до пересечения с L_2 в точке C_0 и перпендикуляр к L_3 через точку C_0 до пересечения L_0 в точке $A-1$. Продолжайте в том же духе. Объясните, что и почему происходит!

Предположения

– Сформулировать предположение значительно проще с помощью динамической геометрии, но почему так происходит?
– Попробуйте изменить число прямых. Может, попробовать с треугольниками «попроще»?

Мозаика

Представьте себе треугольник. Прочувствуйте возможности выбора. А теперь представьте себе копию вашего треугольника. Сколько различных четырехугольников можно составить, соединив ваши два треугольника сторонами? Постарайтесь обходиться без бумаги и карандаша как можно дольше!

– *Сосредоточьтесь на сторонах: какова длина сторон у ваших четырехугольников?*
– *Сосредоточьтесь на углах: каковы углы у ваших четырехугольников?*

Какие из ваших четырехугольников можно сложить двумя разными способами из других пар треугольников? Из одной и той же пары треугольников?

Предположения

- Интересные варианты получаются при сложении фигур из трех, четырех и более копий данного треугольника (особенно равностороннего треугольника), квадратов, прямоугольников данного размера, конгруэнтных четырехугольников, правильных шестиугольников и даже кубов или конгруэнтных кубоидов. Сосчитать, сколько именно разных фигур можно составить, особенно после пяти или шести, весьма сложно, это предоставляет отличную практику распознавания отношений и обнаружения конгруэнтности замысловатых фигур.
- Чем дольше вы напрягаете свое воображение, строя ментальные образы, тем лучше будет работать ваше воображение. Затем, когда вы рисуете схему, ее можно эффективно использовать для восполнения и стабилизации ваших ментальных образов.

Раздели фигуру на части

Какие фигуры при разрезании по прямой образуют две конгруэнтные фигуры, подобные исходной? А какие фигуры образуют две подобные фигуры, подобные исходной? А две подобные фигуры?

Предположения

- Попробуйте построить фигуры. Ваша цель — классифицировать все возможные фигуры. Сколько сторон у них может быть?
- А что насчет двух разрезов для образования трех подобных фигур?
- Что насчет трех измерений?
- После нахождения нескольких таких фигур попытки показать, что вы нашли все возможные, требуют логической и геометрической аргументации.

Числовой лабиринт

Нарисуйте замкнутый прямоугольный лабиринт (все повороты под прямыми углами; в конце концов тропа завершается в исходной точке; стены лабиринта могут пересекаться). Найдите связь между числом прямых углов по часовой стрелке, против часовой стрелки и числом полных поворотов, когда вы блуждаете по вашему многоугольнику в одном направлении. Является ли эта связь свойством всех прямоугольных многоугольников?

Что если прямые углы изменять до $\pm\theta$? При каких значениях θ этот лабиринт может замкнуться?

Предположения

- Это развитие «*Прямых углов*» из главы 10 (стр. 248).
- Если взять основную идею (в данном случае прямые углы) и исследовать, что можно построить с ее помощью, вы получите возможность отработать терминологию и методологию, а также узнать много нового, особенно узнавать и выражать связи.

Рациональная геометрия

Точку называют рациональной, если обе ее координаты — рациональные числа. Прямая называется рациональной, если на ней есть две рациональные точки. Окружность называется рациональной, если на ней три рациональные точки.

- *Может ли на прямой быть только одна рациональная точка? Могут ли на окружности быть ровно одна или ровно две рациональные точки?*
- *Может ли рациональная прямая иметь больше двух рациональных точек? Может ли на рациональной окружности быть больше трех рациональных точек?*

Предположения

– Построение своих собственных примеров включает поиск как простейшего примера, так и самого общего — с тем, чтобы быть уверенным в том, что рассмотрены все возможные случаи.

Логика

В следующих вопросах упор именно на логической аргументации, а не на конкретном алгоритме решения или понятии. В некоторых из этих вопросов ключ к решению состоит в систематической работе над разными возможностями; в других необходимо быть настороже, дабы заметить скрытые возможности и избежать неоправданных допущений. Есть вопросы с классическими логическими моделями, например *доведение до абсурда*.

Вопросы из предыдущих глав

Название	Глава	Тема
Завтрак дам	2	Систематическая аргументация по поводу возможностей логических связей.
Шустрые тосты	2	Аргументация по поводу свойств математических объектов; дает возможность получить первый опыт оптимизации.
Покрашенные покрышки	4	Аргументация основана на конструкции велосипеда и длине окружности.
Мебель	4	Аргументация основана на пространственных свойствах матрицы.
Опять про мебель	10	
Эврика!	5	Поиск способа представить связи, чтобы усилить аргументацию.
Пятнадцать	5	Найти способ представить отношения таким образом, чтобы помощь рассуждениям.
Клетка с молоком	5	Аргументация основана на пространственных свойствах матрицы.
Девять точек	6	Аргументация построена на преодолении необязательных ограничений.
Верно или неверно	6	Аргументация основана на логике.

Название	Глава	Тема
Картезианская погоня	10	Аргументация в контексте игры основана на пространственных связях; четные и нечетные числа играют роль, т.к. играют двое.
Всем поровну	10	Аргументация по поводу пространственных связей.
Чашки в упаковке	10	Аргументация основана на обнаружении инвариантов.
Домино Глэйзера	10	Аргументация основана на пространственных связях.
Равнина Налларбор	10	Аргументация основана на пространственных направлениях.
Тридцать один	10	Аргументация о стратегии в игровом контексте основана на простой арифметике.

Дополнительные вопросы

См. также «*Среднее арифметическое*» (стр. 283) и «*Остатки сладки*» (стр. 268).

С Днем рождения!

Однажды мне прислали поздравление с днем рождения с зашифрованной годовщиной:

$$\textit{Поздравляем с } \begin{bmatrix} 16 & 15 & 21 & 12 & 18 \\ 5 & 4 & 10 & 1 & 7 \\ 20 & 19 & 25 & 16 & 22 \\ 6 & 5 & 11 & 2 & 8 \\ 11 & 10 & 16 & 7 & 13 \end{bmatrix} \textit{-м днем рождения.}$$

В инструкции было сказано: выберите пять чисел, одно из каждой строки и каждого столбца, и сложите их. Как это работает? Составьте подобную таблицу для себя.

Предположения

– Какие действия можно произвести над этой таблицей, не изменяя суммы? Для упрощения ситуации эффективно искать действия, которые оставляют свойство неизменным.

Общие дни рождения

Допустим, что в некоторой компании из любых пяти человек по меньшей мере у двоих день рождения в один и тот же день.

Каково наименьшее число людей, для которых в любой группе этой численности по меньшей мере пятеро родились в один и тот же день? Какие еще подобные утверждения можно сделать?

Обобщайте!

Предположения

– Можно установить предел числу таких дней рождений в компании. Также можно разработать худший случай или самую большую группу людей, где нет пятерых с общим днем рождения.

Обращая внимание на то, как проработка конкретного случая дает вам возможность обобщения.

Прямоугольный манимакс

Начертите прямоугольную матрицу и поставьте число в каждую ячейку.

– *В каждой строке обведите максимум, а затем обратите внимание на минимум среди них.*
– *В каждом столбце поставьте квадратик вокруг минимума, а затем обратите внимание на максимум среди них.*

Что можно сказать, если сравнить минимум максимальных чисел в строках и максимум минимальных чисел в столбцах?

Предположения

– Попробуйте экспериментировать, выбрав пример, который не является слишком особым. Используйте его, чтобы понять, что происходит с точки зрения структуры, например, «конкретизируя» свое внимание на отдельной строке и отдельном столбце.

– Попробуйте заменить максимум суммой; попробуйте заменить минимум суммой; попробуйте заменить сумму произведением.
– Попробуйте заменить максимум средним арифметическим, а минимум — средним геометрическим (почему это меняет рассуждение?) или замените максимум средним арифметическим, а минимум — гармоническим средним.
– Почему не работает, если заменить максимум арифметическим средним, но оставить минимум?
– Что будет, если использовать среднее арифметическое и для строк, и для столбцов?
– Это идеальная возможность экспериментировать на действительно простом случае, чтобы узнать, в чем тут дело, а затем работать над более сложным случаем, чтобы попытаться понять, что происходит. Чтобы получить контакт со скрытой структурой, нужно не просто вычислить максимум в каждой строке и т.д. Нужно организовать все так, чтобы вы могли понять связи, особенно их максимумы и минимумы.
– Экспериментирование может означать не просто выбор отдельного расположения чисел, но также концентрацию на некоторой отдельной части более сложной конфигурации. Например, попробуйте сосредоточиться на максимуме в отдельной строке и на минимуме в отдельном столбце. Что вы можете сказать об их связи?
– Чтобы зондировать, что на самом деле происходит с точки зрения структуры, можно изменить максимум и минимум на другую «статистику» (типичные значения), чтобы понять, что работает, а что нет.

См. также «*Обобщенный манимакс*».

Обобщенный манимакс

S и T — два семейства множеств действительных чисел, обладающих таким свойством: у каждой пары $\{s,t\}$ с $s \in S$ и $t \in T$ есть по крайней мере один общий элемент и следующее свойство: у каждого множества есть точная верхняя грань и точная нижняя грань.

Для каждого множества s из S обозначим теперь через s_M точную верхнюю грань чисел в s; а через σ — точную нижнюю грань всех s_M. Подобным образом для каждого множества t из T обозначим через t_M точную нижнюю грань чисел из t, а через τ — точную верхнюю грань всех t_M.

Сравните σ и τ.

Постройте контрпримеры для снятия предположения о том, что у каждой пары множеств, по одному из каждого семейства, есть непустое пересечение.

Предположения

– Обратите внимание на свою аргументацию для конечного случая (см. «*Прямоугольный минимакс*») и посмотрите, можно ли расширить его на бесконечный случай. Построение контрпримеров для снятия условия — хорошая математическая практика.

Справочная литература

Jackson, M. and Ramsay, J. (eds) (1993) *Questions for Student Investigation.* MAA Notes 30. Washington: Mathematics Association of America, p. 119.

Maclaurin, C. (1725) *An Introduction to Mathematics.* Unpublished ms 2651. Edinburgh: Edinburgh University, p. 37.

Rabinowitz, W. (ed.) (1972) *Index to Mathematical Problems 1980–1984.* Westford: Math-Pro Press.

Ransom, W. (1952) E1021. *Mathematical Monthly* **59**(6), 407.

Ransom, W. and Braun, J. (1953) E1021. *Mathematical Monthly* **60**(2), 118–19.

Sibley, T. (2008) Sublimital analysis. (Анализ подпределов) *Mathematics Magazine,* **81**(5), 369–73.

Watson, A. and Mason, J. (2006) *Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating Examples.* Mahwah: Lawrence Erlbaum.

ГЛАВА 12

СПОСОБНОСТИ, ТЕМЫ, МИРЫ И ВНИМАНИЕ

Эта глава представляет собой расширенный глоссарий ключевых элементов математического мышления — как оно представлено в этой книге. Дело в том, что некоторые из описанных здесь понятий были сформулированы уже после выхода в свет первого издания этой книги. Хотя они не проиллюстрированы и не идентифицированы словесным комментарием к заданиям внутри книги, они, тем не менее, полезны для развития вашего собственного осознания своего математического мышления, поскольку помогут вам лучше подготовиться к тому, чтобы помогать другим развивать свое математическое мышление.

Природные способности и процессы

Мы убеждены в том, что у каждого ребенка есть природные способности, и математическое мышление на самом деле состоит в том, чтобы научить использовать эти способности математическими способами, исследуя математические задачи. Эти способности являются врожденными, т.е. они «встроены» в человеческий интеллект и используются в разных областях человеческой деятельности. Однако для большинства студентов изучение значительной части математики дается с трудом, даже если у них есть практический опыт. С точки зрения Льва Выготского, изучение математики — это «научное» занятие, и большинству людей требуется помощь учителя или кого-либо более опытного, хотя бы какое-то время, чтобы понять, каким именно образом прикладывать основные процессы умственной деятельности в этой области.

Экспериментирование и обобщение

Термин «экспериментирование» использовал Дьёрдь Пойа, хотя с тем же успехом можно использовать и другой термин, скажем, «разбирать частные случаи». Экспериментирование подразумевает рассмотрение более простого случая (меньше размеров, меньше переменных, меньше параметров, более простые числа) или конкретного примера (когда некоторые числа равны нулю или одному или еще какой-либо другой величине, что упрощает решение). Однако студенты часто упускают из виду, что смысл экспериментирования не в том, чтобы получить ответ как таковой, а в том, чтобы увидеть связи, общие для всех остальных случаев и примеров. Другими словами, цель экспериментирования — осознать структурные связи, чтобы потом обобщать. Как уже было отмечено в главе 1, экспериментирование можно осуществлять:

– наугад, чтобы прочувствовать вопрос;
– системно, чтобы подготовить почву для обобщения;
– искусно, чтобы проверить правильность обобщения.

Обобщение — это процесс «видения сквозь частное», не вникая в детали, а делая упор на связи. Калеб Гаттеньо заметил, что, как только мы сосредотачиваемся на некоторых свойствах, мы неизбежно игнорируем другие, и именно для этого необходимо обобщение. Иногда важно различать два типа обобщения: эмпирическое и структурное. *Эмпирическое обобщение* — это анализ нескольких, а иногда и многих случаев и примеров, в результате чего встает вопрос: что в них есть общего? Делая упор на схожесть (и, следовательно, пренебрегая различиями), вы эффективно обобщаете. Когда вы формулируете эту похожесть, вы получаете предполагаемое общее свойство, которое предстоит подтвердить, ссылаясь на структуру. *Структурное обобщение* — это узнавание связей в одном или нескольких случаях. Осознавая эти связи как свойства, вы формулируете их и в результате получаете предполагаемое обобщение, которое предстоит подтвердить, ссылаясь на скрытую структуру. Как было отмечено в главе 1 и подробно описано в последующих главах, обобщение означает обнаружение модели, приводящей к следующему:

– что представляется верным (предположение);
– почему это похоже на правду (подтверждение);

– где это может быть верно, т. е. более общая постановка вопросов (еще один вопрос!).

Разница между научной индукцией и эмпирическим обобщением состоит в том, что в науке не существует способа удостовериться в истинности предполагаемых вами общих свойств. Природа никогда не дает ответа «да» или «нет». Эмпирическое обобщение — это процесс поиска предположения о происходящем на основании многих примеров, подобно процессу научной индукции. Однако в математике возможно структурное обобщение, и вы можете идти дальше и подтверждать предположения с помощью логического доказательства на основании принятых свойств. Обратите внимание: *математическая индукция* имеет отличие, поскольку представляет собой форму доказательства относительно предположений, касающихся последовательности взаимоотношений, как правило, связанных с натуральными числами.

Как видно на материале всей книги, обобщение и экспериментирование всегда идут рука об руку. Их взаимоотношения можно выразить следующим образом:

– видеть частное в общем;
– видеть общее в частном.

Когда вы решаете математическую задачу или сталкиваетесь с математическим понятием, важно задаться вопросом, каковы *размеры возможного изменения*. Эта формулировка принадлежит Ференсу Мартону, который высказал предположение, что изучение имеет отношение к разграничению размеров допустимого изменения, при котором пример остается примером. Итак, допустим, у вас есть чертеж угла. Что можно изменить, чтобы эта фигура по-прежнему представляла тот же самый угол? Действия, не влияющие на угол, включают изменение длины сторон, перемещения или вращение в пространстве. Все эти действия оставляют угол неизменным и поэтому являются размерами возможного изменения. Нельзя утверждать, что вы в полной мере понимаете понятие, если вы не знаете размеров возможного изменения. Или, иными словами, если вы знаете дальнейший размер допустимого изменения, ваше понимание понятия углубляется.

Если меняется некоторый атрибут или черта, важно учитывать *диапазон допустимого изменения*: например, стороны угла должны иметь положительную длину; задача со счетом целых предметов не допускает дробных величин. Формулу $2n - 1$ для числа сгибов в «*Полоске бумаги*» (глава 1 (стр. 22 и далее)) можно вычислить, даже если n не является натуральным числом, однако в контексте задачи это не несет смысла. В контекстах другой задачи с подобными формулами (например «*Экспоненциальные проценты*», глава 11, стр. 273) значения n, отличные от целых чисел, также имеют смысл. Прилагательные «*возможный*» и «*допустимый*» используются потому, что зачастую учитель знает возможные характеристики, которые могут меняться, а студент может обо всех этих характеристиках и не знать, так что «*возможный*» напоминает о том, что надо убедиться, что аудитория в курсе соответствующих размеров. Аналогично, даже если студенты знают о том, что нечто может меняться, они могут не в полной мере осознавать размеры изменения. На самом деле то, каким образом математики используют слово «*число*», подразумевает несколько расширений первоначальных целых чисел. Аудитория может не сразу осознать полный диапазон допустимого изменения и ограничиться меньшими типами чисел. Яркий пример тому — «*Последовательные суммы*» (глава 4, стр. 97), когда, решая задачу про суммы положительных чисел, я использовал расширение сумм и включил отрицательные числа.

Построение предположений и убеждение

В атмосфере, продуктивной с точки зрения математики, все, что говорится, воспринимается как предположение. Не давайте возможностям, возникающим в вашем мозгу, бессмысленно крутиться, словно вещи в барабане стиральной машины, внося тем самым лишь сумбур. Постарайтесь сформулировать предположение, чтобы на него можно было взглянуть бесстрастными глазами. Пойа говорил, что, как только вы сделали предположение, вы не должны в него верить; лучше постарайтесь понять, каким образом его можно видоизменить.

Как только предположение высказано, ваша цель — постараться подтвердить его математически. Поскольку значение слова «*теорема*» (досл. «рассматриваю») имеет отношение к «зрению», предположение можно рассматривать как способ видения ситуации, а математическое доказательство представляет собой рассуждение, которое убеждает других в том, что они тоже могут увидеть, что вы «говорите» и «видите». Развитие математического рассуждения подразумевает попытки сначала убедить себя, потом друга, который задает острые, но дружеские вопросы, а потом и скептика или «противника», который не станет принимать все за чистую монету, так что его придется убеждать с помощью математического доказательства

Аккумулируя некоторые примеры (частные или конкретные случаи), вы можете поддержать интуитивное «ощущение», или предположение; в конечном итоге вам нужна последовательность утверждений с уже согласованными свойствами, которые логически вытекают одно из другого. Об этом мы подробно говорили в главах 4–7.

Воображение и выражение

С помощью воображения мы включаем все формы ментальных образов, не только «картинки в мозгу», но и весь опыт, основанный на ощущениях. Ни эта способность, ни способность выражать в разных формах то, что вы себе воображаете, не упоминались как процессы в первом издании, но они незаменимы для мышления любого типа, в том числе математического. Предугадывая, строя прогнозы, вы черпаете из своего воображения; когда вы формулируете связи и предлагаете их как свойства, которые характерны для многих случаев, вы привлекаете ментальные образы. Таким образом, каждый раз, когда вы строите планы или готовитесь к чему-либо, вы используете ментальные образы; каждый раз, когда вы рассматриваете возможность, вы пользуетесь ментальными образами; каждый раз, когда вы осознаете, что обнаружили математическую связь, вы используете ментальные образы.

Однако опираться только на воображение — это солипсизм (то есть крайний объективный идеализм). Учиться выражать то, что вы воображаете, улавливать и «увязывать» отличительные черты и взаимоотношения, формулировать или выражать осознаваемые свойства — это значит переводить воображение в выражение. Можно пользоваться физическими предметами, схемами и рисунками, голосовыми тонами и жестами, словами и символами, чтобы выразить различимые предметы, узнанные связи и осознаваемые свойства. Тем, что вы испытываете внутри, нельзя поделиться с другими, пока вы не выразите это в такой форме, которая соотносится с другими; научить этому — и есть вклад, который может внести математическое мышление в общее социальное развитие студентов.

Когда вы оказываетесь в тупике, стоит найти кого-нибудь, с кем можно обсудить, почему же вы застряли. Формулируя, вы осознаете то, что ранее на подсознательном уровне выделяли или отбрасывали, и поэтому можете найти пути для дальнейшего продвижения, которые ранее упустили из виду.

Выделяем и игнорируем; расширяем и ограничиваем

Гаттеньо говорил, что люди по своей природе некоторые аспекты предмета склонны выделять, а другие, следовательно, — игнорировать. Например, глядя на число 347, вы можете заметить отношение $3+4=7$ и таким образом переключиться на трехзначные числа в десятичной записи, в которых сумма первых двух цифр равна третьей или, возможно, сумма двух цифр (необязательно первых) равна третьей. Связь между цифрами, которую вы увидели, становится свойством, которым могут обладать или не обладать другие числа. Именно в результате выделения некоторых черт и, следовательно, пренебрежения другими происходит обобщение, а связи становятся свойствами. Если связь, которую трансформируют в свойство, математическая, имеет место математическое обобщение.

Иногда важно что-то выделить, а иногда чем-то пренебречь: выделять значение переменной не стоит, когда вы пытаетесь решить уравнение с ним; как работают алгоритмы сложения, существенно в «*Палиндромах*» (глава 1, стр. 23), но несущественно в «*Полоске бумаги*» (глава 1, стр. 22). Студенты частенько попадают в ловушку, обращая внимание на процессы (например подробности решения уравнений), когда узнают новое понятие, необходимое для них.

В математике действие расширения или ограничения значения — это проявление усиления и ослабления, выделения и пренебрежения. Приведу пример: вместо того чтобы рассматривать простые числа в контексте всех чисел, рассмотрите простые числа в ограниченной системе чисел, сравнимых с 1 по модулю 3. Или расширьте до системы чисел вида $a + b\sqrt{d}$ для некоторого фиксированного d и целых чисел a и b (см. «*Остатки сладки*» в главе 11, стр. 306). В обоих случаях изменение области того, что считается «числом» в контексте простых чисел, проливает свет на природу простых чисел и их роли в арифметике.

Классифицируем и характеризуем

Классифицировать предметы — абсолютно естественное занятие. В сущности это именно то, что делает за нас язык. Есть общие понятия, как существительные и глаголы, поэтому, когда мы используем одно из них, мы классифицируем то, о чем думаем, как принадлежащее к классу предметов или обладающее необходимыми свойствами, которые ассоциируются с этим словом. Разумеется, для живого языка характерны расплывчатые границы, поэтому один и тот же объект можно классифицировать по-разному в зависимости от контекста. Например, на пикнике кусок бревна можно использовать как стул, а на званом ужине нельзя; кусок пластмассы в форме треугольника в одном контексте и есть треугольник, а в другом — треугольная призма. Номер дома несет свойства следования порядкового числительного в последовательности, а какое именно число — совершенный квадрат, куб или простое число — не имеет значения.

Таким образом, классифицировать что-либо — значит осознать как пример свойства, предварительно вычленив «это» из его окружения. Характеризовать что-либо — значит произвести альтернативный набор свойств таким образом, чтобы всё, что принадлежит данному классу, удовлетворяло этим свойствам, а всё, что удовлетворяет этим свойствам, принадлежало этому классу. Для математики характерно классифицировать объекты по их свойствам, а затем характеризовать эти свойства с помощью других свойств. Например, определяющее свойство четного целого числа — делиться пополам без остатка; его также характеризует то, что оно оканчивается на 0, 2, 4, 6 или 8, если оно записано в десятичной системе счисления. Свойство числа иметь в остатке 1 при делении на 3 также характеризуется тем, что число имеет вид на 1 больше, чем кратное 3. Последнюю характеристику проще расширить на отрицательные числа, нежели вариант с остатком; на самом деле это последовательное расширение остатков на отрицательные числа. В задании «*Переворачивание чашек*» (стр. 221) основная трудность — характеризовать возможные конфигурации, не проверяя все возможности, с помощью поиска условия для чашек.

Способность классифицировать и характеризовать часто проявляется в такой математической теме, как *прямое и обратное действие* (см. ниже).

Обзор

Этими способностями обладает любой ребенок, умеющий говорить, поскольку без них нельзя освоить язык. В связи с этим возникает вопрос: учеников поощряют пользоваться, развивать и осознавать свои способности, или же учебник и учитель пытаются выполнять всю работу за учеников, тем самым мешая ученикам мыслить математически самостоятельно? Чтобы научиться действовать в рамках такой науки, как математика, равно как в ее различных разделах, необходимо использовать эти способности в соответствии с конкретной областью.

Математические темы

Прямое и обратное действия

Как только вы понимаете, что можете произвести некую математическую операцию или решить математическую задачу (прямое действие), у вас есть возможность дальнейшего исследования с помощью противоположного действия или постановки «обратного» вопроса. Например, если вы можете решить задачу, спросите у себя, какие подобные задачи дадут такой же результат и какие результаты, как этот, возможны для подобных вопросов. Можно пойти дальше, исследуя, что случится, если поменять местами то, что требуется, и то, что дано. Очень часто новая задача подразумевает творческий подход. Например:

– если прямое действие — «умножение», то обратное — это разложение на множители, что часто имеет множественные ответы и приводит к понятию *простых чисел* как чисел и выражений, которые разложить нельзя;
– если прямое действие — «сложение», то обратное действие может быть неоднозначным, поскольку есть много способов представить число как сумму двух других чисел. Задача может быть иной: вместо двух чисел, сумму которых вы

должны определить, даны одно число и сумма и необходимо найти другое число (вычитание);
- если склеивание треугольников сторонами, чтобы составить многоугольник, считать прямым действием, то разложение многоугольников на треугольники — это обратное действие. Это можно сделать многими способами, и есть вещи, доказать которые трудно; например, что любой многоугольник без самопересечений можно разложить на треугольник и многоугольник без самопересечений с меньшим числом вершин;
- если склеивание многогранников конгруэнтными гранями — это прямое действие, то разложение многогранника с помощью плоскости, проходящей через его вершины и грани, — это обратное действие. Простые многогранники — это те, которые разложить подобным образом нельзя;
- если прямое действие — это решение пары линейных уравнений, то обратное действие — это нахождение всех пар линейных уравнений, имеющих то же самое решение.

В главе 11 приведено много примеров того, как в результате постановки обратных вопросов математика из рутины превращается в увлекательное математическое исследование.

Инвариантность на фоне перемен

Многие из математических теорем можно рассматривать как утверждение чего-либо, что остается постоянным при некотором другом допустимом изменении. Например:

- добавление одной и той же величины к двум числам оставляет постоянным их разность; умножение двух чисел на одно и то же число, отличное от нуля, не меняет их отношения;
- две дроби равны (их значение как рациональных чисел остается неизменным), если числитель и знаменатель умножить на одно и то же число;
- сумма углов любого плоскостного треугольника всегда составляет 180° независимо от формы треугольника;
- площадь, углы и стороны многоугольника остаются неизменными при параллельном переносе, вращении и отражении;

– площадь треугольника останется неизменной, если одну вершину сдвинуть по прямой, параллельной противоположному ребру;
– угол между двумя прямыми не меняется при параллельном переносе любой из них (основание для теорем об углах, связанных с параллельными прямыми и определением параллельного переноса!).

В любой математической ситуации важно задать себе вопрос: какие действия можно произвести, не изменив при этом интересующих нас соотношений? Например, в заданиях «*Прямоугольный минимакс*» и «*С днем рождения!*» следует использовать действия, которые оставляют задачу неизменной, но эффективным образом организуют ряды и столбцы. В «*Арифмагонах*» необходимо определить «инвариантную» сумму начальных данных, на основании которых выводится все остальное.

Свобода и ограничение

Пойа различал два типа задач: *задачи на нахождение* и *задачи на доказательство*. Любую задачу на нахождение можно представить как задачу построения: построить все объекты, которые удовлетворяют заданным в задаче ограничениям. Если начать без ограничений, можно рассмотреть свободу выбора. По мере добавления ограничений на каждом этапе можно выстроить решение исходной задачи путем ограничения решений с меньшими ограничениями. Иногда это здорово помогает!

Например, в «*Последовательных суммах*», разрешив себе использовать отрицательные числа в сумме, вы получили доступ к скрытой структуре, связанной с нечетными делителями числа. В «*Девяти точках*» решение стало возможным, когда вы разрешили снять предполагаемое ограничение.

Математические миры

Математическое мышление подразумевает путешествие по трем разным мирам опыта. Согласно Джерому Брунеру, который основывался на древнеиндийской психологии, следует мыслить на языке:

– мира «объектов», которыми удобно манипулировать; это могут быть как материальные предметы физического мира, так и образы и символы. Дело в том, что, когда сложность бьет через край, естественно и разумно отступить на более «твердую» почву. Именно этому служит экспериментирование;
– мира интуиции и ощущений, ментальных образов во всем их богатстве, которые, как правило, еще не готовы к высказыванию и в лучшем случае лишь обозначены;
– мира абстрактных символов и знаков, которыми поначалу манипулировать с уверенностью нельзя. Как только вы сумеете манипулировать ими, они перемещаются в первый мир!

Мы затронули эту тему в главе 9.

Изучение математики, а может, и любой другой богатой понятиями области знаний подразумевает постепенное ознакомление и освоение понятий с тем, чтобы использовать их для более точного выражения того, о чем вы думаете, чем вы занимаетесь и как вы этим занимаетесь. По мере роста знаний мысли и понятия преобразуются в укоренившиеся концепты и постепенно становятся неотъемлемой частью того, как вы ощущаете, думаете и что испытываете. Абстрактные символы и знаки становятся конкретно «управляемыми», словно они и сами «конкретны». Итак, именно перемещение между этими тремя мирами способствует тому, что мы учимся понимать, быть проницательными, получать знания.

Эти три мира обеспечивают базовую структуру для построения математических моделей ситуаций как материального, так и математического мира. Как правило, но не всегда, именно алгебра используется для того, чтобы почувствовать ситуацию на языке математических терминов посредством узнавания связей, осознать их как свойства, характерные для многих ситуаций, и выразить эти свойства в той или иной форме. Таким образом, задача начинается в ситуации, которая в определенной мере знакома или конкретна; с помощью ментальных образов распознаются и обозначаются релевантные черты, а также узнаются и выражаются возможные относящиеся к делу связи, становясь в процессе свойствами. Когда эти связи выражены математически, вы вступаете в математические миры символов и, манипулируя ими, получаете математическое решение. Потом это проверяется с помощью мира ментальных образов и снова возвращается в исходное окружение — чтобы убедиться в том, что допущения эксплицитны и разумны, а данное решение помогает продвинуться к решению исходной задачи.

В учебных целях преподаватели часто используют структурированные связи, выраженные в знакомой ситуации из материального мира как модель математического понятия: кубики, плоскости, полоски и палочки[1] — для обозначения чисел в десятичной системе счисления, метод баланса[2] — для решения линейных уравнений и числовая ось — для работы с числами. Однако эти модели эффективны лишь в том случае, если ученики хорошо знакомы с темой и понимают, что именно связывает предметную модель с математическим понятием.

Составные арифметические блоки (кубики, плоскости и т.д.) моделируют размер числа с помощью объема деталей. Структуру чисел в десятичной записи можно представить с помощью набора кубиков, плоскостей и т.д., а вот структуру *разрядного значения* числа на этом материале представить нельзя: один кубик и две плоскости изображают 1200, независимо от того, как расположен кубик — слева или справа от плоских фигур. Весы как модель для уравнений тоже не помогут, если мы имеем дело с отрицательными числами.

Внимание

В этой главе неоднократно использовались некоторые прилагательные и существительные для того, чтобы соединить все природные способности и темы с перемещениями внимания. В этом разделе эта тема будет развита и будет сделано предположение, что задачи решаются именно благодаря перемещению внимания.

Иногда люди смотрят на сцену или ситуацию, плакат, упражнение или диаграмму; смотрят пристально, изучающе. Они воспринимают то, что видят, целиком, как нечто целое. Разумеется, они осознают в какой-то мере, что целое состоит из компонентов,

[1] Имеется в виду визуальное представление чисел, где палочка — это единица, полоска — это десяток = 10 палочек, плоскость — это 10 полосок = сотня и куб — это 10 плоскостей = 1000. — *Прим. ред.*

[2] Имеется в виду метод решения, при котором над обеими частями уравнения совершаются одинаковые действия. — *Прим. ред.*

которые его составляют, однако доминантная черта их внимания — это пристальное зрительное изучение. Одна из задач этого пристального изучения — получить целостное ощущение и запустить метафорический резонанс и метонимические спусковые механизмы, чтобы вызвать в памяти возможные действия.

Иногда внимание сосредоточено на различении деталей, выборе элементов, выявлении границ, выделении «под-целых» для возможного зрительного изучения. Для различения деталей типична ситуация «это не то». Все обучение можно считать одной из форм этого изучения с целью различать, находить все новые отличительные черты.

Иногда внимание сфокусировано на узнавании связей между вычлененными элементами ситуации. Значительную часть математики можно описать на языке узнавания и формулирования связей. Когда эти связи превращаются в осознанные свойства, проиллюстрированные конкретными примерами, становится возможным математическое обобщение. Когда связь между вычлененными элементами воссоздается как иллюстративный пример более общего свойства, становятся возможными математические предположения и соответствующая аргументация.

Когда аргументация основана на свойствах, о которых предварительно договорились (а не на том, что известно о конкретном объекте), открывается путь к математическим теориям. Такие свойства служат аксиомами, а все остальные свойства выводятся из них или явно добавляются как новые аксиомы.

Эти пять разных типов фокуса внимания характерны для математического исследования. Они редко случаются в определенной последовательности; скорее, внимание быстро переключается с одного состояние на другое. Зная эти состояния, развивая вкус к ним, вы сумеете вызывать их преднамеренно и не будете зависеть от привычки и причуд вашего характера.

Выводы

Видение процессов математического мышления с точки зрения использования природных способностей человека неизбежно приводит к вопросу: учеников поощряют осознавать эти способности, использовать и развивать их, либо эти способности узурпирует учебник и учитель. Когда вы пробуете использовать эти способности в математике, вы узнаете ключевые темы, которые встречаются снова и снова и обеспечивают связь между, на первый взгляд, в корне различными темами и задачами. Когда вы пробуете мыслить математически, вы приходите к вопросу о том, каким образом происходит сдвиг внимания, иногда быстро, иногда медленно. Цель вопросов, заданных в этой книге, состоит в том, чтобы предоставить вам возможность исследовать свой собственный опыт и стать восприимчивым к опыту других.

Литература

Adams, J. (1974) *Conceptual Blockbusting.* San Francisco: Freeman.

Banwell, C., Saunders, K. and Tahta, D. (1986) *Starting Points: For Teaching Mathematics inMiddle and Secondary Schools,* updated edn. Diss: Tarquin.

Conway, J. and Guy, R. (1996) *The Book of Numbers.* New York: Copernicus, Springer-Verlag.

Dudeney, H. (1958) *Amusements in Mathematics.* New York: Dover.

Gattegno, C. (1963) *For the Teaching of Mathematics.* New York: Educational Explorers.

Hofstadter, D. (1979) *Gödel, Escher, Bach: an eternal garden braid.* London: Harvester.

Jaworski, J., Mason, J. and Slomson, A. (1975) *Chez Angelique: The Late Night Problem Book.*

Milton Keynes: Chez Angelique Publications.

Maclaurin, C. (1725) *An Introduction to Mathematics.* Unpublished ms. 2651, Edinburgh University p. 37

Moessner, A. (1952) Ein Bemerkung über die Potenzen der natürlichen Zahlen. S.-B.Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., **29**(14), 353b.

Noelting, G. (1980) The development of proportional reasoning and the ratio concept part I: differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, **11**(2), 217–53.

Rabinowitz, S. (ed.) (1992) *Index to Mathematical Problems 1980–1984.* Westford: MathPro Press.

Sibley, N. (2008) Sublimital analysis. *Mathematics magazine,* **81**(5), 369–73.

Streefland, L. (1991) *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research.* Dordrecht: Kluwer.

Wason, P. and Johnson-Laird, P. (1972) *Psychology of Reasoning: Structure and Content.* London: Batsford.

Watson, P. and Mason, J. (2006) *Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating*

Examples. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Особенно большое влияние на нас оказали:

Bennett, J.G. (1969) *Creative Thinking.* London: Routledge and Kegan Paul.

_______(1978) *Deeper Man.* London: Turnstone.

Bloor, D. (1976) *Knowledge and Social Imagery.* London: Routeledge and Kegan Paul.

Bruner, J. (1956) *A Study of Thinking.* New York: Wiley.

Bruner, J. (1966) *Towards a Theory of Instruction.* Harvard University Press.

Edwards, B. (1981) *Drawing on the Right Side of the Brain.* London: Stewart Press.

Gattegno, C. (1963) *For the Teaching of Mathematics.* New York: Educational Explorers Ltd.

_______(1970) *What We Owe Children: the subordination of teaching to learning.* London: Routledge and Kegan Paul.

Hadamard, J. (1954) *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* New York: Dover.

Honsberger, R. (1970) *Ingenuity in Mathematics.* New York: Academic Press.

Jackson, M. and Ramsay, J. (eds) (1993) *Questions for Student Investigation.* MAA Notes 30,

Washington: Mathematics Association of America. Krige, J. (1980) *Science, Revolution and Discontinuity.* London: Harvester. Lakatos, I. (1977) *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.*

Cambridge: Cambridge University Press. Schoenfeld, A. (1985) *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press. Polanyi, M. (1958) *Personal Knowledge.* Chicago: Chicago University Press.

Ромlya, G. (1957) *How to Solve It.* Princeton: Oxford University Press.

_______(1966) *Mathematical Discovery.* (Volume I) New York: Wiley.

_______(1968) *Mathematical Discovery.* (Volume II) New York: Wiley.

Walter, M. and Brown, S. (1983) *The Art of Problem Posing.* Philadelphia: Franklin Press.

С момента выхода в свет первого издания этой книги авторы опубликовали несколько работ по этой теме, в том числе:

Burton, L. (1984) *Thinking Things Through.* Oxford: Blackwell.

Mason, J. (1988) *Actions Into Worlds,* Project Update. Milton Keynes: Open University.

_______(1988) *Doing and Undoing,* Project Update. Milton Keynes: Open University.

_______(1998) *Learning and Doing Mathematics* (2^{nd} rev edn), York: Tarquin Publications.

_______(2002) *Researching Your Own Practice: the discipline of noticing.* London: Routledge Falmer.

Stacey, K. and Groves, S. (2004) *Strategies for Problem Solving,* 2^{nd} edn, VICTRACC Ltd.: Victoria, Australia.

Список задач

Предметный указатель

Производство книг на заказ
Издательство «ТЕХНОСФЕРА»
125319, Москва, а/я 91
тел.: (495) 234-01-10
e-mail: knigi@technosphera.ru

Реклама в книгах:
• модульная
• статьи

Подробная информация о книгах на сайте
http://www.technosphera.ru

Дж. Мэйсон, Л. Бёртон, К. Стэйси

Математика – это просто 2.0
Думай математически

Компьютерная верстка – С.А. Кулешов
Корректор – Н.А. Шипиль
Дизайн книжных серий – С.Ю. Биричев, А.В. Кочеткова
Дизайн – М.А. Костарева
Выпускающий редактор – О.Н. Кулешова
Ответственный за выпуск – С.А. Орлов

Подписано в печать 04.12.14.
Формат 84 x 108/32. Печать офсетная.
Гарнитура Computer modern LaTeX
Печ.л. 11. Тираж 1000 экз. Зак. №
Бумага офсет №1, плотность 80 г/м^2

Издательство «ТЕХНОСФЕРА»
Москва, ул. Краснопролетарская, д.16, стр.2

Отпечатано способом ролевой струйной печати
в ОАО "Первая образцовая типография"
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д.1.
Сайт: www.chpk.ru, E-mail: sales@chpk.ru, 8(495)988-63-87