Г. Харди

ДВЕНАДЦАТЬ ЛЕКЦИЙ О РАМАНУДЖАНЕ

Перевод с английского
А. Г. Арзамасцева

Москва

2002

RAMANUJAN

TWELVE LECTURES ON SUBJECTS SUGGESTED BY HIS LIFE AND WORK

BY

G. H. HARDY

Sadleirian Professor of Pure Mathematics in the University of Cambridge

CAMBRIDGE

AT THE UNIVERSITY PRESS

1940


Институт
Компьютерных
Исследований

УДК 119

Харди Г.
Двенадцать лекций о Рамануджане. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 336 стр.

Книга известного математика Г. Харди посвящена жизни и научным работам Рамануджана — феноменального индийского математика, прославившегося замечательными достижениями в теории чисел. Перевод выполнен с английского издания 1940 г.

Книга написана с присущим Харди мастерством изложения, которое сделает понятными и доступными самые глубокие и запутанные вопросы теории чисел.

Для широкого круга читателей — от профессиональных математиков до любителей нестандартных математических задач.

ISBN 5-93972-123-0

Оглавление

Предисловие

Эта книга начиналась с двух выступлений на Научной Конференции, посвященной трехсотлетию Гарварда, осенью 1936 года. Первое из них было опубликовано в 44-м томе *Американского математического ежемесячника.* Оно перепечатано здесь без изменений, как лекция I. Второе выступление было значительно расширено и заполнило остаток книги.

Я прочел много лекций по трудам Рамануджана, начиная с 1936 года. Отдельные лекции – во многих университетах и научных обществах в Америке и в Англии и целые курсы в Принстоне и Кембридже. Лекции со II по XII в основном состоят из материала этих курсов, с перестановками и дополнениями, потребовавшимися при подготовке к публикации. В этом смысле они являются настоящими лекциями, и на протяжении всей книги сохраняется стиль лектора.

Содержимое книги достаточно точно описывается ее названием. Книга не является систематическим изложением трудов Рамануджана (хотя большинство из его наиболее значительных открытий так или иначе упоминается). Скорее это набор эссе, написанных по мотивам его работ. В каждом из эссе я брал некоторую часть его работ и рассказывал о том, что приходило мне в голову о связи этой работы с трудами и более поздних исследователей. Но даже когда я совсем отклоняюсь от темы, когда я пишу, к примеру, о работах Радемахера в XI лекции, тема «Рамануджана» остается нитью, связующей все в единое целое.

Доктор Р. А. Ранкин (R. A. Rankin) прочел всю книгу как в виде рукописи, так и в предпечатном варианте и сделал очень много важных указаний и поправок. Я также должен поблагодарить доктора В. Н. Бейли (W. N. Baily), который помог мне переработать VII лекцию; Ф. М. Гудспида (F. M. Goodspeed), который прочел и сделал критические замечания о нескольких лекциях и особенно IX лекции, и профессора Г. Н. Ватсона (G. N. Watson), без помощи которого мне бы вряд ли удалось написать XII лекцию. Фотографию Рамануджана я получил от доктора С. Чандрасехара (S. Chandrasekhar), который раньше был членом колледжа св. Троицы. К сожалению, я не смог установить

имя фотографа. Значительная часть библиографии была составлена для меня доктором В. Левиным (V. Levin). Я особенно благодарен Гарвардскому университету, поскольку их приглашение на конференцию привело к созданию этой книги.

Июль 1940 *Г. Г. Харди*

Лекция I
Индийский математик Рамануджан

В этих лекциях я поставил перед собой задачу, которая по-настоящему трудна и которую я мог бы представить как почти невыполнимую, если бы я собирался начать с извинений за неудачу. Я должен сформулировать для себя, мне никогда не удавалось сделать это раньше по-настоящему, и помочь вам сформулировать, в некотором смысле обоснованную, оценку самой романтичной фигуры в современной истории математики, человека, чья карьера, казалось бы, полна парадоксов и противоречий, который бросает вызов почти всем канонам, по которым мы привыкли судить о человеке, и о котором все мы, возможно, согласимся лишь с одним суждением, что он, в некотором смысле, был выдающимся математиком.

Сложности в оценке Рамануджана очевидны и довольно значительны. Рамануджан был индусом, и я полагаю, что взаимопонимание между индусом и англичанином всегда является несколько затруднительным. Он был, в лучшем случае, наполовину образованным индусом, у него никогда не было преимуществ, каковы бы они ни были, традиционного индийского образования, он никогда не мог сдать «первого экзамена по гуманитарным наукам» (First Arts Examination) индийского университета и никогда не мог подняться даже до провалившегося на экзамене на степень Бакалавра (Failed B. A.). Бóльшую часть своей жизни он работал, оставаясь в полном неведении относительно открытий современных европейских математиков, и умер, когда он был чуть старше тридцати и когда его математическое образование, в некотором смысле, едва началось. У него много опубликованных работ, вместе они образуют книгу из почти 400 страниц, но он также оставил массу неопубликованных работ, которые даже не были должным образом проанализированы до последних лет. Эти работы включают множество новых открытий, но намного больше переоткрытий, и часто несовершенных переоткрытий, и иногда невозможно отделить то, что он переоткрыл, от того, что он изучил тем или иным способом. Я не могу

представить, чтобы кто-нибудь мог с хоть какой-нибудь уверенностью сказать, даже сейчас, о том, насколько великим математиком он был, и еще менее определенно, насколько великим математиком он мог бы стать.

Это настоящие сложности, но я думаю, мы обнаружим, что некоторые из них менее значительны, чем они выглядят, и для меня самая большая сложность не имеет ничего общего с очевидными парадоксами карьеры Рамануджана. Настоящую трудность для меня представляет то, что Рамануджан был в каком-то смысле моим открытием. Я не изобретал его, как и другие великие люди, он создал себя сам, но я был первым по-настоящему компетентным человеком, который имел возможность увидеть некоторые из его работ, и я до сих пор вспоминаю с чувством удовлетворения, что я сразу понял, какое сокровище мне удалось обнаружить. И я полагаю, что я по-прежнему знаю больше о Рамануджане, чем кто-либо другой, и до сих пор являюсь главным экспертом по этому особенному вопросу. В Англии есть другие ученые, в частности профессор Ватсон и профессор Морделл, которые знают некоторые части его работ намного лучше меня, но ни Ватсон, ни Морделл не знали Рамануджана лично так, как я. Я видел его и беседовал с ним почти каждый день в течение нескольких лет, и, помимо этого, я действительно работал совместно с ним. Я обязан ему больше, чем кому бы то другому в мире за одним исключением, и мое сотрудничество с ним было единственным романтическим событием в моей жизни. Сложностью для меня является не то, что я недостаточно знаю о нем, а то, что я знаю и чувствую слишком много, и я просто не смогу быть беспристрастным.

Относительно фактов из жизни Рамануджана я полагаюсь на Сешу Айара и Рамачандра Рао, чей мемуар о Рамануджане напечатан вместе с моим собственным в сборнике его трудов. Он родился в 1887 году в семье брахманов в городе Ерод, вблизи Кумбаконама, в довольно большом городе в округе Танжер штата Мадрас. Его отец был клерком в офисе торговца одеждой в Кумбаконаме, и все его родственники были очень бедны, несмотря на принадлежность к высокой касте.

В семь лет он начал учиться в высшей школе Кумбаконама и оставался там девять лет. Его исключительные способности проявились еще до того, как ему исполнилось десять лет, и к тому времени, когда ему исполнилось двенадцать или тринадцать, стало ясно, что он очень одаренный мальчик. Его биографы рассказывают несколько курьезных

историй о его ранних годах. Они рассказывают, к примеру, что вскоре после того, как он начал изучать тригонометрию, он открыл для себя «теоремы Эйлера о синусе и косинусе» (под которыми я понимаю связь между круговыми и экспоненциальными функциями) и был очень разочарован, когда обнаружил позже, очевидно, из второго тома *Тригонометрии* Лоуни, что они уже были известны. До шестнадцати лет он ни разу не видел математических книг более высокого уровня. *Современный анализ* Уиттекера к тому времени еще не был так широко распространен, и *Бесконечные ряды* Бромвича еще не были написаны, и нет никаких сомнений в том, что любая из этих книг привела бы к огромным переменам в нем, если бы он смог с ними ознакомиться.

Конспект Кара, впервые вызвавший на свет всю математическую силу Рамануджана, являлся книгой совершенно другого типа.

Книгу Кара (*Конспект элементарных результатов по чистой и прикладной математике* Джорджа Шубриджа Кара, ранее обучавшегося в колледже Гонвиля и Кейса, Кембридж, опубликованный в двух томах в 1880 и 1886 годах) сейчас практически невозможно достать. Существует экземпляр в Университетской библиотеке Кембриджа и один экземпляр оказался в библиотеке Государственного колледжа Кумбаконама. Друг Рамануджана взял эту книгу из библиотеки и принес ему. Эта книга ни в коем смысле не является великой, но Рамануджан сделал ее знаменитой, и нет никаких сомнений, что она оказала на него глубокое влияние и знакомство с ней знаменует настоящее начало его карьеры. Такая книга должна иметь свои достоинства, и книга Кара, хотя и не имеет никаких высоких качеств, не является обычным третьеразрядным учебником. Это книга, написанная с настоящей эрудицией и энтузиазмом, книга, имеющая свой собственный стиль и индивидуальность. Саш Кар был частным репетитором в Лондоне. Он поступил в Кембридж, когда ему было почти сорок лет, и был среди выпускников на математическом Треножнике[1] в 1880 году (в том же году он опубликовал первый том своей книги). Сейчас он совершенно забыт, даже в своем собственном колледже, за исключением того, что его имя вспоминают в связи с Рамануджаном, но он, должно быть, был, в некотором смысле, весьма выдающимся человеком.

Я полагаю, что эта книга является, в сущности, конспектом репетиторских записей Кара. Если бы вы были учеником Кара, ваши

[1]Математические соревнования, являвшиеся выпускным экзаменом в Кембридже.

занятия проходили бы по соответствующим разделам конспекта. Конспект содержит примерно тот же набор тем, который входит в список А на экзамене «математический Треножник» (как эти темы понимались в Кембридже в 1880 году), и эта книга действительно является конспектом, в чем и заключается ее истинное предназначение. Она содержит формулировки 6165 теорем, расположенных систематически и вполне научным образом, доказательства которых лишь немного подробнее, чем перекрестные ссылки, и, бесспорно, являются наименее интересной частью книги. Все это можно найти в преувеличенном виде в знаменитых книжках Рамануджана (которые практически вообще не содержат доказательств), и любой, изучающий эти записные книжки, может видеть, что понятия Рамануджана о представлении результатов скопированы из Кара.

У Кара имеются разделы, посвященные очевидным областям математики: алгебре, тригонометрии, математическому анализу и аналитической геометрии, но некоторые из этих разделов развиты непропорционально, и в особенности формальная часть интегрального исчисления. Видимо, это любимая тема Кара, и она изложена очень подробно и, в своем роде, очень хорошо. В книге отсутствует теория функций, и я очень сильно сомневаюсь, что Рамануджан к концу своей жизни понимал с достаточной ясностью, что такое аналитическая функция. Что еще более удивительно, ввиду собственных интересов Кара и дальнейших работ Рамануджана в книге не содержится ничего об эллиптических функциях. Каким бы образом Рамануджан не получил свои собственные знания об этой теории, они происходили не из книги Кара.

В целом, рассматриваемая, как источник вдохновения юноши с такими исключительными талантами, книга Кара не является столь уж плохой, а реакция на нее Рамануджана является изумительной.

По открывшемуся ему новому миру (говорят его индийские биографы)[1] Рамануджан отправился в странствие с восхищением. Эта книга разбудила его гений. Он решил, что самостоятельно выведет формулы, приведенные в ней. Так как он не мог воспользоваться другими книгами, каждое решение являлось исследованием настолько, насколько он в этом участвовал... Рамануджан говорил, что богиня Намаккал внушала ему формулы во снах. Примечательно, что часто, встав с кровати, он мог записать результаты и быстро проверить их, хотя и не всегда мог дать строгое доказательство...

[1]Цитаты (за исключением взятых из моего собственного мемуара о Рамануджане) принадлежат Сеши Айяру и Рамачандру Рао.

Я нарочно процитировал последние предложения не потому, что я придаю им какое-либо значение — я не больше заинтересован в богине Намаккал, чем вы, — но потому, что мы сейчас приближаемся к сложному и трагическому периоду его карьеры, и мы должны попытаться понять, насколько это возможно, его психологию и атмосферу, окружавшую Рамануджана в его ранние годы.

Я уверен, что Рамануджан не был мистиком и что религия, за исключением строго материальных аспектов, не являлась важной частью его жизни. Он был ортодоксальным индусом из высокой касты и всегда придерживался (в действительности, с суровостью, не свойственной индийцам, проживающим в Англии) всех предписаний своей касты. Он пообещал своим родителям поступать таким образом и точно выполнял свои обещания. Он был вегетарианцем в самом строгом смысле, что привело к ужасным затруднениям, когда он заболел, — и все то время, что он находился в Кембридже, он готовил всю свою еду самостоятельно и никогда не готовил, не переодевшись предварительно в пижаму.

Два мемуара о Рамануджане, опубликованные в сборнике его трудов (и оба написаны людьми, которые, хотя и по-разному, знали его очень хорошо), прямо противоречат друг другу в вопросе о религии Рамануджана. Сешу Айар и Рамачандра Рао говорят,

> Рамануджан имел определившиеся религиозные взгляды. Он особенно почитал богиню Намаккал... Он верил в существование Высшего Существа и в достижение божественности людьми... Он имел установившиеся убеждения по проблеме жизни и после...;

в то время как я говорю, что

> ... его религиозность заключалась в соблюдении обрядов, а не в интеллектуальной убежденности, и я хорошо помню его слова ко мне (к моему огромному удивлению), что все религии кажутся ему более или менее одинаково истинными...

Кто из нас прав? С моей стороны, у меня нет никаких сомнений, я вполне убежден, что именно я прав.

Я полагаю, что ученые с давних пор при критическом изучении текста использовали общий принцип: *difficilior lectio potior* — более сложное толкование заслуживает предпочтения. Если архиепископ Кембриджский сказал одному человеку, что он[1] верит в Бога, а друго-

[1] Архиепископ.

му, что он не верит, тогда, вероятно, истинным является второе утверждение, поскольку иначе очень сложно понять, почему он высказался именно так, и, в то же время, существует много превосходных причин для того, чтобы он высказал первое утверждение, независимо от того, является ли оно истинным или ложным. Аналогично, если истинный брахман, такой как Рамануджан, сказал мне, а он, несомненно, сделал это, что у него нет определенных религиозных убеждений, тогда 100 к 1, что он имел в виду то, что он сказал.

Не существовало достаточных причин, из-за которых Рамануджан должен был оскорбить чувства его родителей или его индийских друзей. Он не был убежденным атеистом, а был «агностиком» в строгом смысле этого слова, который не видит ни особого блага, ни особого вреда в индуизме или в любой другой религии. Индуизм является религией намного более чем, к примеру, христианство, требующей соблюдения обрядов, в которой вера, в любом случае, имеет ничтожное значение, и если друзья Рамануджана полагали, что он принимает традиционные доктрины такой религии, то он не разочаровывал их, он применял весьма безобидную и, вероятно, необходимую экономию правды.

Этот вопрос о религиозных убеждениях Рамануджана не является важным сам по себе, но, в то же время, он не является полностью отвлеченным, потому что существует одно убеждение, которое я действительно собираюсь отстаивать изо всех сил. Вокруг Рамануджана существует довольно много того, что сложно понять, и нам нет необходимости идти по пути создания загадок и тайн. Что касается меня, то я любил его и восхищался им достаточно, чтобы пожелать себе оставаться рационалистом в том, что касается его, и я хочу, чтобы для вас стало ясно, что Рамануджан, когда он жил в Кембридже в добром здравии и комфортном окружении, был, несмотря на его странности, столь же разумным, здравомыслящим и, на его собственный манер, столь же проницательным человек, как и любой другой. И я меньше всего хочу, чтобы вы вскидывали руки вверх и восклицали: «Здесь есть что-то необъяснимое, какое-то таинственное проявление древней мудрости Востока!». Я не верю в древнюю мудрость Востока и хочу представить вам портрет человека, который имел свои особенности, как и другие выдающиеся люди, но, в то же время, оставался человеком, в чьем обществе можно было приятно провести время, с которым можно было пить чай и обсуждать политику или математику; короче говоря, портрет не восточного чуда, или вдохновленного идиота, или

психологического уродца, а рационального человека, который оказался великим математиком.

До тех пор, пока ему не исполнилось семнадцать, у Рамануджана все было в порядке.

В декабре 1903 года он сдал вступительные экзамены в Университет Мадраса, и в январе следующего года он начал обучение по гуманитарным дисциплинам на первом курсе Государственного колледжа в Кумбаконаме и получил стипендию Субрахманяма, которую обычно присуждали за отличные знания по математике и английскому языку . . . ,

но после этого произошла череда трагических событий.

К этому времени он был настолько поглощен изучением математики, что во время всех лекций, посвященных ли английскому языку, истории или физиологии, он занимался каким-нибудь математическим исследованием, не обращая внимание на то, что происходило в классе. Чрезмерное увлечение математикой и последовательное пренебрежение другими предметами привели к провалу при переходе на выпускной курс, и, вследствие этого, была прекращена выплата стипендии. Частично из-за разочарования, а частично под влиянием друга он уехал на север, в округ Телугу, но вернулся в Кумбаконам после некоторого периода странствий и продолжил учебу в колледже. Ввиду своей отлучки, он не смог обеспечить достаточную посещаемость, чтобы получить свой выпускной диплом в 1905 году. Он поступил в Пачайяппа Колледж в Мадрасе в 1906 году, но, заболев, вернулся в Кумбаконам. Он снова появляется как частный студент на первом экзамене по гуманитарным наукам в 1907 году и терпит неудачу . . .

Рамануджан, по-видимому, не имел никакого определенного занятия, кроме математики, до 1912 года. В 1909 году он женился, и у него возникла необходимость найти какую-нибудь постоянную работу, но он испытывал большие трудности при поиске работы из-за своей неудачной учебы в колледже. К 1910-му году он начал находить более влиятельных индийских друзей, Рамасвами Айяра и двух своих биографов, но все их усилия по поиску удовлетворительной должности для него успеха не имели, и в 1912 году он становится клерком в канцелярии управления порта Мадрас, с заработком, примерно, 30 фунтов стерлингов в год. Ему было почти двадцать пять лет. Годы между восемнадцатью и двадцатью пятью являются критическим периодом в карьере математика, и урон был нанесен. Гений Рамануджана никогда больше не имел шанса полностью развиться.

О дальнейшей жизни Рамануджана можно сказать не слишком много. Его первая значительная работа была опубликована в 1911 году,

и к 1912 году его исключительная математическая мощь стала находить признание. Важно заметить, что хотя индийцы по-дружески относились к нему, лишь англичане смогли сделать что-то эффективное. Сэр Френсис Спринг и сэр Гилдерт Уокер организовали специальную стипендию для него, 60 фунтов стерлингов в год, достаточную для того, чтобы женатый индиец мог жить в достаточно комфортных условиях. В начале 1913 года он написал мне, и мы совместно с профессором Невилом, после многих сложностей, доставили его в Англию в 1914 году. Здесь у него было три года непрерывной активной деятельности, результаты которой вы можете прочитать в сборнике его трудов. Он заболел летом 1917 года и так больше и не выздоровел, хотя и продолжал работать. Периоды подъема перемежались с периодами упадка, но не проявлялось никаких реальных признаков ухудшения вплоть до самой его смерти в 1920 году. Он становится членом Королевского общества в начале 1918-го года и членом колледжа Святой Троицы в Кембридже несколько позже, в том же году (и он был первым индийцем, избранным в каждое из этих обществ). Его последнее математическое письмо о лже-тета-функциях, которые являются темой президентского доклада профессора Ватсона на Лондонском математическом обществе в прошлом году, было написано за два месяца до его смерти.

Подлинная трагедия Рамануджана не в его ранней смерти. Разумеется, это большое несчастье, когда любой великий человек умирает молодым, но математик часто сравнительно стар в тридцать лет и его смерть, возможно, является меньшей катастрофой, чем кажется. Абель умер в двадцать шесть лет, и, хотя он, без сомнения, мог бы добавить многое к математике, он вряд ли стал бы более великим человеком. Трагедия Рамануджана заключается не в том, что он умер молодым, а в том, что во время пяти неудачных лет его гений был направлен в неверном направлении, отодвинут на запасные пути и до некоторой степени искажен.

Я снова просматривал то, что я написал о Рамануджане шестнадцать лет назад, и, хотя сейчас я знаю его работы намного лучше, чем тогда, и могу думать о нем более бесстрастно, я нашел не слишком много того, что мне хотелось бы изменить. Но есть одно предложение, которое сейчас кажется мне непростительным. Тогда я написал:

Возможны различные мнения о значимости работ Рамануджана, о стандарте, по которому о них следует судить, и о влиянии, которое они, возможно, будут иметь на математику в будущем. В них нет простоты и неизбежности,

свойственных величайшим работам, они были бы более великими, если бы были менее странными. Он, вероятно, стал бы более великим математиком, если бы был пойман и немного приручен в юности, он смог бы открыть намного больше новых и, без сомнения, более великих результатов. С другой стороны, в нем было бы меньше от Рамануджана и больше от европейского профессора, и потеря, возможно, была бы больше, чем выигрыш ...

и я согласен со всем, за исключением последнего предложения, в котором заключается весьма нелепый сентиментализм. Не было никакого выигрыша, когда колледж Кумбаконама отверг единственного великого человека, которого они смогли заполучить, а потеря была неисправима. Из того, что я знаю, это наихудший пример ущерба, который может быть нанесен неэффективной и неэластичной системой образования. Так мало требовалось, 60 фунтов стерлингов в год в течение пяти лет, изредка встречи с практически любым, кто имеет настоящие знания и немного воображения, и мир получил бы еще одного из величайших математиков.

Письма Рамануджана ко мне, полностью напечатанные в сборнике его трудов, содержат формулировки примерно 120 теорем, в основном формальные тождества, взятые из его записных книжек. Я процитирую пятнадцать из них, которые дают достаточно полное представление. Я включил две теоремы (1.14) и (1.15), которые столь же интересны, как и все остальное, но одна из них неправильная, а другая в том виде, в котором она сформулирована, вводит в заблуждение. Все остальные с тех пор были кем-нибудь проверены. В частности, Роджер и Ватсон обнаружили доказательства исключительно сложных теорем (1.10) - (1.12).

$$1-\frac{3!}{(1!\,2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!\,4!)^3}x^4-\ldots= \\ =\Big(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\ldots\Big)\Big(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\ldots\Big). \quad (1.1)$$

$$1-5\Big(\frac{1}{2}\Big)^3+9\Big(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\Big)^3-13\Big(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\Big)^3+\ldots=\frac{2}{\pi}. \quad (1.2)$$

$$1+9\Big(\frac{1}{4}\Big)^4+17\Big(\frac{1\cdot5}{4\cdot8}\Big)^4+25\Big(\frac{1\cdot5\cdot9}{4\cdot8\cdot12}\Big)^4+\ldots=\frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}\Big\{\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\Big\}^2}. \quad (1.3)$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^5-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^5+\ldots=\frac{2}{\left\{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^4}. \tag{1.4}$$

$$\int_0^\infty \frac{1+\left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a+1}\right)^2}\ldots dx=$$

$$=\frac{1}{2}\pi^{1/2}\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b+1)\Gamma\left(b-a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b-a+1)}. \tag{1.5}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\ldots}=\frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\ldots)}. \tag{1.6}$$

Если $\alpha\beta=\pi^2$, тогда

$$\alpha^{-1/4}\left(1+4\alpha\int_0^\infty \frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right)=\beta^{-1/4}\left(1+4\beta\int_0^\infty \frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right). \tag{1.7}$$

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi^{1/2}-\frac{e^{-a^2}}{2a+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{2}{2a+}\,\frac{3}{a+}\,\frac{4}{2a+\ldots}. \tag{1.8}$$

$$4\int_0^\infty \frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\operatorname{ch}x}\,dx=\frac{1}{1+}\,\frac{1^2}{1+}\,\frac{1^2}{1+}\,\frac{2^2}{1+}\,\frac{2^2}{1+}\,\frac{3^2}{1+}\,\frac{3^2}{1+\ldots}. \tag{1.9}$$

Если $u=\dfrac{x}{1+}\,\dfrac{x^5}{1+}\,\dfrac{x^{10}}{1+}\,\dfrac{x^{15}}{1+\ldots}$, $v=\dfrac{x^{1/5}}{1+}\,\dfrac{x}{1+}\,\dfrac{x^2}{1+}\,\dfrac{x^3}{1+\ldots}$, то

$$v^5=u\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}. \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-2\pi}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi}}{1+\ldots}=\left\{\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}e^{2\pi/5}. \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots}=\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{\left\{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2}-1\right\}}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{2\pi/\sqrt{5}}. \tag{1.12}$$

Если $F(k) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^2 + \ldots$ и $F(1-k) = \sqrt{(210)}F(k)$, тогда

$$k = \left(\sqrt{2}-1\right)^4\left(2-\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^4\left(8-3\sqrt{7}\right)^2\left(\sqrt{10}-3\right)^4\times$$
$$\times\left(4-\sqrt{15}\right)^4\left(\sqrt{15}-\sqrt{14}\right)^2\left(6-\sqrt{35}\right)^2. \quad (1.13)$$

Коэффициент при x^n в $(1-2x+2x^4-2x^9+\ldots)^{-1}$ является целым числом, ближайшим к

$$\frac{1}{4n}\left(\operatorname{ch}\pi\sqrt{n} - \frac{\operatorname{sh}\pi\sqrt{n}}{\pi\sqrt{n}}\right). \quad (1.14)$$

Количество чисел между A и x, которые являются либо квадратами, либо суммами двух квадратов, равно

$$K\int_A^x \frac{dt}{\sqrt{\log t}} + \theta(x), \quad (1.15)$$

где $K = 0{,}764\ldots$ и $\theta(x)$ очень мало по сравнению с предыдущим интегралом.

Я хотел бы, чтобы вы начали с попытки восстановить непосредственную реакцию обычного профессионального математика, получившего подобное письмо от неизвестного клерка-индуса.

Первый возникший у меня вопрос был: известны ли мне какие-нибудь из этих формул. Я сам доказывал выражения, подобные (1.7), а (1.8) казалось мне в общем знакомым. В действительности (1.8) является классическим тождеством, это формула Лапласа, впервые строго доказанная Якоби, а (1.9) возникло в работе, опубликованной Роджерсом в 1907 году. Я подумал, что, будучи специалистом по определенным интегралам, вероятно, я смог бы доказать (1.5) и (1.6), и сделал это, хотя и с немного большими затруднениями, чем ожидал. В целом интегральные формулы кажутся мне наименее впечатляющими.

Формулы рядов (1.1)–(1.4) оказались намного более интригующими, и вскоре стало ясно, что Рамануджан должен знать намного более общие теоремы и многое придерживал в рукаве. Второе тождество является формулой Бауэра, хорошо известной в теории рядов Лежандра, но остальные намного сложнее, чем они выглядят. Все теоремы, необходимые для доказательства, сейчас можно найти в книге Бейли *Кембриджский трактат о гипергеометрических функциях*.

Формулы (1.10)–(1.13) находятся на другом уровне и, очевидно, являются и сложными, и глубокими. Специалист по эллиптическим

функциям может сразу определить, что (1.13) каким-то образом получена из теории «комплексного умножения», но с (1.10) – (1.12) я был вынужден признать себя побежденным. Я никогда раньше не видел ничего подобного. Одного взгляда на них достаточно, чтобы понять, что они могут быть получены только первоклассным математиком. Они должны быть истинными, поскольку если бы они не были истинными, то ни у кого не хватило бы воображения, чтобы изобрести их И, наконец (вам следует помнить, что я ничего не знал о Рамануджане и должен был учесть все возможные варианты), автор должен быть полностью искренним, поскольку великие математики встречаются чаще, чем воры или обманщики с таким невероятным умением.

Две последние формулы стоят особняком, поскольку они не являются верными и показывают пределы математической силы Рамануджана, но это не мешает им быть дополнительными свидетельствами его исключительной силы. Функция в (1.14) является настоящей аппроксимацией коэффициента, хотя и не настолько близкой, как думал Рамануджан, и неправильное утверждение Рамануджана было одним из самых плодотворных, какие он когда-либо делал, поскольку, в конце концов, оно привело нас ко всем нашим совместным работам о разбиениях. И, наконец, (1.15), хотя в буквальном смысле «верно», определенно вводит в заблуждение (и Рамануджан действительно заблуждался). Интеграл, как аппроксимация, не имеет преимуществ над более простой функцией

$$\frac{Kx}{\sqrt{(\log x)}}, \tag{1.16}$$

обнаруженной в 1908 году Ландау. Рамануджан был обманут ложной аналогией с задачей распределения простых чисел. Я должен отложить на время то, что я собираюсь рассказать о работе Рамануджана над этой стороной теории чисел.

Неизбежно, что очень большая часть работ Рамануджана при изучении оказывается переоткрытиями. Он находился в совершенно неравных условиях, бедный и одинокий индус, использующий свои мозги против собранной воедино мудрости Европы. У него не было никакого настоящего обучения, во всей Индии не было ни одного человека, от которого он мог бы чему-то научиться. Он, возможно, видел три-четыре книги не индийских авторов, хорошего качества, все из них английские. В его жизни были периоды, когда он имел доступ к библиотеке в Мад-

расе. Но эта библиотека является не очень хорошей, в ней содержится очень мало французских или немецких книг. И, в любом случае, Рамануджан совершенно не знал этих языков. По моим оценкам, примерно две трети лучших работ Рамануджана, написанных в Индии, были переоткрытиями и сравнительно немногие из них были опубликованы при его жизни, хотя Ватсон, систематически изучивший его записные книжки, обнаружил с тех пор много нового.

Основная часть опубликованных работ Рамануджана была написана в Англии. Его ум к тому времени уже несколько потерял эластичность, и он так и не стал «ортодоксальным» математиком, но он по-прежнему мог узнавать новое и делал это исключительно хорошо. Было невозможно обучать его систематически, но постепенно он вбирал в себя новые точки зрения. В частности, он узнал, что означает доказательство, и его поздние работы, хотя и оставались, в некотором смысле, столь же странными и индивидуальными, как всегда, читались как работы хорошо информированного математика. Однако его методы и способы исследования остались, в сущности, теми же. Казалось бы, что такой формалист, как Рамануджан, стал бы наслаждаться теоремой Коши, но он практически никогда не использовал ее[1], и самым изумительным свидетельством его гениальной способности производить формальные преобразования служит то, что он, похоже, никогда не испытывал в ней нужды.

Легко составить впечатляющий список теорем, переоткрытых Рамануджаном. Подобный список, разумеется, не может быть совершенно точным, поскольку иногда он обнаруживал лишь часть теоремы и иногда он получал формулу, но не мог найти доказательство, которое является необходимым для правильного понимания теоремы. К примеру, в аналитической теории чисел Рамануджан, в некотором смысле, открыл очень многое, но он был далек от понимания настоящих сложностей этого раздела математики. Также существуют некоторые его работы, в основном по теории эллиптических функций, относительно которых по-прежнему остаются неопределенность, по-прежнему невозможно, даже после всех исследований Ватсона и Морделла, отделить то, что он изучил каким-нибудь образом, от того, что он открыл самостоятельно. Я буду выбирать лишь те случаи, которые кажутся мне достаточно ясными.

[1]Возможно, никогда. Существует ссылка на теорию вычетов на стр. 129 Сборника трудов, но я полагаю, что я сам добавил ее.

Здесь я должен признаться, что именно меня следует во всем этом винить, поскольку многое из того, что нам хотелось бы узнать сейчас, я мог бы выяснить довольно легко. Я встречался с Рамануджаном почти каждый день и мог бы прояснить многие неясные моменты небольшим перекрестным допросом. Рамануджан был вполне способен и полон желания дать точный ответ на вопрос и ни в коей мере не стремился сделать загадку из своих достижений. Вряд ли я задавал ему вопросы такого рода. Я даже никогда не спрашивал, видел ли он *Эллиптические функции* Кейли или Гринхилла (я полагаю, что он, по-видимому, имел такую возможность).

Сейчас я сожалею об этом, но это не так уж важно, а тогда мое поведение было совершенно естественным. Во-первых, я не знал, что Рамануджан скоро умрет. Он был не особенно заинтересован в своей собственной истории или психологии. Он был математиком, стремящимся заняться своей работой. И, кроме того, я тоже был математиком, и математик при встрече с Рамануджаном мог размышлять о более интересных вещах, чем исторические исследования. Казалось нелепым беспокоить его по поводу того, как он обнаружил ту или иную из известных теорем, когда он показывал мне полдюжины новых почти каждый день.

Я не считаю, что Рамануджан сделал много открытий в классической теории чисел, или, в действительности, не думаю, что он вообще знал многое из нее. Он никогда не имел никаких знаний об общей теории арифметических форм. Я сомневаюсь, что он знал закон квадратичной взаимности до того, как он приехал в Англию. Диофантовы уравнения должны были являться удобным для него объектом, но с ними он достиг сравнительно немногого, и то, что он открыл, не относится к числу его лучших результатов. Так, он нашел решения уравнения Эйлера

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3, \tag{1.17}$$

такие как

$$\begin{cases} x = 3a^2 + 5ab - 5b^2, & y = 4a^2 - 4ab + 6b^2, \\ z = 5a^2 - 5ab - 3b^2, & w = 6a^2 - 4ab + 4b^2 \end{cases} \tag{1.18}$$

и

$$\begin{cases} x = m^7 - 3m^4(1+p) + m(2+6p+3p^2), \\ y = 2m^6 - 3m^3(1+2p) + 1 + 3p + 3p^2, \\ z = m^6 - 1 - 3p - 3p^2, \quad w = m^7 - 3m^4p + m(3p^2 - 1); \end{cases} \tag{1.19}$$

но ни одно из них не является общим решением.

Он переоткрыл знаменитую теорему фон Штауда о числах Бернулли:

$$(-1)^n B_n = G_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{r}, \tag{1.20}$$

где p, q, ... — такие нечетные числа, что $p-1$, $q-1$, ... являются делителями числа $2n$ и G_n — целое число. Сложно сказать, в каком смысле он доказал ее, поскольку он обнаружил ее в тот период своей жизни, когда у него вряд ли сформировалась какая-нибудь определенная концепция доказательства. По словам Литтлвуда, «ясная определенная идея о том, что *понимать* под доказательством, столь привычная в наши дни, что считается очевидной, возможно, вообще была ему неизвестна. Если где-то возникало значительное количество подтверждающих аргументов и общее объединение свидетельств и интуиции убеждали его, он обрывал на этом рассуждения». Мне следует сказать кое-что по поводу этого вопроса о доказательстве, но я отложу это до другой ситуации, в которой этот вопрос является намного более важным. В этом случае в доказательстве нет ничего, что было бы непосильным для Рамануджана.

В теории чисел существует значительный раздел, а именно теория представления целых чисел в виде сумм квадратов, которая тесно связана с теорией эллиптических функций. Так, количество представлений числа n в виде суммы двух квадратов равно

$$r(n) = 4\big\{d_1(n) - d_3(n)\big\}, \tag{1.21}$$

где $d_1(n)$ — количество делителей n вида $4k+1$ и $d_3(n)$ — количество делителей вида $4k+3$. Якоби получил похожие формулы для 4, 6 и 8 квадратов. Рамануджан обнаружил все эти формулы и много других подобных формул.

Он также переоткрыл теорему Лежандра о том, что n является суммой трех квадратов, за исключением тех случаев, когда n имеет вид

$$4^a(8k+7), \tag{1.22}$$

но я не считаю это очень значительным достижением. Эту теорему довольно легко угадать и сложно доказать. Все известные доказательства используют общую теорию тернарных форм, о которой Рамануджан ничего не знал, и я согласен с профессором Диксоном в суждении о

том, что Рамануджан, по-видимому, не имел доказательства этой теоремы. В любом случае, он ничего не знал о числе представлений.

До приезда в Англию Рамануджан внес сравнительно малый вклад в теорию чисел, но Рамануджана нельзя понять, не поняв его страсти к самим числам. Ранее я писал:

Его способность помнить характерные особенности чисел была почти сверхъестественной. Литтлвуд сказал, что каждое положительное число было одним из личных друзей Рамануджана. Я помню, как однажды собирался навестить его, когда он лежал больной в Путни. Я ехал на такси с номером 1729 и упомянул, что это число кажется мне довольно тупым и что я надеюсь, что оно не окажется неблагоприятным предзнаменованием. «Нет» — ответил он, — «это очень интересное число, это наименьшее число, которое выражается как сумма двух кубов двумя различными способами»[1]. Естественно, я спросил его, не может ли он сказать мне решение соответствующей задачи для четвертых степеней, и он ответил, на мгновение задумавшись, что он не знает никакого подходящего примера и полагает, что первое такое число должно быть очень большим.

В алгебре основные исследования Рамануджана были связаны с гипергеометрическими рядами и непрерывными дробями (разумеется, я использую слово *алгебра* в его старомодном смысле). Эти направления в точности подходили ему, и в них он, бесспорно, был одним из великих мастеров. Существуют три ныне знаменитых тождества — «тождество Доугалла–Рамануджана»

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(s+2n)\frac{s^{(n)}}{1^{(n)}}\frac{(x+y+z+u+2s+1)^{(n)}}{(x+y+z+u+s)_{(n)}}\times$$
$$\times\prod_{x,\,y,\,z,\,u}\frac{x_{(n)}}{(x+s+1)^{(n)}}=\frac{s}{\Gamma(s+1)\Gamma(x+y+z+u+s+1)}\times$$
$$\times\prod_{x,\,y,\,z,\,u}\frac{\Gamma(x+s+1)\Gamma(y+z+u+s+1)}{\Gamma(z+u+s+1)},\quad(1.23)$$

где

$$a^{(n)}=a(a+1)\dots(a+n-1),\quad a_{(n)}=a(a-1)\dots(a-n+1),$$

[1] $$1729=12^3+1^3=10^3+9^3.$$

и «тождества Роджерса–Рамануджана»

$$\begin{cases} 1+\dfrac{q}{1-q}+\dfrac{q^4}{(1-q)(1-q^2)}+\dfrac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\ldots= \\ \qquad =\dfrac{1}{(1-q)(1-q^6)\ldots(1-q^4)(1-q^9)\ldots}, \\ 1+\dfrac{q^2}{1-q}+\dfrac{q^6}{(1-q)(1-q^2)}+\dfrac{q^{12}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\ldots= \\ \qquad =\dfrac{1}{(1-q^2)(1-q^7)\ldots(1-q^3)(1-q^8)\ldots}, \end{cases} \tag{1.24}$$

в которых он был предвосхищен британскими математиками. Об этих тождествах я буду рассказывать в следующих лекциях[1]. Что касается гипергеометрических рядов, то можно примерно сказать, что он переоткрыл формальную теорию, описанную в трактате Бейли, в той мере, в какой она была изучена к 1920-му году. Об этой теории немного написано в книге Кара и в *Алгебре* Кристала, и нет никаких сомнений в том, что он начал свое построение с исходной точки. Четыре формулы (1.1)–(1.4) являются высокоспециализированными примерами этой деятельности.

Его шедевром в теории непрерывных дробей являлась работа над

$$\frac{1}{1+}\frac{x}{1+}\frac{x^2}{1+\ldots}, \tag{1.25}$$

которая включает теоремы (1.10)–(1.12). Теория этих дробей зависит от тождеств Роджерса–Рамануджана, в которых он был предвосхищен Роджерсом, но он опередил Роджерса в других отношениях и процитированные мной теоремы являются его собственными. Он получил множество других очень общих и очень красивых формул, для которых формулы, подобные формуле Лагера

$$\frac{(x+1)^n-(x-1)^n}{(x+1)^n+(x-1)^n}=\frac{n}{x+}\frac{n^2-1}{3x+}\frac{n^2-2^2}{5x+\ldots}, \tag{1.26}$$

являются очень частными случаями. Доказательство наиболее впечатляющих формул недавно опубликовано Ватсоном.

[1] См. лекции VI и VII.

Возможно, что в работах по этим разделам математики талант Рамануджана проявился лучше всего. Я писал:

Наиболее изумительной являлась его интуиция в алгебраических формулах преобразования бесконечных рядов. Я совершенно уверен, что никогда не встречал равного ему в этом, и я могу сравнивать его лишь только с Эйлером или Якоби. Он намного чаще, чем большинство современных математиков, действовал индукцией от численных примеров; все свойства разбиений, связанные со сравнениями, были открыты им таким способом. Свою память, терпение, вычислительное искусство он соединил с умением обобщать, чувством формы и способностью быстрого изменения своих гипотез, которые часто оказывались изумительными, и это привело его к тому, что он стал самым лучшим в своей области исследований.

Сейчас я думаю, что эти чрезвычайно сильные выражения являются экстравагантными. Возможно, что великие дни формул прошли и Рамануджану следовало родиться на 100 лет раньше, но он был самым великим формалистом своего времени. Существовало много важных, и полагаю, кто-то скажет, более великих математиков, чем Рамануджан в последние пятьдесят лет, но никто не мог сравнится с ним на его собственной территории. В игре, в которой он знал правила, Рамануджан мог дать фору любому математику в мире.

В анализе собственные работы Рамануджана неизбежно оказываются менее впечатляющими, поскольку он не знал теории функций, и невозможно выполнить настоящий анализ, не владея этой теорией. Формальная сторона интегрального исчисления, т. е. все, что он мог узнать об анализе из книги Кара или любой другой, была изучена многократно и интенсивно. Тем не менее, Рамануджан переоткрыл впечатляющее количество наиболее красивых аналитических тождеств. Так, функциональное уравнение для римановой дзета-функции

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

а именно

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos \frac{1}{2} s\pi \Gamma(s)\zeta(s), \tag{1.27}$$

сформулировано (в почти неузнаваемых обозначениях) в его записных книжках. Также там можно найти формулу суммирования Пуассона

$$\alpha^{1/2}\Big\{\frac{1}{2}\phi(0) + \phi(\alpha) + \phi(2\alpha) + \ldots\Big\} =$$

$$= \beta^{1/2}\Big\{\frac{1}{2}\psi(0) + \psi(\beta) + \psi(2\beta) + \ldots\Big\}, \tag{1.28}$$

где

$$\psi(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \int_0^\infty \phi(t) \cos xt \, dt$$

и $\alpha\beta = 2\pi$, и также функциональное уравнение Абеля

$$L(x) + L(y) + L(xy) + L\Big\{\frac{x(1-y)}{1-xy}\Big\} + L\Big\{\frac{y(1-x)}{1-xy}\Big\} = 3L(1) \qquad (1.29)$$

для

$$L(x) = \frac{1}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots$$

Он знал бóльшую часть формальных идей, которые лежат в основе моей недавней работы совместно с Ватсоном и Титчмаршем о «ядрах Фурье» и «обратных функциях», и, разумеется, он мог вычислить любой вычислимый определенный интеграл. Существует одна особенно интересная формула, а именно

$$\int_0^\infty x^{s-1} \{\phi(0) + x\phi(1) + x^2\phi(2) - \dots\} \, dx = \frac{\pi\phi(-s)}{\sin s\pi}, \qquad (1.30)$$

которая особенно ему нравилась и которую он постоянно использовал. Это, в действительности, «интерполяционная формула», которая позволяет нам сказать, к примеру, что при определенных условиях функция, которая обращается в нуль при всех положительных целых значениях ее аргумента, должна тождественно равняться нулю. Я никогда не видел эту формулу, выраженной явно у кого-либо другого, хотя она тесно связана с работами Меллина и других.

Я оставил напоследок две наиболее загадочных стороны ранних работ Рамануджана: его работы по эллиптическим функциям и по аналитической теории чисел. Первая, вероятно, является слишком специализированной и сложной для понимания любого, кроме специалистов, и сейчас я ничего о ней не скажу[1]. Вторая тема является еще более сложной (как знает любой, кто прочел книгу Ландау о простых числах или трактат Ингама), но любой может приближенно понять суть задач, стоящих в этой области, и любой квалифицированный математик

[1] См. лекцию XII.

представляет, почему Рамануджан не мог с ними справиться. Это было единственное настоящее поражение Рамануджана. Как обычно, он показал поразительную силу воображения, но почти ничего не доказал, и многое из того, что он вообразил, было ложным.

Здесь я обязан сделать несколько замечаний по очень сложному вопросу: *доказательство* и его важность в математике. Все физики и большое количество весьма уважаемых математиков презрительно относятся к доказательству. Я слышал, как профессор Эддингтон, к примеру, утверждал, что доказательство в том смысле, как его понимает чистый математик, является, в сущности, весьма не интересным и не важным и что тот, кто не уверен, что он действительно открыл что-то важное, не должен тратить время в поисках доказательства. Истиной является то, что Эддингтон является не последовательным и иногда даже сам опускается до доказательств. Для него, к примеру, недостаточно просто знать, что существует в точности

$$136 \cdot 2^{256}$$

протонов во Вселенной; он не может преодолеть искушения доказать это, и я не могу не думать о том, что это доказательство, чего бы оно не стоило, дало ему определенное интеллектуальное удовлетворение. Его аргументация, несомненно, состоит в том, что для него «доказательство» означает нечто совершенно отличное от того, что оно означает для чистого математика, и, в любом случае, нам не следует понимать его слишком буквально. Но мнение, которое я приписывал ему и с которым, я уверен, согласны все физики в глубине своих сердец, является таким, на которое математик обязан что-то ответить.

Я не собираюсь ввязываться в анализ этой весьма деликатной концепции, но я думаю, что существует ряд положений о доказательстве, с которыми согласятся все математики. Во-первых, даже если мы не понимаем в точности, что такое доказательство, мы можем, по-крайней мере в обычном анализе, распознать доказательство, когда мы его увидим. Во-вторых, существует два различных мотива в любом представлении доказательства. Первый из них является просто закреплением убеждения. Второй состоит в том, чтобы представить заключение как кульминационную точку подходящего набора предложений, последовательности предположений, чья истинность признана и которые расположены в соответствии с правилами. Существует два идеала, и опыт показывает, что, за исключением простейшей математики, мы вряд ли

можем удовлетворить первому идеалу, не удовлетворив в то же время второму. Мы в состоянии сразу распознать, что 5 или даже 17 являются простыми числами, но никто не может убедить себя, что

$$2^{127} - 1$$

является простым числом, если не изучить доказательство. Никто не имеет столь живого и всеобъемлющего воображения.

Математик обычно получает теорему с помощью интуиции; он обнаруживает правдоподобное заключение и начинает работать над созданием доказательства. Иногда это является рутинным действием, и любой хорошо обученный профессионал может представить требуемый результат, но более часто воображение является очень ненадежным проводником. В частности, так происходит в аналитической теории чисел, где даже воображение Рамануджана вело его по неправильному пути.

Существует поразительный пример, который я часто цитировал, ложной гипотезы, которая, кажется, была одобрена даже Гауссом и для опровержения которой потребовалось около 100 лет. Центральной задачей аналитической теории чисел является задача распределения простых чисел. Количество $\pi(x)$ простых чисел меньших, чем большое число x, приближенно равно

$$\frac{x}{\log x}. \tag{1.31}$$

Это «теорема о простых числах», которая была гипотезой очень долгий период, но никогда не была полностью обоснована, пока Адамар и де ла Валле-Пуссен не доказали ее в 1896 году. Аппроксимация является не очень хорошей, и гораздо лучшей аппроксимацией является

$$\operatorname{li} x = \int_0^x \frac{dt}{\log t}.^1 \tag{1.32}$$

В некоторых смыслах, еще лучшей аппроксимацией является

$$\operatorname{li} x - \frac{1}{2}\operatorname{li} x^{1/2} - \frac{1}{3}\operatorname{li} x^{1/3} - \frac{1}{5}\operatorname{li} x^{1/5} + \frac{1}{6}\operatorname{li} x^{1/6} - \frac{1}{7}\operatorname{li} x^{1/7} + \dots \tag{1.33}$$

[1] Интеграл является «основным значением». См. § 2.2.

(нам сейчас не нужно задумываться о законе формирования ряда). Абсолютно естественно предположить, что

$$\pi(x) < \operatorname{li} x \tag{1.34}$$

при всех больших x; и Гаусс, и другие математики высказывались о высокой вероятности этой гипотезы. Гипотеза не только является правдоподобной, но и подтверждается *всеми* имеющимися фактами. Известно, что значения 10 000 000 простых чисел лежат в интервале до 1 000 000 000 и (1.34) является истиной для каждого значения x, для которого существуют данные.

В 1912 году Литтлвуд доказал, что эта гипотеза ложна и что существует бесконечное множество значений x, для которых знак неравенства (1.34) должен быть заменен на обратный. В частности, существует число X такое, что (1.34) является ложным для некоторых x, меньших чем X. Литтлвуд доказал существование X, но его метод не давал никаких явных значений, и лишь совсем недавно допустимое значение, а именно

$$X = 10^{10^{10^{34}}},$$

было получено Скьюсом. Я думаю, что это самое большое число, которое когда-либо использовалось в математике для какой-нибудь определенной цели.

Количество протонов во Вселенной примерно равно

$$10^{80}.$$

Количество возможных шахматных партий намного больше, возможно

$$10^{10^{50}}$$

(в любом случае, с показателем второго порядка). Если бы Вселенная была шахматной доской, протоны были шахматными фигурами и любая перестановка положений двух протонов являлось ходом, тогда количество возможных партий было бы подобно числу Скьюса. Насколько бы не уменьшалось это число при улучшении доказательства Скьюса, по-видимому, мы никогда не узнаем ни одного примера, подтверждающего правоту Литтлвуда.

В этом примере истина не только опровергает свидетельства фактов и здравого смысла, но и математическое воображение даже столь сильное и глубокое, как у Гаусса, но, разумеется, этот пример из наиболее сложных частей теории. Никакая из частей теории простых чисел

не является действительно простой, но до некоторого момента простые аргументы, хотя они доказывают очень мало, в действительности не вводят нас в заблуждение. К примеру, существуют простые аргументы, которые могут привести любого хорошего математика к заключению

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{1.35}$$

теоремы о простых числах[1], или, что то же самое, к заключению, что

$$p_n \sim n \log n, \tag{1.36}$$

где p_n — это n-е простое число.

Во-первых, мы можем начать с тождества Эйлера

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{(1-2^{-s})(1-3^{-s})(1-5^{-s})\dots} = \\ = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_n \frac{1}{n^s}. \tag{1.37}$$

Оно является верным при $s > 1$, но и ряд, и произведение становятся равными бесконечности при $s = 1$. Естественно предположить, что при $s = 1$ ряд и произведение должны расходиться одинаковым образом. Также

$$\log \prod \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum \log \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum \frac{1}{p^s} + \sum \Big(\frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{3p^{3s}} + \dots \Big), \tag{1.38}$$

и последний ряд остается конечным при $s = 1$. Естественно предположить, что

$$\sum \frac{1}{p}$$

расходится как

$$\log \Big(\sum \frac{1}{n} \Big),$$

или более точно, что

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \sim \log \Big(\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} \Big) \sim \log \log x \tag{1.39}$$

[1] $f(x) \sim g(x)$ означает, что отношение f/g стремится к единице.

при больших x. Поскольку также

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n\log n}\sim\log\log x,$$

формула (1.39) означает, что p_n приближенно равен $n\log n$.

Существует несколько более искушенный аргумент, который, в сущности, даже проще. Легко увидеть, что наибольшая степень простого числа p, которая делит $x!$, равна

$$\left[\frac{x}{p}\right]+\left[\frac{x}{p^2}\right]+\left[\frac{x}{p^3}\right]+\dots,$$

где $[y]$ обозначает целую часть y. Следовательно,

$$x!=\prod_{p\leqslant x}p^{[x/p]+[x/p^2]+\dots},$$

$$\log x!=\sum_{p\leqslant x}\Bigl(\left[\frac{x}{p}\right]+\left[\frac{x}{p^2}\right]+\dots\Bigr)\log p. \tag{1.40}$$

Левая часть (1.40) практически равна $x\log x$ по теореме Стирлинга. Что касается правой стороны, можно аргументировать, что квадраты, кубы, ... простых чисел сравнительно редки и слагаемые, включающие их, должны быть несущественны, и также различие будет сравнительно малым, если мы заменим $[x/p]$ на x/p. Тем самым, мы приходим к заключению, что

$$x\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p}\sim x\log x,\quad \sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p}\sim\log x,$$

и это снова в точности соответствует тому, что p_n приближенно равен $n\log n$.

Это, в сущности, изложение аргументов, использованных Чебышевым, естественно, в менее наивной форме, который первым добился существенного прогресса в теории простых чисел, и я представляю себе, что Рамануджан начал с аргументов такого рода, хотя в записных книжках нет ничего пригодного для демонстрации. Очевидно лишь то, что Рамануджан самостоятельно обнаружил формулу теоремы о простых числах. Это было значительным достижением; те люди, которые обнаружили формулу теоремы до него, такие как Лежандр, Гаусс и

Дирихле, все они были очень великие математики, а Рамануджан обнаружил другие формулы, лежащие еще дальше от поверхности. Возможно, наилучшим примером служит (1.15). Интеграл лучше заменить более простой функцией (1.16), но формула Рамануджана является истинной в том виде, в котором она сформулирована, и это было доказано Ландау в 1909 году, и в ней нет нечего очевидного, что позволило бы предположить ее истинность.

Фактом остается то, что вряд ли какие-либо работы Рамануджана в этой области имеют какое-либо непреходящее значение. Аналитическая теория чисел является одной из тех исключительных областей математики, в которых доказательство является всем и ничего, лишенное абсолютной строгости, не принимается. Достижение тех математиков, которые обнаружили теорему о простых числах, довольно мало по сравнению с достижением тех, кто получил доказательство. Это связано не только с тем, что в этой теории (как показывает теорема Литтлвуда) вы не можете быть уверены в фактах без доказательства, хотя и это достаточно важно. Вся история теоремы о простых числах и других больших теорем в этой области показывает, что вы не можете достигнуть никакого настоящего понимания структуры и смысла теории или получить какой-либо здравый инстинкт, ведущий вас в дальнейших исследованиях, пока вы не изучите доказательства. Сравнительно просто делать остроумные догадки, действительно, существуют теоремы, подобные «теореме Гольдбаха»[1], которые никогда не были доказаны и которые любой дурак может угадать.

Теория простых чисел зависит от свойств функции Римана $\zeta(s)$, рассматриваемой как аналитическая функция комплексной переменной s, и, в частности, от распределения ее нулей, и Рамануджан вообще ничего не знал о теории аналитических функций. Прежде я писал:

> Теория простых чисел Рамануджана была испорчена его незнанием теории функций комплексного переменного. Это было то (так сказать), чем могла бы быть эта теория, если бы дзета-функция не имела бы комплексных нулей. Его метод полностью зависел от использования расходящихся рядов... То, что его доказательства являются неправильными — это единственное, чего следовало ожидать. Но ошибки идут глубже этого, и многие из действительных результатов были ложными. Он получил доминирующие члены в классических формулах, хотя и неправильными методами, но ни одна из них не являлась столь близкой аппроксимацией, как он предполагал.

[1] Любое четное число, большее двух, является суммой двух простых.

Можно сказать, что это было единственной большой неудачей Рамануджана...

и если бы я остановился в этом месте, то сейчас мне бы было нечего добавить, но я позволил сентиментализму снова увести меня в сторону. Я продолжил аргументом, что «его неудача была более чудесна, чем любой из его триумфов», и это является абсурдным преувеличением. Нет никакой пользы в попытке притвориться, что неудача является чем-то иным. Возможно, также мы можем сказать, что его неудача является такой, которая, наоборот, должна увеличить, а не уменьшить наше восхищение его талантами, поскольку она дает нам дополнительные и удивительные свидетельства его воображения и многосторонности.

Но репутация математика не может основываться на неудачах или переоткрытиях, она должна основываться, в основном и правильно, на действительных и оригинальных достижениях. Я должен оправдать Рамануджана на этой почве, и это я надеюсь сделать в моих следующих лекциях.

Комментарии к лекции I

Стр. 8. Эта лекция является перепечаткой той, что была прочитана на научной конференции, посвященной трехсотлетней годовщине Гарварда, 31 августа 1936 года и была опубликована в *American Math. Monthly*, 44 (1937), 137–155.

Стр. 16–18. Для доказательства (1.1) см. Прис (**2**) (Preece); для (1.2) и (1.3) см. Харди (**4, 8**); для (1.4) см. Харди (**4**), Випль (**1**) (Whipple) и Ватсон (**7**). Все эти формулы являются частными случаями намного более общих формул, обсуждаемых в Кембриджском трактате Бейли *Обобщенные гипергеометрические ряды* (№32, 1935). См. также лекцию VII.

(1.5) и (1.6) см. в №11 *Сборника трудов* и в Харди (**5, 6**).

Формулы такого же типа, как (1.7), можно найти в статье Харди в *Quarterly Journal of Math*, **35** (1904), 193–207. Сама формула (1.7) доказана Присом (**2**). См. также №11 *Сборника трудов*.

(1.8) см. в Ватсон (**2**), (1.9) см. в Прис (**4**), (1.10) – (1.12) в Ватсон (**4, 6**); (1.13) см. в Ватсон (**8**).

Что касается (1.15) см. Ландау, *Archiv der Math. und Physik* (**3**), **13** (1908), 305–315, и Стенли (**1**). Мисс Стенли просто показывает, как утверждение Рамануджана вводит в заблуждение. См. также лекцию IV(B).

Стр. 20. Библиотекарь университета Мадраса прислал мне копию каталога, опубликованную в 1914-м году, из которой становится ясным, что библиотечный фонд был богаче, чем я предполагал. К примеру, в ней содержались два стандартных французских трактата об эллиптических функциях (Appel and Lacour, Tannory and Molk), а также книги Кэйли и Гринхилла. Из других источников становится ясно, что Рамануджан знал что-то из английских книг, но ничего из французских.

Стр. 21. Эйлер получил общее *рациональное* решение для (1.17) и его решение было в дальнейшем упрощено Винетом и другими исследователями. См., к примеру, Харди и Райт, 198–202. Множество решений, подобных (1.18), находятся в *Истории* Диксона, ii, 500 et seq. Решение (1.19), в сущности, совпадает с решением, обнаруженным Юнгом (J. R. Young) (Диксон, *История*, ii, 554).

Простейшее известное решение

$$x^4 + y^4 = z^4 + t^4$$

принадлежит Эйлеру:

$$158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4 = 635318657.$$

См. Диксона, *Введение*, 60–62 и *История*, ii, 644–647. Эйлер получил решение, зависящее от двух параметров, но никакого «общего» решения не известно.

Доказательство теоремы фон Штауда (Staudt), принадлежащее Р. Радо (R. Rado), можно найти в Харди и Райт (Wright), 89–92.

Цитата из Литтлвуда взята из его обзора *Сборника трудов*.

Стр. 22. Общая теория представления чисел в виде суммы четного числа квадратов обсуждается в лекции IX. Теорему Лежандра о «трех квадратах» см. в Ландау, *Vorlesungen*, i, 114-122.

Стр. 24. Формула Лагера (1.26) совпадает с формулой (18) гл. XII «второго издания» записных книжек Рамануджана, см. Ватсон (**10**), 146.

По поводу «наиболее впечатляющей» формулы см. Ватсон (**14**).

Стр. 26. Уравнение (1.29) было переоткрыто Роджерсом, *Proc. London Math. Soc.*, (**2**), **4** (1907), 169–189, и приписано ему в *Сборнике трудов*, 337, но оно также было обнаружено в посмертных записках Абеля (*Euvres*, ii, 193).

Стр. 26. По поводу (1.30) см. лекцию XI.

Стр. 29. Скьюс, (Skewes) *Journal London Math. Soc.*, **8** (1933), 277–283. Скьюс подразумевал истинность гипотезы Римана, но с тех пор он обнаружил намного большее значение для X независимо от гипотезы. Эта работа еще не опубликована.

Стр. 31. По поводу (1.40) см., к примеру, Харди и Райт, 342; Ингам, 20; Ландау, *Handbuch*, 75–76.

Лекция II

Рамануджан и теория простых чисел

2.1. Я начну с обсуждения работ Рамануджана в «аналитической теории чисел» и, в частности, с самой знаменитой задачи в этой теории — задачи распределения простых чисел. Я говорил вам, что его работа в этой области математики не имеет большого непреходящего значения, но не думаю, что из-за этого то, что я собираюсь сказать, покажется вам менее интересным. Эта задача является одной из наиболее увлекательных во всей математике, и Рамануджан применил очень интересный подход к ее решению. У меня имеются неопубликованные рукописи, опираясь на которые я впервые могу объяснить вам в точности, где и в чем заключалась его ошибка.

Рамануджан писал об этой задаче в обоих своих первых письмах. Он не писал подробно, и я могу полностью процитировать все, что он говорил.

16 *января* 1913

На странице 36[1] утверждается, что «количество простых чисел, меньших x, равно

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} - \rho(x),$$[2]

где точный порядок $\rho(x)$ не был определен».

I. Я обнаружил функцию, которая в точности представляет собой количество простых чисел, меньших x, «в точности» — в том смысле, что разность между функцией и фактическим количеством простых чисел в общем случае равна 0 или некоторому маленькому конечному

[1] Моего Кембриджского трактата *Порядки бесконечности* (№12, второе издание, 1924).

[2] Я изменил знак у второго слагаемого для согласования с утверждениями Рамануджана.

значению, даже когда x становится бесконечно большим. Я получил функцию в виде бесконечного ряда и выразил ее двумя способами.

(1) В терминах чисел Бернулли. Из этого выражения мы можем вычислить количество простых чисел вплоть до 100 миллионов, в основном безошибочно и в некоторых случаях с ошибкой, равной 1 или 2.

(2) В виде определенного интеграла, из которого мы можем вычислять при всех значениях.

Я заметил, что $\rho(e^{2\pi x})$ имеет такую природу, что ее значение очень мало, когда x лежит между 0 и 3 (ее значение меньше нескольких сотен, когда $x = 3$), и быстро возрастает, когда x больше 3.

II. Я также получил выражения, позволяющие найти фактическое количество простых чисел вида $An + B$.

Разность между количеством простых чисел вида $4n - 1$, меньших x, и количеством простых чисел вида $4n+1$, меньших x, становится бесконечной при x, стремящемся к бесконечности.

29 *февраля* 1913

1. Количество простых чисел, меньших x, равно

$$\int_0^\infty \frac{y^t}{t\zeta(t+1)\Gamma(t+1)}\,dt, \tag{2.1.1}$$

где

$$\zeta(t+1) = \frac{1}{1^{t+1}} + \frac{1}{2^{t+1}} + \dots \tag{2.1.2}$$

и $y = \log x$.

2. Количество простых чисел, меньших x, равно

$$\frac{2}{\pi}\left\{\frac{2}{B_2}\left(\frac{\log x}{2\pi}\right) + \frac{4}{3B_4}\left(\frac{\log x}{2\pi}\right)^3 + \frac{6}{5B_6}\left(\frac{\log x}{2\pi}\right)^5 + \dots\right\}, \tag{2.1.3}$$

где $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, ... — числа Бернулли.

3. Количество простых чисел, меньших x, равно

$$\int_c^x \frac{dt}{\log t} - \frac{1}{2}\int_c^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} - \frac{1}{3}\int_c^{\sqrt[3]{x}} \frac{dt}{\log t} - \frac{1}{5}\int_c^{\sqrt[5]{x}} \frac{dt}{\log t} + \frac{1}{6}\int_c^{\sqrt[6]{x}} \frac{dt}{\log t} - \dots, \tag{2.1.4}$$

где приближенно $c = 1{,}45136380\ldots$[1]

Я также получил выражения для количества простых чисел в заданном виде (скажем, вида $24n+17$), меньших любого заданного числа.

$$\begin{array}{lcl} \text{Количество простых} & = & \text{количеству простых} \\ \text{чисел вида } 4n+1 & & \text{чисел вида } 6n+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4n-1 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 6n-1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8n+1 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12n+1. \end{array}$$

Количества простых чисел вида $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$, $12n+5$, $12n+7$ и $12n+11$ совпадают друг с другом.

Но

$$\begin{array}{lll} (\text{Количество простых} & -(\text{Количество простых} & \\ \text{чисел вида } 4n-1) & \text{чисел вида } 4n+1) & \to \infty, \\ (\ldots\ldots\ldots\ldots\ 6n-1) & -(\ldots\ldots\ldots\ldots\ 6n+1) & \to \infty, \\ (\ldots\ldots\ldots\ldots\ 8n+3) & -(\ldots\ldots\ldots\ldots\ 8n+1) & \to \infty, \\ (\ldots\ldots\ldots\ldots 12n+5) & -(\ldots\ldots\ldots\ldots 12n+1) & \to \infty. \end{array}$$

Я не просто показал, что разница стремится к бесконечности, а получил все решения (как и для количества простых чисел) для разности для любого заданного числа...

Мы должны читать второе письмо в свете первого; формулы (2.1.1), (2.1.3) и (2.1.4), естественно, не совпадают[2]. Рамануджан определяет три функции, интеграл (2.1.1), который я буду называть $J(x)$, и два ряда (2.1.3) и (2.1.4), которые я буду называть $G(x)$ и $R(x)$ соответственно, и утверждает, что их отличие от $\pi(x)$ ограничено, если $F(x)$ — какая-либо из этих трех функций, тогда

$$\pi(x) = F(x) + O(1). \tag{2.1.6}$$

[1] Рамануджан продолжает объяснять закон формирования ряда. Это, разумеется,

$$\sum \frac{\mu(m)}{m} \int_c^{x^{1/m}} \frac{dt}{\log t}, \tag{2.1.5}$$

где $\mu(m)$ является функцией Мёбиуса, которая равна $(-1)^\rho$, когда m не содержит «квадратов» (является произведением ρ различных простых чисел), и 0 в противном случае. Затем он приводит инструкции, связанные с вычислениями по ряду (см. *Сборник работ*, 351).

[2] Поскольку $\pi(x)$ не является непрерывной.

Ряд $R(x)$ является знаменитым рядом, который возникает в работе Римана, а ряд, очень похожий на $G(x)$, был получен Грамом. Интеграл $J(x)$, насколько мне известно, никогда не появлялся раньше и, в любом случае, я уверен (по причинам, которые я объясню позже), что Рамануджан обнаружил все три функции самостоятельно.

Ряды и интеграл Рамануджана

2.2. Ряд, использованный Грамом, не равен $G(x)$, он имеет вид

$$g(x) = 1 + \sum_1^\infty \frac{(\log x)^n}{n\zeta(n+1)\Gamma(n+1)}, \tag{2.2.1}$$

а $G(x)$ равен дважды сумме его нечетных слагаемых[1]. Можно показать, что этот ряд тождественно равен ряду $R(x)$ (Рамануджан, несомненно, знал это).

Нам потребуются некоторые предварительные замечания о $R(x)$, который я запишу в виде (2.1.5)[2]. Известно, что

$$\sum \frac{\mu(m)}{m} = 0 \tag{2.2.2}$$

и

$$\sum \frac{\mu(m)}{m} \log m = -1, \tag{2.2.3}$$

хотя даже первое из этих уравнений столь же «глубоко», как и теорема о простых числах. Из (2.2.2) следует, что значение c в (2.1.4) несущественно (до тех пор, пока оно не равно 1). В частности, если мы определим логарифмический интеграл $\operatorname{li} x$ при $x > 1$ выражением

$$\operatorname{li} x = \int_0^x \frac{dt}{\log t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x \Big) \frac{dt}{\log t}$$

---

[1] Поскольку

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{2k!} B_{2k}.$$

(Я следую обозначениям Рамануджана для чисел Бернулли, записывая B_{2k}, хотя чаще употребляется B_k.)

[2] См. предыдущую сноску.

(«главное значение» по Коши), тогда мы можем записать (2.1.5) в более привычном виде:

$$R(x) = \sum \frac{\mu(m)}{m} \operatorname{li} x^{1/m}. \tag{2.2.4}$$

Известно, что

$$\operatorname{li} x = \gamma + \log\log x + \sum_1^\infty \frac{(\log x)^n}{n \cdot n!}, \tag{2.2.5}$$

где γ является константой Эйлера. Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{li} x^{1/m} &= \gamma + \log\log x - \log m + \sum_1^\infty \frac{(\log x)^n}{n \cdot n!\, m^n} = \\ &= -\log m + \gamma + \log\log x + O\Big(\frac{1}{m}\Big), \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

когда $m \to \infty$ и сходимость (2.2.4) зависит от сходимости (2.2.2) и (2.2.3).

Если мы подставим выражение (2.2.6) в $R(x)$ и воспользуемся формулами (2.2.2) и (2.2.3), то получим

$$\begin{aligned} R(x) &= (\gamma + \log\log x) \sum \frac{\mu(m)}{m} - \sum \frac{\mu(m)}{m} \log m + \\ &+ \sum_m \frac{\mu(m)}{m} \sum_n \frac{(\log x)^n}{n \cdot n!\, m^n} = 1 + \sum_n \frac{(\log x)^n}{n \cdot n!} \sum_m \frac{\mu(m)}{m^{n+1}} = \\ &= 1 + \sum \frac{(\log x)^n}{n\zeta(n+1)\Gamma(n+1)} = g(x), \end{aligned}$$ [1]

поэтому суммы рядов Римана и Грама совпадают. Также, если мы запишем $\log x = y$ и

$$g(x) = h(\log x) = h(y) = 1 + \sum_1^\infty \frac{y^n}{n \cdot n!\, \zeta(n+1)},$$

тогда

$$G(x) = h(y) - h(-y),$$

[1] Все суммы от 1 до ∞.

и несложно показать, что

$$h(-y) \to 0, \tag{2.2.7}$$

когда $y \to \infty$.[1] Следовательно,

$$G(x) = R(x) + o(1)$$

и ряд Рамануджана эквивалентен ряду Грама.

Мы также можем доказать, что

$$J(x) = G(x) + o(1); \tag{2.2.8}$$

но доказательство, которое зависит от формулы

$$\int_0^\infty \frac{a^{x+1}}{\Gamma(x+1)}\,dx = e^a - \int_0^\infty \frac{e^{-ax}dx}{x\{\pi^2 + (\log x)^2\}},$$

является несколько более сложным. Если мы считаем это доказанным, то приходим к заключению, что *три аппроксимации Рамануджана эквивалентны.* Поэтому, в дальнейшем, я ограничусь наиболее знакомой функцией $R(x)$.

Ряд $\boldsymbol{R(x)}$

2.3. Утверждение Рамануджана по этой задаче заключается в том, что

$$\pi(x) - R(x) = O(1), \tag{2.3.1}$$

т. е. что $\pi(x) - R(x)$ ограничена. В этом случае

$$\pi(x) - R(x) = O(x^\delta) \tag{2.3.2}$$

при всех положительных δ, так что ошибка менее значительна, чем любое слагаемое в $R(x)$. Из этого легко вывести, что

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O(x^{1/2+\delta}), \tag{2.3.3}$$

$$\pi(x) = \operatorname{li} x - \frac{1}{2}\operatorname{li} x^{1/2} + O(x^{1/2+\delta}) \tag{2.3.4}$$

[1] См. комментарии в конце лекции.

и так далее при всех положительных δ. В частности, из этого будет следовать, что

$$\pi(x) - \operatorname{li} x \to -\infty \tag{2.3.5}$$

при $x \to \infty$. Я могу сразу заявить, что из этих утверждений (2.3.1), (2.3.2), (2.3.4) и (2.3.5) являются ложными, а ложность или истинность (2.3.3) зависит от того, верна ли гипотеза Римана.

Основное утверждение Рамануджана является ложным, но изумительно, насколько хорошо оно соответствует фактам. Таблицы простых чисел включают в себя до 10 000 000 значений, а значения $\pi(x)$ вычислены для множества гораздо больших значений x. Следующая таблица показывает некоторые значения $\pi(x)$ и ошибки аппроксимации функциями $\operatorname{li} x$ и $R(x)$.

x	$\pi(x)$	$\operatorname{li} x$	$R(x)$
100 000	9 592	+ 38	− 5
1 000 000	78 498	+ 130	+ 30
2 000 000	148 933	+ 122	− 9
3 000 000	216 816	+ 155	0
4 000 000	283 146	+ 206	+ 33
5 000 000	348 513	+ 125	− 64
6 000 000	412 849	+ 228	+ 24
7 000 000	476 648	+ 179	− 38
8 000 000	539 777	+ 223	− 6
9 000 000	602 489	+ 187	− 53
10 000 000	664 579	+ 339	+ 88
100 000 000	5 761 455	+ 755	+ 97
1 000 000 000	50 847 478	+ 1758	− 23

Наибольшая величина ошибки, известная для $R(x)$, равна +228 при $x = 90\,000\,000$. Совпадение очень впечатляющее, и (хотя Рамануджан не имел фактов в этом масштабе, что могло бы ввести его в заблуждение[1]) нет ничего удивительного в том, что он оказался введенным в заблуждение.

[1] Он цитирует лишь результаты для довольно маленьких x, ошибки −0,1, −0,1, +0,2 при $x = 50$, 300, 1000. (*Сборник трудов*, 351.)

2.4. Рамануджан, разумеется, не просто «угадал» свои теоремы, никакой полет фантазии не может завести человека так далеко. У него было «доказательство», точная и очень нетривиальная цепочка рассуждений. Их я собираюсь объяснить, но необходимо сначала сделать быстрый набросок истории и структуры «классической» теории.

Теорема о простых числах

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{2.4.1}$$

была сформулирована в виде гипотезы Лежандром и Гауссом независимо друг от друга. Гаусс получил аппроксимацию $\operatorname{li} x$, которая, как стало известно в наши дни, является более точной, но ни один из авторов не получил явных данных о степени точности, о которой они утверждали в своих формулах. Как я говорил в моей первой лекции, (2.4.1) эквивалентно $p_n \sim \log n$.

Первый определенный прогресс был сделан Чебышевым. Чебышев доказал, что

$$\frac{Cx}{\log x} < \pi(x) < \frac{Cx}{\log x},^{1} \tag{2.4.2}$$

или (что то же самое) что

$$Cn \log n < p_n < Cn \log n. \tag{2.4.3}$$

Он также ввел функции

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p, \quad \psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \log p.^{2} \tag{2.4.4}$$

Эти функции, в некотором смысле, более *естественные*, чем $\pi(x)$. Так,

$$\vartheta(x) = \log\Bigl(\prod_{p \leqslant x} p\Bigr)$$

---

[1] Я использую C для обозначения «абсолютной константы» (числа такого как 7 или π). Различные C, естественно, не равны между собой.

[2] Вычислим $\log p$ для каждого p, p^2, ... до x. Тогда

$$\psi(10) = \log 2 + \log 3 + \log 2 + \log 5 + \log 7 + \log 2 + \log 3 = \\ = 3\log 2 + 2\log 3 + \log 5 + \log 7$$

($\log 2$, к примеру, возникает из 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$).

(а наиболее естественная операция, которую можно проделать с множеством простых чисел, это *перемножить* их); а $\psi(x)$ равна логарифму наименьшего общего кратного чисел, не превосходящих x. Как мы увидим в дальнейшем, более сложная функция $\psi(x)$ наиболее естественно представляется в аналитической теории. Количество квадратов, кубов, ... простых чисел меньше, либо равных x не превосходит

$$x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4} + \ldots = O\big(x^{1/2} \log x\big),^{1}$$

что является незначительным по сравнению с функциями, чей порядок приближенно равен x. Следовательно, степени простых чисел сравнительно не важны в теории и мы можем думать о $\vartheta(x)$ и $\psi(x)$ для наших текущих целей как, в сущности, об одном и том же.

Естественно ожидать, что

$$\log x \cdot \pi(x) \sim \vartheta(x) \sim \psi(x), \tag{2.4.5}$$

поскольку (i) $\vartheta(x)$ и $\psi(x)$, в основном, «одно и то же» и (ii) $\vartheta(x)$ содержит $\pi(x)$ слагаемых, в большинстве из которых $\log p$ близко к $\log x$. Чебышев получил точное доказательство (2.4.5) и пришел к заключению, что

$$\lim \frac{\log x \cdot \pi(x)}{x} = \lim \frac{\vartheta(x)}{x} = \lim \frac{\psi(x)}{x}, \tag{2.4.6}$$

если хоть один из этих трех пределов существует, и что теорема о простых числах эквивалентна любому из следующих соотношений:

$$\vartheta(x) \sim x, \quad \psi(x) \sim x. \tag{2.4.7}$$

Наконец, он доказал, что единственным возможным значением пределов является 1; но он не смог преодолеть основную трудность — доказательство существования пределов.

Доказательство теоремы о простых числах

2.5. Теорема о простых числах окончательно была доказана Адамаром и де ла Валле-Пуссеном в 1896 году. Аналитический подход к

[1] Поскольку $p^m > x$, если $m > \log x / \log 2$, нам следует взять лишь $O(\log x)$ слагаемых ряда.

задаче основан на тождестве Эйлера

$$\zeta(s) = \sum_n n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{2.5.1}$$

где $\Re s > 1$. Из (2.5.1) следует, что

$$\log \zeta(s) = \sum_p \log \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{p,\, m} \frac{1}{m p^{ms}},$$

сумма берется по всем простым числам p и всем положительным целым числам m. Следовательно,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p,\, m} \frac{\log p}{p^{ms}} = \sum a_n n^{-s}, \tag{2.5.2}$$

где

$$a_n = \log p \quad (n = p^m),$$
$$a_n = 0 \qquad (\textit{иначе}).$$

Здесь a_n — арифметическая функция, обычно обозначаемая $\Lambda(n)$, и «функция суммы»

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n,$$

a_n равна $\psi(x)$.

Теперь нам потребуется общая теорема из теории рядов Дирихле. Предположим, что $s = \sigma + it$ и что

$$f(s) = \sum a_n n^{-s}$$

является абсолютно сходящимся при $\sigma > 1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s}\, ds$$

равно

$$0,\ \frac{1}{2},\ 1$$

в трех случаях: $0 < y < 1$, $y = 1$, $y > 1$;[1] и легко доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(s)\frac{x^s}{s}\,ds = \sum a_n \int \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \sum_{n\leqslant x}{}' a_n = A^*(x),$$

где $A^*(x)$ отличается от $A(x)$ лишь тем, что, когда x — целое число, последнее слагаемое a_n в $A(x)$ умножается на $\frac{1}{2}$. В частности,

$$\psi^*(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\frac{x^s}{s}\,ds, \tag{2.5.3}$$

где $c > 1$ и

$$f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(x)}.$$

Эта формула содержит «аналитическую» постановку задачи о простых числах. В дальнейшем я приведу две аппроксимации к решению. Первая настолько грубая, что при наших сегодняшних знаниях она не может быть использована в доказательстве.

Известно, что $\zeta(s)$ является аналитической функцией s, которая имеет простой полюс типа

$$\frac{1}{s-1} + \dots$$

при $s = 1$, но является регулярной при всех других значениях. Она удовлетворяет уравнению Римана

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\frac{1}{2}s\pi\,\Gamma(s)\zeta(s).$$

Она имеет простые нули («тривиальные» нули) при

$$s = -2,\ -4,\ -6, \dots$$

и бесконечное множество комплексных нулей ρ, для которых $0 < \sigma < 1$. «Гипотезой Римана» называется гипотеза, что вещественная часть всех ρ равна $\frac{1}{2}$.

[1] Интеграл равен главному значению на бесконечности (т. е. предельному значению интеграла от $c - iT$ до $c + iT$), когда $x = 1$.

Функция (2.5.2) также имеет полюс

$$\frac{1}{s-1}+\dots$$

при $s=1$ и полюса

$$-\frac{1}{s-2n}+\dots, \quad -\frac{1}{s-\rho}+\dots$$

в нулях $\zeta(s)$. Давайте предположим, что гипотеза Римана верна и что $f(s)$ при $\sigma>\frac{1}{2}$ и $|t|\to\infty$ ведет себя «не слишком плохо». Тогда естественно предположить, что мы можем провести контур интегрирования в (2.5.3) через полюс при $s=1$ и вывести

$$\psi^*(x)=x+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s)\frac{x^s}{s}\,ds, \tag{2.5.4}$$

где $\frac{1}{2}<\gamma<1$. Слагаемое x возникает как вычет для полюса при $s=1$. Далее, поскольку каждый элемент подынтегрального выражения имеет порядок x^γ по x, естественно предположить, что интеграл как минимум того же порядка и что

$$\psi^*(x)=x+O(x^\beta) \tag{2.5.5}$$

для всех $\beta>\frac{1}{2}$. Поскольку разность между $\psi^*(x)$ и $\psi(x)$ не превосходит $\log(x)$, это доказывает теорему о простых числах (и намного больше). Доказательство не может быть точно сформулировано в нескольких довольно простых строках, которые я набросал, но (2.5.5) действительно является правильным выводом из гипотезы Римана.

Из (2.5.5) легко вывести, что

$$\pi(x)=\operatorname{li}x+O(x^\beta) \tag{2.5.6}$$

снова при всех $\beta>\frac{1}{2}$. (2.5.5) эквивалентно

$$\vartheta(x)=x+O(x^\beta). \tag{2.5.7}$$

Также

$$\pi(x) = 1 + \int_2^x \frac{d\vartheta(t)}{\log t}^1$$

и поэтому

$$\pi(x) - \operatorname{li} x = \int_2^x \frac{d\vartheta(t)}{\log t} - \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(1) = \int_2^x \frac{d\{\vartheta(t) - t\}}{\log t} + O(1) =$$

$$= \frac{\vartheta(x) - x}{\log x} - \frac{\log 2 - 2}{\log 2} + \int_2^x \frac{\vartheta(t) - t}{t(\log t)^2}\, dt + O(1) =$$

$$= O\Big(\frac{x^\beta}{\log x}\Big) + O\Big\{\int_2^x \frac{t^{\beta-1}}{(\log t)^2}\Big\} + O(1) = O(x^\beta),$$

что является (2.5.6).

Функция

$$\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \ldots \tag{2.5.8}$$

относится к $\psi(x)$ во многом так же как $\pi(x)$ к $\vartheta(x)$. Поскольку

$$\frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \ldots \leqslant x^{1/2} + x^{1/3} + \ldots = O(x^{1/2}\log x),$$

мы также получаем

$$\Pi(x) = \operatorname{li} x + O(x^\beta). \tag{2.5.9}$$

Вторая аппроксимация к доказательству

2.6. Это «первая аппроксимация» к доказательству теоремы о простых числах, но, в сущности, нам нужно подобраться немного ближе к истине, если мы хотим понять попытку Рамануджана. В моей второй аппроксимации я не буду использовать недоказанную гипотезу Римана, но это будет не самым важным улучшением.

[1] Удобно использовать терминологию из теории интеграла Стильтьеса: $\vartheta(x)$ – ступенчатая функция с прыжками $\log p$ в точках $x = p$.

Основная трудность в моем первом «доказательстве» состоит не в предположении гипотезы Римана, а в наивных аргументах о «порядке» интеграла в (2.5.4). Фундаментальная трудность заключается в том, что интеграл не является абсолютно сходящимся, и мы не можем быть уверены, что его порядок не будет намного больше, чем порядок любого из его элементов. Мы сможем избежать этой трудности, рассматривая не саму $\psi^*(x)$, а *среднее значение* $\psi^*(x)$ или $\psi(x)$, и получить асимптотическую формулу для этого среднего. Затем нам нужно перейти от среднего к самой функции, и это введет новый, «тауберов»[1] элемент в доказательство.

Удобнее всего сформулировать доказательство в терминах общих рядов Дирихле, и для этого я докажу следующую общую теорему. Предположим,

(i) что

$$f(s) = \sum a_n n^{-s} \tag{2.6.1}$$

является абсолютно сходящейся при $\sigma > 1$;

(ii) что $f(x)$ является регулярной на прямой $\sigma = 1$, за исключением простого полюса с вычетом 1 при $s = 1$;

(iii) что

$$f(\sigma + it) = O\big(|t|^{\alpha}\big), \tag{2.6.2}$$

где $\alpha < 1$ при $\sigma \geqslant 1$ и больших $|t|$;

(iv) что

$$a_n > -K, \tag{2.6.3}$$

где K – константа. Тогда

$$A(x) \sim x. \tag{2.6.4}$$

Запишем

$$A_1(x) = \int_0^x A(y)\,dy = \int_0^x A^*(y)\,dy.^2 \tag{2.6.5}$$

Из

$$A^*(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\frac{x^s}{s}\,ds \quad (c > 1)$$

[1] См. комментарий в конце лекции.

[2] $A(y)$ и $A^*(y)$ различаются лишь в изолированных точках.

при помощи интегрирования следует, что

$$A_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\, ds. \tag{2.6.6}$$

Также имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \zeta(s) \frac{x^s}{s}\, ds = x + O(1),^{1}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \zeta(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\, ds = \frac{1}{2}x^2 + O(x). \tag{2.6.7}$$

Вычитая (2.6.7) из (2.6.6), получим

$$A_1(x) - \frac{1}{2}x^2 + O(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\, ds, \tag{2.6.8}$$

где

$$g(s) = f(s) - \zeta(s); \tag{2.6.9}$$

и использование свойства непрерывности позволяет нам выбрать $c = 1$. Таким образом,

$$A_1(x) - \frac{1}{2}x^2 + O(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} g(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\, ds.^{2} \tag{2.6.10}$$

Теперь легко доказать, что

$$\zeta(s) = O\big(|t|^{\alpha}\big),^{3}$$

---

[1] А именно целая часть $[x]$, если x — не целое число, $x - \frac{1}{2}$ в противном случае.

[2] Мы должны вычесть (2.6.7) из (2.6.6) до того, как примем $c = 1$, поскольку $f(s)$ и $\zeta(s)$ обе имеют полюс при $s = 1$.

[3] Фактически $\zeta(s) = O\big(\log|t|\big)$: см. Ингам, 27 или Ландау, *Handbuch*, 169.

где $0 < \alpha < 1$, т. е. что $\zeta(s)$, и, следовательно, $g(s)$ удовлетворяют условию (iii) теоремы. Следовательно, интеграл в (2.6.10) имеет вид

$$x^2 \int_{-\infty}^{\infty} O\Big(\frac{|t|^\alpha}{1+t^2}\Big) x^{it}\, dt,$$

произведение x^2 на интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{it \log x}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{i\xi t}\, dt,$$

где $\int \big|H(t)\big|\, dt < \infty$. Такой интеграл стремится к 0, когда $\xi = \log x \to \infty$,[1] и поэтому

$$A_1(x) - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$$

или

$$A_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2. \tag{2.6.11}$$

2.7. Сейчас нам нужно перейти от (2.6.11) к (2.6.4). Для этого требуется «тауберово» доказательство, в данном случае, очень простого вида. Если

$$b_n = a_n - 1, \tag{2.7.1}$$

тогда

$$B(x) = \sum_{n \leqslant x} (a_n - 1) = A(x) - x + O(1),$$

$$B_1(x) = \int_0^x B(y)\, dy = A_1(x) - \frac{1}{2}x^2 + O(x),$$

и поэтому

$$B_1(x) = o(x^2); \tag{2.7.2}$$

и

$$b_n > -K - 1 = -L, \tag{2.7.3}$$

[1] По «теореме Римана – Лебега» о тригонометрических интегралах: см., к примеру, Титчмарш, *Fourier integrals*, II (теорема I).

скажем, ввиду (2.6.3) и (2.7.1). Нам нужно доказать, что

$$B(x) = o(x). \tag{2.7.4}$$

Предположим, что (2.7.4) ложно. Тогда существует положительное δ такое, что одно из неравенств

$$B(x) = \delta x, \quad B(x) < -\delta x \tag{2.7.5}$$

верно для произвольно больших значений x.

Возьмем, к примеру, первую гипотезу и предположим, что $B(\xi) > \delta\xi$. Тогда

$$B(x) - B(\xi) = \sum_{\xi < n \leqslant x} b_n > -L(x - \xi)$$

и

$$B(x) > \delta\xi - L(x - \xi) > \frac{1}{2}\delta\xi$$

для

$$\xi < x < \xi' = \Big(1 + \frac{\delta}{2L}\Big)\xi.$$

Следовательно,

$$B_1\Big(\xi + \frac{\delta\xi}{2L}\Big) - B_1(\xi) > \int_{\xi}^{\xi'} \frac{1}{2}\delta\xi \, dx = \frac{\delta^2}{4L}\xi^2.$$

Но это противоречит (2.7.2), поскольку каждое слагаемое в левой части равно $o(\xi^2)$.

Мы можем получить противоречие подобным образом[1] для второй гипотезы (2.7.5), и эти два противоречия докажут (2.7.4).

Чтобы получить теорему о простых числах, нам необходимо доказать, что функция (2.5.2) удовлетворяет условиям (ii), (iii) и (iv) из § 2.6. Последнее условие выполнено, поскольку $\Lambda(n) \geqslant 0$. Условие (ii) эквивалентно

$$\zeta(1 + it) \neq 0, \tag{2.7.6}$$

и (iii) утверждает гораздо больше. Проверка этих условий является наиболее сложной частью доказательства.

[1] Но с использованием интервала (ξ', ξ) слева от ξ.

2.8. В этом доказательстве (и во всех других доказательствах о простых числах) существует две части. Первая часть доказательства — полностью функционально-теоретическая. Мы показываем, что $\zeta(x)$ обладает определенными свойствами, и выводим асимптотическую формулу для

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x \psi(t)\,dt$$

или для какого-нибудь другого усреднения $\psi(x)$. Вторая часть — «тауберова». В различных доказательствах сложность распределяется по-разному между частями доказательства. В «классическом» доказательстве, набросок которого я привел выше, первая часть является трудной, а вторая — легкой; необходимо доказать лишь одну, очень простую «тауберову» теорему. Дальнейшие доказательства упрощали первую часть за счет второй.

Наиболее важное из современных исследований сделано, несомненно, Винером. Винер и его последователи показали, что мы можем вычеркнуть условие (iii) в общей теореме § 2.6. Нам по-прежнему потребуется (ii), в частности, в приложении к простым числам, по-прежнему нужно доказать (2.7.6), но нам не нужно вообще ничего знать о поведении $\zeta(s)$ в бесконечности. Давно говорилось, несколько неопределенно, что «теорема о простых числах эквивалентна утверждению, что $\zeta(s)$ не имеет нулей при $\sigma = 1$». Исследования Винера позволяют нам сейчас интерпретировать это утверждение буквально, и, разумеется, это является очень важным вкладом в понимание логики теории простых чисел.

Однако сейчас нам потребуется не обобщение Винера, «истинное» обобщение теоремы, а частичное обобщение, полученное мной и Литтлвудом в 1915 году. Эта частная теорема потеряла свое значение из-за ее замены теоремой Винера, но она — это то, что нам нужно для понимания работы Рамануджана.

Литтлвуд и я доказали сильную тауберову теорему: *если*

$$\sum a_n e^{-ny} \sim \frac{1}{y}, \tag{2.8.1}$$

когда $y \to 0$, *и*

$$a_n \geqslant 0, \tag{2.8.2}$$

тогда

$$A(x) \sim x.$$

Она имеет немедленное приложение к теореме о простых числах, поскольку, если мы можем доказать, что

$$\sum_2^\infty \Lambda(n) e^{-ny} \sim \frac{1}{y}, \tag{2.8.3}$$

из этого будет следовать, что $\psi(x) \sim x$. Поскольку

$$(1-e^{-y}) \sum a_n e^{-ny} = (1-e^{-y})^2 \sum (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) e^{-ny} =$$
$$= \frac{A(0) + A(1)e^{-y} + \ldots + A(n)e^{-ny} + \ldots}{1 + 2e^{-y} + \ldots + (n+1)e^{-ny} + \ldots}$$

и $1 - e^{-y} \sim y$, мы можем рассматривать

$$y \sum a_n e^{-ny}$$

как некоторое усреднение $A(n)/n$. Следовательно, функционально-теоретическое доказательство выражения (2.8.3) приведет к доказательству теоремы о простых числах, подтверждая мое общее описание.

Затем Литтлвуд и я продолжали следующим образом. Во-первых, мы доказали обобщение общей теоремы; мы показали, что условие (iii) может быть заменено на

$$f(\sigma + it) = O\big(e^{A|t|}\big) \tag{2.8.4}$$

для любой положительной константы A. Сейчас это, разумеется, не важно (поскольку в действительности никакого условия такого типа не требуется). Во-вторых, мы вывели (2.8.3), и, наконец, мы применим нашу тауберову теорему. Я хочу привлечь ваше внимание к (2.8.3), поскольку это также было первой целью Рамануджана.

2.9. Теперь я могу перейти к самому «доказательству» Рамануджана, которое он показал мне через некоторое время после своего прибытия в Англию. Я смогу сделать его более понятным, если позволю себе на время неправильно интерпретировать его цель.

Рамануджан пытался доказать не просто теорему о простых числах, не просто результат, подобный (2.5.6), который является истинным по гипотезе Римана, а намного более точный результат, о котором мы знаем, что он неверен. Он совершил определенную и очень любопытную ошибку: его доказательство является не просто «нестрогим», но, и в более сильном смысле, «необоснованным», и я хочу ясно показать, в чем заключается его ошибка. Я могу сделать это легче и не совершу ни малейшей неточности, если буду рассказывать, как будто его цель была ограничена доказательством теоремы о простых числах.

Рамануджан записал

$$\phi(y) = \sum_p \log p \sum_{m=1}^{\infty} e^{-p^m y} - \log 2 \sum_{m=1}^{\infty} 2^m e^{-2^m y} = \phi_1(y) - \phi_2(y) \quad (2.9.1)$$

и собирался сначала доказать, что

$$\phi_2(y) \sim \frac{1}{y}. \quad (2.9.2)$$

Он не использовал обозначений $\Lambda(n)$, но в действительности

$$\phi_1(y) = \sum_2^{\infty} \Lambda(n) e^{-ny}, \quad (2.9.3)$$

поэтому теорема о простых числах действительно будет следовать из (2.9.2).

Затем он записал

$$\Phi(y) = \phi(y) - \phi(2y) + \phi(3y) - \ldots = \Phi_1(y) - \Phi_2(y), \quad (2.9.4)$$

где Φ_1 и Φ_2 — функции, относящиеся к ϕ_1 и ϕ_2 как Φ относится к ϕ. Тогда

$$\Phi_1(y) = \sum_p \log p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-p^m y}}{1 + e^{-p^m y}} = \sum_2^{\infty} \Lambda(n) \frac{e^{-ny}}{1 + e^{-ny}} \quad (2.9.5)$$

и

$$\Phi_2(y) = \log 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m e^{-2^m y}}{1 + e^{-2^m y}} = 2 \log 2 \frac{e^{-2y}}{1 - e^{-2y}}, \tag{2.9.6}$$

ввиду простого тождества $\frac{2}{e^{2y}+1} + \frac{4}{e^{4y}+1} + \frac{8}{e^{8y}+1} + \ldots = \frac{2}{e^{2y}-1}$.

2.10. Теперь Рамануджан производит преобразование $\Phi_1(y)$. Имеем

$$\Phi_1(y) = \Psi_1(y) - 2\Psi_2(2y), \tag{2.10.1}$$

где

$$\Psi_1(y) = \sum \Lambda(n) \frac{e^{-ny}}{1 - e^{-ny}}. \tag{2.10.2}$$

Но

$$\Psi_1(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-mny} = \sum_{2}^{\infty} c_k e^{-ky}, \tag{2.10.3}$$

где

$$c_k = \sum_{n|k} \Lambda(n). \tag{2.10.4}$$

Также, если $k = \Pi p^a$,

$$\sum_{n|k} \Lambda(n) = \sum_{p|k} a \log p = \sum_{p|k} \log p^a = \log k.^1$$

Следовательно,

$$\Psi_1(y) = \sum_{2}^{\infty} \log k e^{-ky}$$

и

$$\Phi_1(y) = \sum_{2}^{\infty} \log k e^{-ky} - 2 \sum_{2}^{\infty} \log k e^{-2ky} =$$

$$= \sum_{2}^{\infty} \log k e^{-ky} - 2 \sum_{2}^{\infty} \log 2k e^{-2ky} + 2 \log 2 \sum_{2}^{\infty} e^{-2ky} =$$

$$= e^{-y} \log 1 - e^{-2y} \log 2 + e^{-3y} \log 3 - \ldots + 2 \log 2 \frac{e^{-2y}}{1 - e^{-2y}}. \tag{2.10.5}$$

[1] Поскольку мы должны считать $\log p$ для каждого из делителей $p, p^2, \ldots, p^a$.

Объединяя (2.9.6) и (2.10.5), мы получим

$$\Phi(y) = e^{-y}\log 1 - e^{-2y}\log 2 + e^{-3y}\log 3 - \dots \tag{2.10.6}$$

Теперь Рамануджан заключает, что

$$\Phi(y) \to l,^{1} \tag{2.10.7}$$

или

$$\phi(y) - \phi(2y) + \phi(3y) - \dots \to l, \tag{2.10.8}$$

для некоторого l. Он не приводит доказательств, но заключение верно и легко доказывается[2]. Вплоть до этого момента его доказательство, хотя и записано в менее удобных обозначениях, чем использованные мною, является вполне обоснованным.

Затем Рамануджан выводит из (2.10.8), что

$$\phi(y) \to l. \tag{2.10.9}$$

Если бы его целью было доказательство теоремы о простых числах, то все, что ему бы потребовалось — лишь более слабое заключение, что

$$\phi(y) = o\Big(\frac{1}{y}\Big), \tag{2.10.10}$$

и мы можем продолжить его доказательство, как если бы он утверждал не больше чем это. Затем он утверждает, что

$$\phi_2(y) = \log 2 \sum_{1}^{\infty} 2^m e^{-2^m y} \sim \frac{1}{y}, \tag{2.10.11}$$

и из (2.10.10) и (2.10.11) он выводит, что

$$\phi_1(y) = \phi(y) + \phi_2(y) \sim \frac{1}{y}, \tag{2.10.12}$$

---

[1] Я использую l для обозначения предела (не обязательно одного и того же в различных контекстах).

[2] К примеру, ряд

$$\log 1 - \log 2 + \log 3 - \dots$$

является суммируемым в $(C, 1)$. Сумма равна $-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\pi$.

что является (2.8.3). Что он в действительности заявляет и претендует на вывод этого утверждения из (2.10.9), это то, что

$$\phi_1(y) = \frac{1}{y} + O(1) \tag{2.10.13}$$

или, по крайней мере,

$$\phi_1(y) = \frac{1}{y} + O(y^{-\delta}) \tag{2.10.14}$$

для любого положительного δ.

Теперь (2.8.3) — истинно, как я сказал, это промежуточная стадия в доказательстве «Харди–Литтлвуда», и из (2.8.3) мы можем вывести теорему о простых числах «элементарными» средствами, т. е. аргументами, которые не используют понятие аналитической функции комплексной переменной. Если Рамануджан действительно доказал (2.10.12), то из этого следует, что он получил элементарное доказательство теоремы о простых числах, доказательство, совсем не использующее теорию функций. В частности, ему совсем не понадобилось (2.7.6). Разумеется, этого достаточно для того, чтобы убедить любого читателя, знающего эту тематику, что доказательство не может быть верным. И, действительно, Рамануджан получил верное заключение из двух ложных предпосылок, предпосылки (2.10.11) и предпосылки, что (2.10.8) влечет (2.10.10).

2.11. Я собираюсь показать ложность этих двух предложений одновременно. Во-первых, (2.10.8) не влечет (2.10.10) и также не влечет (2.10.9). Предположим, к примеру, что

$$\chi(y) = y^{-1-ai}.$$

Тогда

$$\chi(y) - \chi(2y) + \chi(3y) - \ldots = y^{-1-ai}(1 - 2^{-1-ai} + 3^{-1-ai} - \ldots) - \\ - (1 - 2^{-ai})\zeta(1 + ai)y^{-1-ai},$$

которое равно 0, если

$$a = \frac{2k\pi}{\log 2};$$

но $y\chi(y)$ осциллирует, что противоречит утверждению Рамануджана. Верно, что $\chi(y)$ не является степенным рядом по e^{-y}, как $\phi_2(y)$ у Рамануджана, но мы можем найти такие ряды, которые имитируют поведение $\chi(y)$ так близко, насколько нам это нужно, и утверждение не может быть реабилитировано оговорками такого рода.

Совершенно естественно, что доказательство Рамануджана должно содержать изъяны такого рода там, где его инстинкты вводят его в заблуждение о правильности трудных общих теорем. Существуют истинные тауберовы теоремы, которые имеют некоторое поверхностное сходство с той, которую я только что опроверг, надо знать много тонкостей и иметь большой опыт для того, чтобы отличить истинное от ложного. Его вторая ошибка гораздо более удивительна, поскольку ожидалось, что он окажется прав о поведении специальной функции, подобной $\phi_2(y)$.

Похоже, что его ввела в заблуждение «интегральная аналогия». Интегральный аналог ряда (2.10.11) равен

$$\log 2 \int_0^\infty 2^x e^{-2^x y} dx, \tag{2.11.1}$$

и

$$\int_0^\infty 2^x e^{-2^x y} dx = \frac{1}{\log 2} \int_1^\infty e^{-yz} dz = \frac{e^{-y}}{y \log 2} \sim \frac{1}{y \log 2},$$

поэтому поведение (2.11.1) именно такое, какое он приписывает (2.10.11). Но (2.10.11) ведет себя по-другому и имеет «волны» порядка $1/y$.

Мы можем опровергнуть утверждение Рамануджана многими способами. Во-первых, если бы (2.10.11) было верно, то из этого бы следовало (по тауберовой теореме Харди – Литтлвуда), что

$$\sum_{2^n \leqslant x} 2^n \sim \frac{x}{\log 2}.$$

Это просто не верно, поскольку ряд практически удваивается, когда x переходит через значение 2^m.

Следующее доказательство является более прямым. Функция $\phi_2(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\phi_2(y) - 2\phi_2(2y) = 2e^{-2y} \log 2.$$

Можно также сразу проверить, что

$$\psi_2(y) = -\log 2 \sum_0^\infty \frac{(-1)^r y^r}{r!} \frac{2^{r+1}}{2^{r+1}-1}$$

удовлетворяет

$$\psi_2(y) - 2\psi_2(2y) = 2e^{-2y}\log 2,$$

и поэтому

$$h(y) = \phi_2(y) - \psi_2(y)$$

удовлетворяет

$$h(y) - 2h(2y) = 0.$$

Также $yh(y)$ не является константой[1].

Теперь, если мы запишем

$$yh(y) = H(\log y),$$

тогда

$$H(\log y) = H(\log y + \log 2),$$

поэтому H является периодической и не константой. Следовательно, $yh(y)$ не стремится к пределу, также как и $y\phi_2(y)$.

Наконец, мы можем при желании проявить «волны» в формуле. Мы можем доказать, что

$$\phi_2(y) = \frac{1}{y} - \log 2 \sum_0^\infty \frac{(-1)^r y^r}{r!} \frac{2^{r+1}}{2^{r+1}-1} - \frac{1}{y} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \Gamma\Big(\frac{1+2k\pi i}{\log 2}\Big) y^{-2k\pi i/\log 2}, \tag{2.11.2}$$

где штрих у знака суммы означает исключение значения $k = 0$ и последний ряд явно показывает волны порядка $1/y$. Ряд быстро сходится, и волны малы по сравнению с доминирующим слагаемым.

Происхождение ряда Римана

2.12. К этому моменту должно быть ясно, что доказательство Рамануджана теоремы о простых числах было совершенно неверным.

[1] $\psi_2(y)$ — мероморфная функция, тогда как $\phi_2(y)$ имеет барьер вдоль мнимой оси. Этот момент также может быть обоснован с помощью вычислений.

Его ошибки были фундаментальными, он был не прав, не просто потому что не мог предоставить необходимую «строгость», но потому что путь, по которому он пошел, не подтверждался фактами. Я хотел бы сказать, что, «за исключением строгости», он обнаружил доказательство Харди–Литтлвуда, но я не могу этого сделать.

Рамануджан не мог доказать истинную теорему о простых числах, и, естественно, он не мог доказать ложные (2.3.1) или (2.3.2). Позднее я расскажу кое-что о способе, который он использовал для того, чтобы вывести их из (2.10.13), но сначала я должен сделать несколько замечаний о статусе ряда $R(x)$ в ортодоксальной теории.

В теории существуют две цели. Одна из них заключается в том, чтобы доказать теорему о простых числах или некоторое ее обобщение. Вторая цель — найти *точное* аналитическое выражение для $\pi(x)$ или для одной из связанных с ней функций, выражение, которое может случайно дать аппроксимацию $\pi(x)$, но которое ищется само по себе. Риман (который никогда даже не упоминал теорему о простых числах) пытался решить вторую задачу.

Легко увидеть, как такие тождества могут быть выведены из интеграла (2.5.4). Естественно предположить, что интеграл равен сумме вычетов во всех полюсах слева от линии интегрирования. Они легко вычисляются, и мы получаем формулу

$$\psi^*(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big). \tag{2.12.1}$$

Здесь первое слагаемое возникает из $s = 1$, как и в (2.5.4), и последнее слагаемое — из «тривиальных» нулей. Довольно просто вывести формулу для функции $\Pi(x)$, определенной выражением (2.5.8). Если $\Pi^*(x)$ относится к $\Pi(x)$ как $\psi^*(x)$ к $\psi(x)$, тогда

$$\Pi^*(x) = \operatorname{li} x - \sum_\rho \operatorname{li} x^\rho + \int_x^\infty \frac{du}{(u^2-1)u\log u} - \log 2. \tag{2.12.2}$$

Определение $\operatorname{li} z$ должно быть, соответственно, расширено, чтобы включать в себя комплексные z.

Перейдем от $\Pi(x)$ к $\pi(x)$ по одной из «формул обращения», связанной с функцией Мёбиуса. Если

$$g(\xi) = \sum_{n=1}^\infty f\Big(\frac{\xi}{n}\Big),$$

тогда (подлежит определенным оговоркам по вопросу сходимости)

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) g\Big(\frac{\xi}{n}\Big).$$

Из этого и из (2.5.8)[1] следует, что

$$\pi(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \Pi(x^{1/n}), \tag{2.12.3}$$

и если мы проигнорируем разницу между Π и Π^* и заменим $\Pi(x^{1/n})$ в каждом слагаемом в (2.12.3) на $\operatorname{li} x^{1/n}$, мы получим $R(x)$. При этом отбрасываются все слагаемые в (2.12.2), за исключением ведущего слагаемого, то есть, в сущности, игнорируются нули $\zeta(s)$.

Точное доказательство (2.12.1) и (2.12.2) дано в учебниках. Риман (чье доказательство не является точным) доказывал совершенно другим способом. Во-первых, он заметил, что

$$\int_0^{\infty} \Pi(x) x^{-s-1} dx = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} x^{-s} d\Pi(x) = \frac{1}{s} \sum_{p,\, m} \frac{1}{m p^{ms}} = \frac{\log \zeta(s)}{s} \tag{2.12.4}$$

при $\sigma > 1$. Из этого следует, по «формуле обращения Мелина», что

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\log \zeta(x)}{s} x^s \, dx, \tag{2.12.5}$$

если $c > 1$.[2]

Если

$$s = \frac{1}{2} + iz, \tag{2.12.6}$$

то

$$\xi(z) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\Big(\frac{1}{2}s\Big) \zeta(s) \tag{2.12.7}$$

---

[1] Возьмем $f(\xi) = \xi\pi(e^{\xi})$, $g(\xi) = \xi\Pi(e^{\xi})$.

[2] Риман принял $s = c+it$ и выразил (2.12.4) в виде интеграла Фурье с множителем

$$e^{-it \log x},$$

затем сослался на формулы Фурье. Эти два доказательство формально эквивалентны.

является целой функцией z. Ее нули даются соотношением

$$s = \rho, \quad z = -i\Big(\rho - \frac{1}{2}\Big) = \tau. \tag{2.12.8}$$

Они лежат симметрично относительно начала координат и являются вещественными, если верна гипотеза Римана и

$$\xi(z) = \xi(0) \prod_{\tau} \Big(1 - \frac{z^2}{\tau^2}\Big). \tag{2.12.9}$$

Из (2.12.7) и (2.12.9) мы получим

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) = &- \log(s-1) - \log \Gamma\Big(\frac{1}{2}s + 1\Big) + \frac{1}{2} s \log \pi + \\ &+ \log \xi(0) + \sum \log\Big\{1 + \frac{\Big(s - \frac{1}{2}\Big)^2}{\tau^2}\Big\}; \end{aligned} \tag{2.12.10}$$

Риман подставляет (2.12.10) в (2.12.5) и по отдельности оценивает слагаемые получившегося ряда. Доминирующее слагаемое в (2.12.2) получается из слагаемого $-\log(s-1)$.

В доказательстве есть пробелы, самым важным из них является отсутствие любого удовлетворительного доказательства (2.12.9). Это стало возможным лишь намного позже, в связи с работами Адамара по целым функциям. Но я хочу обратить ваше внимание, в частности, на то, что нигде нет явного использования теоремы Коши. Формальная машинерия Римана, его почленное интегрирование рядов, его использование теоремы Фурье в доказательстве (2.12.5) и его вычисление конкретных определенных интегралов — все это было понятно и очень симпатично Рамануджану.

2.13. Я вернусь к доказательству Рамануджана. Мы можем записать (2.8.3) или (2.9.2) как

$$\int_0^\infty e^{-yz} d\psi(z) \sim \frac{1}{y} \tag{2.13.1}$$

(хотя Рамануджан не использовал этих обозначений), и из этих предложений мы можем вывести теорему о простых числах. Рамануджан

думал, что он может доказать намного больше, а именно (2.10.13) или (2.10.14), которые могут быть представлены в виде

$$\int_0^\infty e^{-yz}d\psi(z) = \frac{1}{y} + O(1) \tag{2.13.2}$$

или

$$\int_0^\infty e^{-yz}d\psi(z) = \frac{1}{y} + O(y^{-\delta}). \tag{2.13.3}$$

Из них он выводил

$$\psi(x) - x = O(1) \quad (\text{или } O(x^\delta)), \tag{2.13.4}$$

и переход к

$$\pi(x) - R(x) = O(1) \quad (\text{или } O(x^\delta)) \tag{2.13.5}$$

был легким. Но его доказательство здесь является необоснованным, и его невозможно исправить. Можно продемонстрировать, что все (2.13.2)–(2.13.5) неправильны и переход от (2.13.2) или (2.13.3) к (2.13.4) также неверный. Не существует теорем, которые позволяли бы нам делать заключения такого рода. И я не думаю, что стоит вдаваться более подробно в детали рассуждений Рамануджана. Но один упрек ни в коей мере не может быть высказан по поводу доказательства Рамануджана. При всей своей необоснованности, оно не является «тупым». Рамануджан никогда не был тупым. Оно содержит очень интересную идею, которая после отбрасывания лишнего заняла свое место в теории.

Вопрос об оригинальности работ Рамануджана

2.14. Что бы вы ни думали о доказательстве Рамануджана, вы согласитесь, что его формальные идеи были прекрасны, и, разумеется, вас интересует, все ли они принадлежат ему. В частности, действительно ли он самостоятельно открыл ряд Римана?

Мое собственное мнение состоит в том, что он это сделал. Существует, однако, всего одна книга, в которой он имел возможность увидеть этот ряд. В библиотеке Мадраса имелась копия *Теории чисел* Матьюза, и эта книга содержит (недостаточно критическое) изложение анализа Римана. Похоже, стоит рассмотреть, какие книги важные для него и доступные в Мадрасе, возможно, изучил Рамануджан.

Там имелись пять книг, которые были бы особенно важны для Рамануджана. *Современный анализ* Уиттекера (опубликованный в 1902 году), *Бесконечные ряды* Бромвича (1908), трактаты по эллиптическим функциям Мэтьюза, Кейли и Гринхилла. По моему мнению, он видел, по крайней мере, одну, возможно, обе из последних двух книг, но ни одной из первых трех. У меня нет сейчас соображений, как такое могло случиться, и мое мнение базируется лишь на внутреннем убеждении, но кажется, что никакая другая гипотеза не подходит.

Во-первых, Рамануджан *не мог* видеть книги Уиттекера, поскольку он не знал теоремы Коши. По той же причине, разумеется, он не мог видеть *Теории функций* Форсита. Это важно, поскольку показывает, что имелись «очевидные» книги, которые Рамануджан никогда не видел, хотя они, определенно, были доступны в Мадрасе.

Свидетельство о книге Бромвича является не столь убедительным, но я не могу поверить в то, что Рамануджан видел эту книгу. Его сильно интересовали расходящиеся ряды, и он составил о них свою собственную «теорию». В книге Бромвича этой теме посвящена длинная и интересная глава, которая бы очаровала Рамануджана. Но Рамануджан никогда не показывал знания суммируемости по Чезаро, или по Борелю, или других стандартных методов. Из пассажей в его письмах становится ясно, что у него не было представления о том, что существует какая-либо теория расходящихся рядов.

Таким образом, я не думаю, что Рамануджан был знаком с книгами Уиттекера или Бромвича, но очевидно, что он прочел какую-то книгу по эллиптическим функциям. Я согласен с Литтлвудом, что, вероятно, это была книга Гринхилла. Он никогда не ссылался на книги, но он никогда не говорил про какую-либо из стандартных теорем, что она принадлежит ему. Он утверждает, что расширил теорию в различных направлениях, что он и сделал, но не утверждает, что изобрел эллиптические интегралы, тета-функции или модулярные уравнения. Все эти понятия он рассматривает как части общего знания. Его собственные знания были примечательны как по глубине, так и по ограниченности, и как глубина, так и ограниченность превосходно подходят к гипотезе, что они основаны на стимулирующей, но эксцентричной книге Гринхилла[1].

[1]В которой мы впервые узнаем на стр. 258 о том, что эллиптические функции являются двоякопернодическими.

С другой стороны, про теоремы о простых числах Рамануджан вполне определенно утверждает, что они принадлежат ему (хотя, разумеется, позднее он признал свои ошибки и изучил основы установленной теории). Для любого, кто хорошо знал Рамануджана, этого достаточно для того, чтобы сделать выводы, но гипотеза о полной независимости результатов Рамануджана -- это единственная гипотеза, которая, по моему мнению, не противоречит фактам.

Во-первых, если Рамануджан когда-либо видел книгу Мэтьюза, то как он мог быть столь невежественным относительно классической теории квадратичных форм, которую Мэтьюз столь тщательно обсуждает и которая составляет почти половину его книги? Ряды для числа классов, в частности, очаровали бы Рамануджана, и с уверенностью можно сказать, что он тщательно изучил бы ее.

Но наиболее убедительным свидетельством является сама глава книги Мэтьюза, посвященная простым числам. Она, несмотря на дефекты, содержит вполне адекватное описание мемуара Римана. Она надлежащим образом выделяет великое открытие Римана о том, что теория простых чисел зависит от «комплексных» свойств $\zeta(s)$ и, в частности, от расположения нулей. Комплексные нули $\zeta(s)$ доминируют в анализе, как и должно быть в любом изложении работы Римана. У Рамануджана не было точного представления об аналитических функциях, но он достаточно хорошо знал, что уравнение может иметь бесконечное множество комплексных корней, и он мог следить за доказательством без проблем. Невероятно то, что, увидев эту главу, он продолжил бы строить теорию, в которой «все нули $\zeta(s)$ были вещественными».

Следовательно, мое заключение состоит в том, что вся эта работа Рамануджана с ее вспышками вдохновения и грубыми ошибками была индивидуальным и самостоятельным достижением. Никакая другая гипотеза не кажется мне верной или имеющей какой-либо математический или психологический смысл.

В заключение я хочу сказать следующее. До Римана никто, насколько мне известно, не получал выражения для $R(x)$, и если Рамануджан обнаружил этот ряд самостоятельно, то это может показаться выдающимся достижением. Далее Гаусс остановился на $\operatorname{li} x$.

Однако в этом есть некоторая опасность преувеличения. Если мы увидим, что

$$\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots$$

играет более «естественную» роль в теории, чем сама $\pi(x)$, также как $\psi(x)$ играет более естественную роль, чем $\vartheta(x)$, если мы осознаем, что $\Pi(x)$ «естественно соответствует» $\operatorname{li} x$ и если нам известна формула обращения Мёбиуса, тогда, когда мы перейдем обратно от $\Pi(x)$ к $\pi(x)$ по этой формуле, ряд $R(x)$ неизбежно проявит себя. Все эти идеи были известны Чебышеву, и не было причины, по которой он не мог записать $R(x)$, хотя он, похоже, никогда не сделал этого. Рамануджан также знал все эти вещи, что представленное мной доказательство достаточно ясно показывает, и все, что он делал, как бы мы не судили об этом, вполне разумно.

Комментарии к лекции II

Эта лекция является переработанным и дополненным изданием лекции, прочитанной в Лондонском Математическом обществе 18 февраля 1937.

§ 2.1. Письма полностью напечатаны в *Сборнике трудов*, xxiii–xxix и 349–352. В то время, когда были написаны письма, Айяр (Narauana Aiyar) (**1**) опубликовал основные утверждения Рамануджана в журнале *Индийского математического общества*.

Я изменил обозначения Рамануджана для удобства ссылок: он использовал e^a вместо x и a вместо y в (2.1.1), n вместо x в (2.1.3) и (2.1.4) и μ вместо c в (2.1.4). Он также писал S_{t+1} вместо $\zeta(t+1)$.

Рамануджан полагал, что $\rho(x) \to \infty$, когда $x \to \infty$, что не верно, как доказал Литтлвуд в 1914 году. Доказательство Литтлвуда является сложным, его можно найти в книге Ингама гл. 5 или в Ландау *Vorlesungen*, ii, Кар. 11. Аналогичные утверждения о простых числах в арифметических прогрессиях в конце отрывка, цитируемого из второго письма, также неверны.

§ 2.2. О ряде (2.2.1) см. Грам (Gram), *Skifter d. K. Danske Videnskabernes Selskab* (6), 2 (1884), 185–308 (212, 295).

Об истории (2.2.2) и (2.2.3) см. Ландау *Handbuch*, 567–574. То, что теорема о распределении простых чисел может быть выведена из (2.2.2) с помощью «элементарных» рассуждений (т. е. с помощью рассуждений, не зависящих от теории функции комплексного переменного), было впервые доказано Ландау, *Wiener Sitzungsberichte*, 120 (1911), 973–988; *Handbuch* содержит лишь вывод из (2.2.3).

Согласно Солднеру (Soldner) $\operatorname{li} x = 0$ при $x = 1{,}4513692346\ldots$, и, вероятно, это настоящее значение константы Рамануджана c.

О (2.2.5) см. Бромвич, *Бесконечные ряды*, 2-е издание, 334.

Чтобы доказать (2.2.7), заметим, что

$$h(-y) = 1 + \sum \frac{(-1)^n y^n}{n \cdot n! \zeta(n+1)} = 1 + \sum_m \frac{\mu(m)}{m} \sum_n \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \Big(\frac{y}{m}\Big)^n =$$

$$= 1 - \sum \frac{\mu(m)}{m} \int_0^{y/m} \frac{1 - e^{-u}}{u}\, du = -\sum \frac{\mu(m)}{m} \Big(\int_0^{y/m} \frac{1 - e^{-u}}{u} du + \log m \Big) =$$

$$= \sum \frac{\mu(m)}{m} \chi(y, m), \quad (1)$$

скажем, с помощью (2.2.3). Теперь

$$\chi(y, m) - \chi(y, m+1) = -\int_{y/(m+1)}^{y/m} \frac{1 - e^{-u}}{u}\, du - \log \frac{m}{m+1} =$$

$$= \int_{y/(m+1)}^{y/m} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \omega(y, m).$$

Если мы запишем

$$\sum_1^m \frac{\mu(k)}{k} = g(m)$$

и частично просуммируем последний ряд в (1), то получим

$$h(-y) = \sum g(m) \omega(y, m).$$

Известно, что

$$g(m) = O\Big\{ \frac{1}{(\log m)^2} \Big\}; \quad (2)$$

и

$$0 < \omega(y, m) \leqslant \frac{y}{m(m+1)} \frac{m+1}{y} e^{-y/(m+1)} \leqslant \frac{1}{m}.$$

Следовательно, ряд мажорируется величиной, кратной

$$\sum \frac{1}{m(\log m)^2},$$

и равномерно сходится при всех y. Наконец, все слагаемые стремятся к 0.

О (2) и более сильных результатах см. Ландау *Handbuch*, 594–597. Доказательство (2.2.8) см. в Харди (**3**).

§ 2.3. O (2.3.3), которая следует из гипотезы Римана, см. Ингам, 83 (теорема 30) или Ландау *Handbuch*, 378–388. О ложности (2.3.4), которую гораздо легче доказать, чем для (2.3.5) или для других ложных утверждений § 2.3, см. Ингам, 90 (теорема 32) или Ландау *Handbuch*, 711–719.

Чтобы вывести (2.3.4) из (2.3.2), заметим, что

$$R(x) - \operatorname{li} x + \tfrac{1}{2}\operatorname{li} x^{1/2} = O\Big\{\sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(\log x)^p}{p\cdot p!\, m^p}\Big\} =$$

$$= O\Big\{\log x\sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\Big(\frac{\log x}{3}\Big)^p\Big\} = O\big(x^{1/2}\log x\big).$$

Таблица взята из намного более полной таблицы в книге Д. Н. Лемера (D. N. Lehmer) *Список простых чисел от* 1 *до* 10 006 721 (Вашингтон, 1914) за исключением значений $\operatorname{li} 10^8$ и $\operatorname{li} 10^9$, которые я взял из книги Ингама. Значения $\pi(x)$ на 1 меньше, чем в книге Лемера, поскольку он считает 1 простым числом. Значения за пределами таблицы множителей были найдены Мейсселем (Meissel) в серии статей в *Math. Annalen*, последняя из которых появилась в 25-м томе (1885), 251–257 и в дальнейшем была подтверждена Бертельсеном (Bertelsen). Метод Мейсселя является переработкой «решета» Эратосфена: см. Мэтьюз гл. 10. Изложение работы Бертельсена находится в статье Грама *Acta math.* 17 (1893), 301–314.

Длинное и интересное эссе по этим темам находится во введении в книге Дж. Глаймера (J. Glaisher) *Таблица множителей для шестого миллиона* (Лондон 1883). Монография Торелли (Torelli) *Sulla totalitá dei numeri primi fino ad un limite assegnato* (Неаполь 1901) также содержит много интересной информации.

§ 2.4. Доказательства теорем Чебышева находятся в Ингаме, в обоих книгах Ландау и в Харди и Райте, гл. 22.

§ 2.5 – 2.7. В этой книге нет доказательства теоремы о распределении простых чисел, хотя § 2.6 – 2.7 содержат набросок доказательства Ландау, которое является более простым, чем оригинальное доказательство Адамара и де ла Валле-Пуссена. Чтобы завершить его, мы должны доказать, что

$$\Big|\frac{\zeta'(1+it)}{\zeta(1+it)}\Big| = O\big(|t|^{\alpha}\big) \tag{1}$$

при α меньших 1. Это, естественно, предполагает истинность (2.7.6), что доказано двумя способами в лекции IV(A). Более сильное предложение (1) может быть доказано с помощью развития первого доказательства (Адамара) выражения (2.7.6).

И трактат Ингама и *Handbuch* Ландау содержат (a) простейшие доказательства теоремы о распределении простых чисел (за исключением доказательства Винера, ссылка на которое находится в § 2.8) и (b) более проработанные доказательства намного более сильных теорем.

«Тауберова» теорема может быть определена как исправленная форма ложного обращения абелевой теоремы. «Абелева» теорема утверждает, что если последовательность функций ведет себя регулярно, то некоторое среднее от нее ведет себя регулярно. Так,

$$A(x) \sim x$$

влечет

$$A_1(x) = \int_0^x A(t)\,dt \sim \frac{1}{2}x^2.$$

Эта абелева теорема верна для любого $A(x)$ и, в частности, для $A(x)$ в тексте. Обратное неверно, но становится верным, когда мы накладываем на $A(x)$ подходящее дополнительное условие, здесь полученное из (2.6.3).

Первой тауберовой теоремой было обращение Таубером (Tauber) теоремы Абеля о непрерывности степенного ряда: см., к примеру, Бромвич, *Бесконечные ряды*, 2-е издание, 256. Поскольку

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \frac{a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 + \ldots}{1 + x + x^2 + \ldots}.$$

Предел ряда равен пределу некоторого среднего из a_0, a_0+a_1, $a_0+a_1+a_2$, ...

§ 2.8. То, что здесь названо доказательством Винера (Wiener) теоремы о распределении простых чисел, является доказательством «Винера - Икехара» (Ikehara), содержащимся в § 19 *et seq.* книги Винера *The Fourier integral* (Кембридж, 1933). Совершенно другое доказательство находится в § 17–18.

Доказательство было сильно упрощено Бохнером (Bochner) *Math. Zeitschrft*, 37 (1933), 1–9 и Ландау, *Berliner Sitzungberichte* (1932), 514–521. Версия Ландау представляет собой самое короткое из существующих доказательств теоремы о распределении простых чисел, но оно пока еще не появилось ни в одной книге. Версия в моих литографированных лекциях о «работах Рамануджана» (Institute for advanced study, 1936), в сущности, совпадает с бохнеровской.

О доказательстве Харди - Литтлвуда см. *Quarterly Journal of math* 46 (1915), 215–219 или *Acta Math.* 41 (1918), 119–196 (127–134). Простейшее доказательство нашей тауберовой теоремы дано Карамата (Karamata) в *Math. Zeitschrift*, 32 (1930), 319–320.

§ 2.10. Доказательство суммируемости $\log 2 - \log 3 + \ldots$ см. Бромвич *Бесконечные ряды*, издание 1, 351.

§ 2.11. Доказательство в конце параграфа было предложено мне много лет назад профессором Маклаганом Веддервурном (Maclagan Wedderburn), см. Харди *Quarterly Journal of math* 38 (1907), 269–288 (277).

Формула (2.11.2) может быть выведена с помощью дифференцирования из последней формулы на стр. 283 этой статьи (в которой должен быть изменен знак последнего слагаемого).

Рамануджан, когда я подверг сомнению истинность его утверждения, привел поразительную формулу

$$\phi_2(y) + \log 2\Big(1 - \frac{y}{3\cdot 1!} + \frac{y^2}{7\cdot 2!} - \frac{y^3}{15\cdot 3!} + \ldots\Big) = \frac{1}{y} + F(y),$$

где

$$yF(y) = 0{,}0000098844\cos\Big(\frac{2\pi\log y}{\log 2} + 0{,}872811\Big)$$

верно с точностью до 10 знаков после запятой. При этом явно приняты во внимание слагаемые, в которых $k = \pm 1$.

§ 2.12. Доказательства «явных формул» приведены в Ингаме, гл. 4 и Ландау *Handbuch*, Кар. 19. Собственное доказательство Римана воспроизведено в Мэтьюзе гл. 10.

Формулу обращения Мёбиуса см. в Харди и Райт, 234–237, или Ландау, *Handbuch*, 577–580.

§ 2.14. Рамануджан, похоже, начал свою теорию расходящихся рядов с рядов с положительными членами, таких как

$$1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \ldots \quad (s < 1),$$

и «определил» сумму такого ряда как константу формулы суммирования Эйлера–Маклорена. Но у него не было привычки давать строгие определения.

Лекция III
Круглые числа

3.1. Число описывается в популярной литературе как *круглое*, если оно является произведением значительного числа сравнительно малых сомножителей. Таким образом, $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, разумеется, будет называться круглым. Число $2187 = 3^7$ еще круглее, но это спрятано за десятичными обозначениями.

Общие наблюдения показывают, что *круглые числа встречаются очень редко.* Этот факт может быть проверен любым, у кого есть привычка разлагать на множители числа, такие как номера автомобилей или трамваев, которые возникают перед ним случайным образом. Оба, Рамануджан и я, наблюдали это явление, которое поначалу кажется несколько парадоксальным[1], и нам захотелось получить его математическое объяснение.

Мы тем самым поставили перед собой задачу определения «нормальной степени сложности» числа n. *Сколько простых множителей может оказаться в случайном большом числе* n?

3.2. Измерение «сложности» числа количеством его простых сомножителей является весьма естественным, и мы можем подсчитать эту сложность двумя способами, в зависимости от того, учитываем мы кратность множителей или нет. Предположим, что

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_\nu^{a_\nu} = \prod_1^\nu p_r^{a_r}, \tag{3.2.1}$$

где

$$p_1 < p_2 < \dots < p_\nu$$

[1] «Половина чисел делится на 2, третья часть чисел делится на 3, одна шестая часть чисел делится и на 2, и на 3 и т. д. Разумеется, тогда нам следует ожидать, что большинство чисел будут иметь *большое* количество множителей? Но факты, похоже, показывают противоположное.»

— стандартное разложение числа n в виде произведения простых чисел. Тогда

$$f(n) = \nu \tag{3.2.2}$$

— число различных простых сомножителей n и

$$F(n) = \sum_{1}^{\nu} a_r \tag{3.2.3}$$

— общее число простых сомножителей, посчитанных с учетом кратности, и любая из этих функций может быть приспособлена для измерения сложности n. Мы обнаружим, что выбор функции для измерения не приводит ни к каким важным различиям, и на данном этапе я буду рассматривать функцию $f(n)$.

3.3. Очевидно, что $f(n)$ не может быть «очень большой». В наихудшем случае или для самых круглых чисел, для которых $f(n)$ принимает наибольшие значения, по сравнению с другими n, это числа

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots p_\nu,$$

которые являются произведением первых ν простых чисел. Для этих чисел

$$f(n) = \nu = \pi(p_\nu)$$

и

$$\log n = \sum_{r \leqslant \nu} \log p_r = \vartheta(p_\nu).$$

Теперь

$$A\nu \log \nu < p_\nu < B\nu \log \nu \tag{3.3.1}$$

для констант A и B, и поэтому

$$\log p_\nu \sim \log \nu.$$

Следовательно,

$$\nu = f(n) = \log n \frac{\pi(p_\nu)}{\vartheta(p_\nu)} \sim \frac{\log n}{\log p_\nu} \sim \frac{\log n}{\log \nu} \tag{3.3.2}$$

и

$$\nu \sim \frac{\log n}{\log \log n}.$$

Таким образом, большое число n не может иметь больше этого числа простых множителей. Число порядка 10^7, последнее число в таблице, не может иметь больше 6 или 7, а число порядка 10^{80}, т. е. имеющее порядок числа Эддингтона, не может иметь более 30 простых сомножителей.

Общее число простых сомножителей может быть намного большим, так 10^{80} имеет 160, а $n = 2^k$ имеет

$$\frac{\log n}{\log 2}$$

простых сомножителей. Здесь между $f(n)$ и $F(n)$ возникает большое различие, но мы увидим в дальнейшем, что это исключительный случай.

3.4. Теорема, которую мы только что доказали для $f(n)$, это теорема о *всех* числах, а нас интересуют (в некотором смысле) «почти все». Функция

$$\frac{\log n}{\log \log n}$$

возрастает медленно, но ни в коем случае не настолько медленно, чтобы объяснить факты. Мы обнаружим, что если будем выбирать числа случайным образом из конца таблиц разложения на множители, то $f(n)$ обычно не 7 или 8, а 3 или 4; и мы обнаружим, что если таблицы могли бы быть продолжены до пределов числа Эддингтона, то в этом случае функция будет обычно равна не 30, а примерно 5 или 6. Число, подобное числу Скьюса[1], будет в общем случае иметь примерное число множителей, равное числу Эддингтона (это может помочь нам сформировать некоторое представление о его размере).

Нам нужно определение термина «почти все». Предположим, что P — это свойство числа n, выраженное предложением $P(n)$, что $N(x)$ — это количество чисел меньших x, для которых $P(n)$ ложно и что

$$N(x) = o(x).$$

Тогда мы будем говорить, что «почти все числа обладают свойством P». Грубо говоря, пропорция исключительных чисел n бесконечно мала.

[1] См. лекцию I, стр. 29.

Ответ на нашу задачу заключается в том, что *почти все числа n имеют примерно* $\log\log n$ *простых множителей.* Более точно, пусть дано ε, тогда *почти все числа имеют от* $(1-\varepsilon)\log\log n$ *до* $(1+\varepsilon)\log\log n$ *простых множителей.* Эта теорема верна для любого способа измерения числа множителей, и мы увидим, что ее можно сформулировать еще более точно.

3.5. Функция $\log\log n$ возникает из других соображений. Имеем

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{p|n} 1 = \sum_{pm\leqslant x} 1,^1$$

суммирование происходит по всем простым числам p и положительным целым числам m, удовлетворяющим неравенству, и при суммировании по m мы получаем

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \sum_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right] \tag{3.5.1}$$

или

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = x\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} + O(x), \tag{3.5.2}$$

поскольку при отбрасывании квадратных скобок может возникнуть ошибка, равная 1 в наихудшем случае. Но

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \log\log x + O(1), \tag{3.5.3}$$

и поэтому

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = x\log\log x + O(x). \tag{3.5.4}$$

Также

$$\sum_{n\leqslant x} F(n) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{p^\mu|n} 1 = \sum_{p^\mu m\leqslant x} 1$$

---

[1] $p|n$ означает, что «p делит n», поэтому $\sum_{p|n} 1$ означает, что мы прибавляем 1 для каждого простого делителя n. Аналогично, $\sum_{p^\mu|n} 1$ соответствует прибавлению 1 для каждого простого числа или степени простого числа, которые делят n.

(суммирование происходит по простым числам p и положительным целым μ и m), и поэтому

$$\sum_{n\leqslant x} F(n) = \sum_{p^\mu \leqslant x} \left[\frac{x}{p^\mu}\right] = \sum_{p\leqslant x} \left(\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \left[\frac{x}{p^3}\right] + \dots\right) \tag{3.5.5}$$

и

$$\sum_{p\leqslant x} \left(\left[\frac{x}{p^2}\right] + \left[\frac{x}{p^3}\right] + \dots\right) < x \sum_{p} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots\right) = x \sum_{p} \frac{1}{p(p-1)} = O(x). \tag{3.5.6}$$

Следовательно, мы также имеем

$$\sum_{n\leqslant x} F(n) = x \log\log x + O(x). \tag{3.5.7}$$

В частности,

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) \sim x \log\log x, \quad \sum_{n\leqslant x} F(n) \sim x \log\log x. \tag{3.5.8}$$

Далее, если $\phi(n)$ — некоторая простая возрастающая функция и

$$g(2) + g(3) + \dots + g(n) \sim \phi(2) + \phi(3) + \dots + \phi(n),$$ [1]

тогда естественно говорить, что «средний порядок $g(n)$ равен $\phi(n)$». И поскольку

$$\log\log 2 + \dots + \log\log n \sim n \log\log n,$$

средний порядок и $f(n)$, и $F(n)$ равен $\log\log n$.

3.6. Это интересная теорема, но она весьма отличается от той, которую мы хотели бы доказать. Мы хотим доказать, что $f(n)$ и $F(n)$ *обычно* примерно равны $\log\log n$. Если $g(n)$ равна $\log p \log\log p$, когда n является простым числом p, и 0 в противном случае, тогда

$$\sum_{n\leqslant x} g(n) = \sum_{p\leqslant x} \log p \log\log p \sim x \log\log x,$$ [2]

[1] Или $g(1) + \dots + g(n) \sim \phi(1) + \dots + \phi(n)$. Мы начали в этом случае с 2, поскольку $\log\log n$ не определен при $n = 1$.

и средний порядок $g(n)$ по-прежнему равен $\log\log n$; но $g(n)$ *обычно* равна 0 (поскольку «почти все» числа являются составными), поэтому *нормальный* порядок $g(n)$ равен 0. В нашей задаче средний и нормальный порядки оказались одинаковыми, но это является особенностью задачи.

3.7. Существует два доказательства нашей теоремы, наше исходное доказательство и еще одно, полученное много позже Тюраном. Доказательство Тюрана является очень простым и элегантным, и я приведу его позже, но сначала я вставлю набросок исходного доказательства, которое в некотором смысле больше наводит на размышления.

Нам нужно рассматривать лишь одну из двух функций, скажем, $f(n)$, поскольку $F(n) \geqslant f(n)$ и по (3.5.6)

$$\sum_{n\leqslant x}\{F(n)-f(n)\} = \sum_{p\leqslant x}\left(\left[\frac{x}{p^2}\right]+\left[\frac{x}{p^3}\right]+\dots\right) < Cx$$

для некоторых C. Если $N(x)$ — количество чисел, меньших x, для которых

$$F(n)-f(n) > G, \tag{3.7.1}$$

тогда

$$\frac{N(x)}{x} < \frac{C}{G},$$

эта величина мала, когда G велико, и количество чисел, для которых $F(n)-f(n) > \chi(n)$, где $\chi(n)$ — произвольная функция переменной n, которая возрастает до бесконечности, равно $o(x)$. В этом смысле «$F(n)-f(n)$ почти всегда ограничена».

Далее мы ограничимся изучением $f(n)$. Предположим, что $\omega_r(x)$ — количество чисел, не превосходящих x, для которых $f(n)=r$. Тогда

$$\omega_1(x) \sim \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Более обще, известно, что

$$\omega_r(x) \sim \frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{r-1}}{(r-1)\,!}. \tag{3.7.2}$$

---

[2] Поскольку

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leqslant x}\log p \sim x$$

и множитель $\log\log p$ добавляет еще один $\log\log x$.

Далее

$$[x] = \omega_1(x) + \omega_2(x) + \ldots + \omega_r(x) + \ldots \tag{3.7.3}$$

и

$$x = \frac{x}{\log x} e^{\log\log x} = \frac{x}{\log x}\left(1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \frac{\xi^{r-1}}{(r-1)!} + \ldots\right), \tag{3.7.4}$$

где

$$\xi = \log\log x \tag{3.7.5}$$

и формула (3.7.2) указывает на определенную аналогию между соответствующими слагаемыми двух рядов. Эта аналогия, разумеется, не может быть слишком близкой, поскольку первый ряд конечен, но соответствующие слагаемые заданной степени асимптотически эквивалентны при $x \to \infty$.

Наибольшим слагаемым в ряде

$$1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \ldots = \sum_1^\infty \frac{\xi^{r-1}}{(r-1)!}$$

будет слагаемое с $r = [\xi] + 1$.[1] Запишем (3.7.4) в виде

$$x = \frac{x}{\log x} \sum_r \frac{\xi^{r-1}}{(r-1)!} = \frac{x}{\log x} \sum_\mu \frac{\xi^{[\xi]+\mu-1}}{([\xi]+\mu-1)!}, \tag{3.7.6}$$

где μ принимает как положительные, так и отрицательные значения. По формуле Стирлинга,

$$\frac{\xi^{[\xi]+\mu-1}}{([\xi]+\mu-1)!} \sim \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{-\mu^2/2\xi},$$

если μ сравнительно мало по сравнению с ξ. Следовательно, правую часть (3.7.4) можно сравнить с

$$\frac{x}{\log x} \log x \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \sum e^{-\mu^2/2\xi} \tag{3.7.7}$$

[1] Когда ξ — целое число, тогда в ряде два одинаковых наибольших слагаемых.

или с

$$\frac{x}{\sqrt{2\pi\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2\xi} dt = x,$$

и той частью этого интеграла, для которой порядок t выше, чем $\sqrt{\xi}$, можно пренебречь. Таким образом, почти все значение суммы (3.7.4) дают слагаемые, для которой μ равно $O(\sqrt{\xi})$. Естественно предположить, что то же самое должно быть верно для (3.7.3), что практически все значение суммы дают слагаемые, для которых

$$|r - \xi| = |r - \log\log x|$$

имеет порядок

$$O(\sqrt{\xi}) = O\big(\sqrt{\log\log x}\big).$$

Как мы увидим чуть позже, это утверждение доказывает не только нашу теорему, но и намного больше.

Аргумент в представленном виде является грубым и неубедительным. Нам нужно доказать, что мы можем пренебречь большей частью слагаемых $\omega_r(x)$ в ряде (3.7.3), и для этого нам нужны неравенства, а не асимптотические равенства. Но эти неравенства могут быть получены без особых затруднений, и получаем следующее заключение: *если* $\chi(x)$ — *произвольная функция переменной* x *такая, что*

$$\frac{\chi(x)}{\sqrt{\log\log x}} \to \infty,$$

тогда для почти всех чисел, не превосходящих x, *количество простых множителей лежит между числами*

$$\log\log x \pm \chi(x).$$

Поскольку $\log\log x$ и $\log\log n$ практически неразличимы на большей части интервала $(1,\ x)$,[1] и это эквивалентно утверждению, что *для почти всех чисел* n *количество простых множителей лежит между числами*

$$\log\log n \pm \chi(n).$$

[1] Если $0 < c < 1$ и $x^c < n < x$, тогда $\log\log n$ лежит между

$$\log(c\log x) = \log\log x - \log(1/c)$$

и $\log\log x$.

3.8. Осталось добавить одно замечание перед тем, как я перейду к доказательству Турана. Асимптотические формулы (3.7.2) являются следствиями теоремы о простых числах, но завершающее доказательство является «элементарным». Нам нужно доказать, что «хвостами» ряда (3.7.3) можно пренебречь, и для этого мы воспользуемся неравенством

$$\omega_r(x) < A\frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x + C)^{r-1}}{(r-1)!}, \tag{3.8.1}$$

где A и C не зависят ни от x, ни от r. Доказательство основано на неравенстве Чебышева

$$\pi(x) < A\frac{x}{\log x}$$

и не требует применения теоремы о простых числах.

3.9. Доказательство теоремы, полученное Тураном, основано на тождествах (3.5.1), и

$$\sum_{n\leqslant x}\{f(n)\}^2 = \sum_{pp'\leqslant x,\, p'\neq p}\left[\frac{x}{pp'}\right] + \sum_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]. \tag{3.9.1}$$

Чтобы доказать (3.9.1), заметим, что левая часть равна

$$\sum_{n\leqslant x}\Bigl(\sum_{p\mid n}1\sum_{p'\mid n}1\Bigr) = \sum_{pm=p'm'\leqslant x}1 = \sum_{p\neq p',\, pp'\mu\leqslant x}1 + \sum_{pm\leqslant x}1.$$

Здесь p, p' — простые числа, m и μ — произвольные положительные целые числа, и диапазоны суммирования указаны в нижних индексах. Просуммировав последнюю сумму сначала относительно μ и m, мы получаем результат.

Далее, мы видели в § 3.5, что

$$\sum_{n\leqslant x}f(n) = \sum_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right] = x\log\log x + O(x). \tag{3.9.2}$$

Также

$$\sum_{pp'\leqslant x,\, p\neq p'}\left[\frac{x}{pp'}\right] = x\sum_{pp'\leqslant x}\frac{1}{pp'} + O(x);$$

мы можем отбросить ограничение $p \neq p'$, поскольку ряд $\sum p^{-2}$ сходящийся. Но

$$\Big(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p}\Big)^2 \leqslant \sum_{pp'\leqslant x}\frac{1}{pp'} \leqslant \Big(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\Big)^2, \tag{3.9.3}$$

поскольку $p \leqslant \sqrt{x}$ и $p' = \sqrt{x}$ влечет $pp' \leqslant x$ и $pp' \leqslant x$ влечет $p \leqslant x$ и $p' \leqslant x$, и каждая из двух крайних величин в (3.9.3) равна

$$\{\log\log x + O(1)\}^2 = (\log\log x)^2 + O(\log\log x).$$

Следовательно,

$$\sum_{pp'\leqslant x,\, p\neq p'}\Big[\frac{x}{pp'}\Big] = x(\log\log x)^2 + O(x\log\log x), \tag{3.9.4}$$

и из (3.9.1), (3.9.2) и (3.9.4) следует, что

$$\sum_{n\leqslant x}\{f(n)\}^2 = x(\log\log x)^2 + O(x\log\log x). \tag{3.9.5}$$

Наконец, записав ξ вместо $\log\log x$, как в (3.7.5), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\{f(n)-\xi\}^2 &= \sum_{n\leqslant x}\{f(n)\}^2 - 2\xi\sum_{n\leqslant x}\{f(n)\} + \xi^2\sum_{n\leqslant x}1 = \\ &= x\{\xi^2 + O(\xi)\} - 2\xi x\{\xi + O(1)\} + \xi\{x + O(1)\} = O(x\xi),\end{aligned} \tag{3.9.6}$$

в соответствии с (3.9.2) и (3.9.5). Но если

$$|f(n) - \xi| > \chi(x)$$

для более чем δx из n меньших x, то

$$\sum_{n\leqslant x}\{f(n)-\xi\}^2 > \delta x\chi^2,$$

что противоречит (3.9.6), если порядок χ выше чем $\sqrt{\xi}$, и это доказывает теорему.

3.10. Существует интересное следствие для числа $d(n)$ делителей числа n. Известно, что

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(n) \sim n \log n,$$

поэтому средний порядок $d(n)$ равен $\log n$. Каков нормальный порядок этой величины?

Если $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_\nu^{a_\nu}$, то

$$f(n) = \nu, \quad F(n) = \sum a_r, \quad d(n) = \prod (1 + a_r). \tag{3.10.1}$$

Также

$$2 \leqslant 1 + a \leqslant 2^a.$$

Следовательно,

$$2^\nu \leqslant \prod (1 + a_r) \leqslant 2^{\sum a_r} \tag{3.10.2}$$

или

$$2^{f(n)} \leqslant d(n) \leqslant 2^{F(n)}. \tag{3.10.3}$$

Поскольку и $f(n)$, и $F(n)$ обычно примерно равны $\log \log n$, то следовательно величина $d(n)$ обычно примерно равна

$$2^{\log \log n} = (\log n)^{\log 2} = (\log n)^{0{,}6\ldots}. \tag{3.10.4}$$

Мы еще не можем сказать, что «нормальный порядок величины $d(n)$ примерно равен $2^{\log \log n}$», поскольку неравенства, доказанные нами для величины $d(n)$, гораздо менее точные, чем неравенства, доказанные для $f(n)$,[1] но мы можем сказать более грубо, что нормальный порядок величины $d(n)$ «примерно равен $2^{\log \log n}$».

В этом случае нормальный и средний порядки не совпадают, $d(n)$ *обычно* намного меньше своего среднего порядка. Объяснение простое, $d(n)$ — слишком нерегулярна. Большая часть чисел имеет примерно $2^{\log \log n}$ делителей, но у некоторых чисел количество делителей

[1] Неравенства типа

$$2^{\log \log n - \chi(n)} < d(n) < 2^{\log \log n + \chi(n)},$$

Нормальный порядок $\log d(n)$ равен

$$\log 2 \log \log n.$$

очень велико, настолько велико, что эти необычные числа определяют среднее значение $d(n)$. Нерегулярности $f(n)$ и $F(n)$ не настолько велики, чтобы произвести подобный эффект.

Естественно задать тот же вопрос о $r(n)$, числе представлений n в виде суммы двух квадратов, но в этом случае сразу получаем ответ. Поскольку

$$r(1) + r(2) + \ldots + r(n) \sim \pi n,$$

то средний порядок $r(n)$ равен π. Нормальный порядок с другой стороны равен 0, поскольку большая часть чисел не представима в этом виде[1].

3.11. В завершение я упомяну о предположении, которое я сделал в 1936 году и которое с тех пор было доказано независимо Эрдёшом (Erdös) и Пиллаи (Pillai).

Асимптотическая формула (3.7.2) верна для всех фиксированных r, и естественно предположить, что это также верно, когда r является функцией переменной x, которая стремится к бесконечности достаточно медленно. Если это верно для

$$r = [\log\log x],$$

тогда простое применение теоремы Стирлинга приводит к формуле

$$\omega_r(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{\log\log x};$$

и во всяком случае мы можем надеяться доказать, что

$$\omega_r(x) > \frac{Ax}{\sqrt{\log\log x}} \tag{3.11.1}$$

для некоторого положительного A. Противоположное неравенство

$$\omega_r(x) < \frac{Ax}{\sqrt{\log\log x}}$$

[1] Только примерно

$$\frac{Ax}{\sqrt{\log x}}$$

из первых x чисел представимы в таком виде. См. лекцию IV(B). Средний порядок этой величины см. в лекции V, § 5.1.

(для некоторого A) является тривиальным следствием формулы (3.8.1). Однако мне удалось доказать, когда я сделал это предположение, лишь, что

$$\omega_r(x) > \frac{Ax}{(\log\log x)^{5/2}}.$$

Эрдёш и Пиллаи доказали (3.11.1), и действительно это неравенство верно при

$$\log\log x - B\sqrt{\log\log x} < r < \log\log x + B\sqrt{\log\log x};$$

и Пиллаи доказал намного больше, а именно, что если $0 < k < e$, то

$$\omega_r(x) > \frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x - C)^{r-1}}{(r-1)!}$$

для

$$r \leqslant k(\log\log x - C),$$

где C зависит только от k. Истинность (3.11.1) для указанного диапазона значений r является простым следствием.

Комментарии к лекции III

Главная теорема этой лекции была доказана Харди и Рамануджаном в *Quarterly Journal of Math* 48 (1917), 76–92. Это работа номер 35 *Сборника трудов* и номер 32, ее предварительное изложение.

Доказательство Турана, приведенное в § 3.9, было опубликовано в его работе (**1**). Мы включили в него упрощение, предложенное мистером Маршаллом Холлом (Marshall Hall). Доказательство также воспроизведено в книге Харди и Райт, § 22.13. Туран в (**2**) доказал несколько обобщений теоремы.

§ 3.3 Неравенства (3.3.1) и асимптотическое соотношение

$$\pi(x) \sim \frac{\vartheta(x)}{\log x}$$

могут быть доказаны «элементарными» рассуждениями. См., к примеру, Харди и Райт, гл. 22 и лекцию II.

Обсуждение (3.5.3) и более точные результаты см. в Харди и Райт, гл. 22; Ингам, 22–24; Ландау, *Handbuch*, 100–102. Несколько более точный результат

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \log\log x + A + o(1)$$

(для подходящих значений A) эквивалентен теореме Мертенса (Mertens)

$$\prod_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sim\frac{e^{-\gamma}}{\log x},$$

где γ — константа Эйлера.

Почти также легко доказать более точные уравнения

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)=x\log\log x+Ax+O\Big(\frac{x}{\log x}\Big),\quad \sum_{n\leqslant x}F(n)=x\log\log x+Bx+O\Big(\frac{x}{\log x}\Big),$$

где

$$B=A+\sum\frac{1}{p(p-1)}.$$

Эти уравнения сформулированы в § 1.2(3) совместной работы, упомянутой в начале этих комментариев.

§ 3.7 Обсуждение (3.7.2) см. в книге Ландау, *Handbuch*, 203–213.

§ 3.10 Максимальный порядок величины $d(n)$ примерно равен

$$2^{\frac{\log n}{\log\log n}}.$$

Это впервые было доказано Вигертом (Wigert): см. Ландау, *Handbuch*, 219–222. Вигерт и Ландау использовали при доказательстве теорему о простых числах, но Рамануджан (*Сборник трудов*, 85–86) показал, что это не является необходимым.

§ 3.11 См. стр. 5 моих литографированных лекций, упоминавшихся в комментарии к § 2.8 (стр. 70).

Доказательства Эрдёша и Пиллаи еще не опубликованы.

Лекция IV

Некоторые другие задачи аналитической теории чисел

4.1. В этой лекции я возвращаюсь к классическим задачам аналитической теории чисел. Содержание лекции разнообразно и довольно несвязно, но связующей нитью служит то обстоятельство, что большая часть задач подсказана задачами из писем Рамануджана. Я начну с отступления на тему, о которой Рамануджан ничего не сказал, но на которую я ссылался во второй лекции.

A
Доказательство того, что $\zeta(s)$ не имеет нулей на прямой $\sigma = 1$

4.2. Теорема о простых числах «эквивалентна» теореме, что

$$\zeta(1+it) \neq 0, \tag{4.2.1}$$

в том смысле, что никаких более глубоких свойств $\zeta(s)$ не требуется для доказательства. Строгая эквивалентность возникает лишь тогда, когда используется метод Винера, но (4.2.1) играет существенную роль в любой версии доказательства. Стандартное доказательство (4.2.1) получено Адамаром, но существует альтернативное доказательство, принадлежащее Ингаму, которое интересно само по себе и уместно здесь, поскольку оно основано на одной из формул Рамануджана.

Доказательство Адамара основано на простом тригонометрическом неравенстве, а именно

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1+\cos\theta)^2 \geqslant 0 \tag{4.2.2}$$

(для всех вещественных θ). Воспользуемся им следующим образом. По формуле Эйлера,

$$\log\zeta(s) = \sum \log\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum p^{-s} + f(s),$$

где $f(s)$ регулярна при $\sigma \geqslant 1$ (а в при действительности $\sigma > \frac{1}{2}$). Следовательно,

$$\log|\zeta(\sigma+it)| = \Re\sum p^{-\sigma-it} + g(\sigma,\, t) =$$
$$= \sum p^{-\sigma}\cos(p\log t) + g(\sigma,\, t),$$

при $\sigma > 1$, $g(\sigma, t)$ ограничена для любого фиксированного t, когда $\sigma \to 1$.

Следовательно, если мы запишем

$$\chi(\sigma,\, t) = \log|\zeta^3(\sigma)\,\zeta^4(\sigma+it)\,\zeta(\sigma+2it)|$$

и будем использовать $g(\sigma,\, t)$ в том же самом смысле, то

$$\chi(\sigma,\, t) = \sum p^{-\sigma}\{3 + 4\cos(t\log p) + \cos(2t\log p)\} + g(\sigma,\, t);$$

и таким образом (поскольку члены ряда положительны)

$$\chi(\sigma,\, t) > -A(t), \tag{4.2.3}$$

где $A(t)$ не зависит от σ, когда $\sigma \to 1$.

Теперь зафиксируем t. Если

$$\zeta(1+it) = 0,$$

то

$$\zeta(\sigma+it) = \zeta(1+it+\sigma-1) = (\sigma-1)^k h(\sigma,\, t),$$

где k — положительное целое число, а $\log h(\sigma,\, t)$ ограничен при $\sigma \to 1$; и таким образом

$$\log|\zeta(\sigma+it)| < -k\log\frac{1}{\sigma-1} + A(t)$$

при $\sigma \to 1$. Также

$$\log|\zeta(\sigma+2it)| < A(t)$$

и

$$\log|\zeta(\sigma)| < \log\frac{1}{\sigma-1} + A,$$

где A — константа. Поэтому

$$\chi(\sigma,\, t) < (3-4k)\log\frac{1}{\sigma-1} + A(t) \to -\infty,$$

что противоречит (4.2.3).

4.3. Доказательство Ингама основано на формуле, опубликованной Рамануджаном в 1915 году, а именно

$$f(s) = \sum \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}, \qquad (4.3.1)$$

где $\sigma_a(n)$ — сумма a-х степеней делителей n, и

$$\Re s, \quad \Re(s-a), \quad \Re(s-b), \quad \Re(s-a-b)$$

— все больше 1. В частности,

$$\sum \frac{d^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} \qquad (4.3.2)$$

при $\sigma > 1$.

Чтобы доказать (4.3.1), заметим, что

$$\chi(n) = \sigma_a(n)\sigma_b(n)$$

«мультипликативно», т. е. что

$$\chi(nn') = \chi(n)\chi(n')$$

для взаимно простых n и n'. Следовательно,

$$f(s) = \prod_p f_p(s), \qquad (4.3.3)$$

где p пробегает по множеству простых чисел,

$$f_p(s) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(p^\lambda)\sigma_b(p^\lambda)}{p^{\lambda s}},$$

а s — произвольное значение, при котором произведение абсолютно сходится. Но

$$f_p(s) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{p^{(\lambda+1)a}-1}{p^a-1}\,\frac{p^{(\lambda+1)b}-1}{p^b-1}\,p^{-\lambda s} =$$

$$= \frac{1}{(p^a-1)(p^b-1)}\left\{\frac{p^{a+b}}{1-p^{a+b-s}} - \frac{p^a}{1-p^{a-s}} - \frac{p^b}{1-p^{b-s}} + \frac{1}{1-p^{-s}}\right\} =$$

$$= \frac{1-p^{a+b-2s}}{(1-p^{-s})(1-p^{a-s})(1-p^{b-s})(1-p^{a+b-s})};$$

поэтому

$$f(s) = \prod_p \frac{1 - p^{a+b-2s}}{(1-p^{-s})(1-p^{a-s})(1-p^{b-s})(1-p^{a+b-s})} = \\ = \frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}.$$

Теперь предположим, что

$$\zeta(1+ic) = 0$$

для положительных c. Если принять $a = ic$ и $b = -ic$ в (4.3.1), получим

$$f(s) = \sum \frac{|\sigma_{ic}(n)|^2}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)\zeta(s-ic)\zeta(s+ic)}{\zeta(2s)}. \qquad (4.3.4)$$

На первый взгляд эта формула верна при $\sigma > 1$. Но $f(s)$ регулярна при $\sigma > \frac{1}{2}$, поскольку двойной полюс $\zeta^2(s)$, при $s = 1$, уничтожается нулями $\zeta(s-ic)$ и $\zeta(s+ic)$ и коэффициенты ряда *положительны*. Следовательно, по известной теореме Ландау, ряд является сходящимся и представляет $f(s)$ при $\sigma > \frac{1}{2}$ и, в частности, когда $s = \frac{1}{2} + \delta > \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$f\Big(\frac{1}{2} + \delta\Big) = \sum \frac{|\sigma_{ic}(n)|^2}{n^{1/2+\delta}} > 1$$

при $\delta > 0$. С другой стороны,

$$\zeta(2s) = \zeta(1 + 2\delta) \to \infty$$

при $\delta \to 0$, и все три множителя в числителе (4.3.4) ограничены, поэтому

$$f\Big(\frac{1}{2} + \delta\Big) \to 0.$$

Получившееся противоречие показывает, что $\zeta(1 + ic) \neq 0$ для любого положительного c.

B
Количество чисел, являющихся суммами двух квадратов

4.4. Утверждение, приведенное под номером (1.15) в моей вводной лекции, заключалось в том, что «количество чисел между A и x, которые являются либо квадратами, либо суммами двух квадратов, равно

$$K\int_A^x \frac{dt}{\sqrt{\log t}} + \theta(x),$$

где $K = 0{,}764\ldots$ и $\theta(x)$ очень мало по сравнению с интегралом». Не имеет значения, будем ли мы включать сами квадраты или нет. Позднее Рамануджан (i) привел точное значение K, а именно

$$\left\{\frac{1}{2}\prod\left(\frac{1}{1-r^{-2}}\right)\right\}^{1/2},$$

где r пробегает по всем простым числам вида $4m+3$, и указал (ii) что $\theta(x)$ имеет порядок

$$\sqrt{\frac{x}{\log x}}.$$

Мы установим, что последнее утверждение является ложным.

4.5. Эта задача была решена Ландау в 1908. Решение очень интересно, поскольку оно основано на применении классических методов теории простых чисел к функции с алгебраической особенностью.

Обозначим простые числа вида $4m+1$ и $4m+3$ как q и r соответственно. Для того, чтобы n было суммой двух квадратов, необходимо и достаточно, чтобы

$$n = 2^a\mu\nu^2,$$

где μ — произведение простых чисел q и ν — произведение простых чисел r. Если мы положим b_n равным 1, когда n является суммой двух квадратов, и 0 в противном случае, тогда b_n равно 1, когда

$$n = 2^a\prod q^b\prod r^{2c}$$

и

$$f(s) = \sum \frac{b_n}{n^s} = \frac{1}{1-2^{-s}} \prod_q \frac{1}{1-q^{-s}} \prod_r \frac{1}{1-r^{-2s}}.$$

Также

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \prod_q \frac{1}{1-q^{-s}} \prod_r \frac{1}{1-r^{-s}}$$

и

$$L(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \ldots = \prod \frac{1}{1-q^{-s}} \prod \frac{1}{1+r^{-s}};$$

поэтому

$$\{f(s)\}^2 = \psi(s)\zeta(s)L(s), \tag{4.5.1}$$

где

$$\psi(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \prod \frac{1}{1-r^{-2s}}. \tag{4.5.2}$$

Очевидно, что $\psi(s)$ регулярно и не имеет нулей при $\sigma > \frac{1}{2}$. Что касается других множителей в (4.5.1), $L(s)$ — целая функция, чье значение при $s = 1$ равно $\frac{1}{4}\pi$, в то время как $\zeta(s)$ регулярна всюду за исключением ее полюса при $s = 1$. Также известно, что ни $\zeta(s)$, ни $L(s)$ не обращаются в нуль в области D, растягиваясь влево от прямой $\sigma = 1$ по закону

$$\sigma > 1 - \frac{A}{\{\log(|t|+2)\}^A}.$$

Наконец, $\zeta(s)$ и $L(s)$ имеют порядок

$$O\{(\log|t|)^A\}$$

для больших t в D.

Следовательно,

$$f(s) = (s-1)^{-1/2} g(s),$$

где $g(s)$ регулярна в D и

$$g(1) = \left\{\frac{1}{4}\pi\psi(1)\right\}^{1/2} = \left\{\frac{1}{2}\pi \prod\left(\frac{1}{1-r^{-2}}\right)\right\}^{1/2} = K\sqrt{\pi}.$$

4.6. Если

$$B(x) = \sum_{n \leqslant x} b_n,$$

тогда $B(x)$ — количество представимых чисел, не превосходящих x, и

$$B^*(x) = \sum_{n \leqslant x}{}' b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\, \frac{x^s}{s}\, ds \tag{4.6.1}$$

при $c > 1$.[1] Будем рассматривать этот интеграл (или интеграл, полученный из него с помощью каких-либо преобразований) так же, как мы рассматривали интеграл для $\psi^*(x)$ в лекции II.

Я приведу грубый набросок доказательства, который можно сравнить с «аппроксимацией первого порядка» (§ 2.5) к доказательству теоремы о простых числах. Однако существуют два важных отличия. Интеграл (4.6.1) в некотором смысле намного проще, поскольку в знаменателе нет дзета-функции, но подынтегральное выражение имеет алгебраическую особенность, а не полюс. Следовательно, $B^*(x)$ будет аппроксимироваться не вычетом, а интегралом по контуру вокруг точки $s = 1$. Мы должны преобразовать путь интегрирования в путь типа C (см. рис. 1), и наша аппроксимирующая функция будет иметь вид

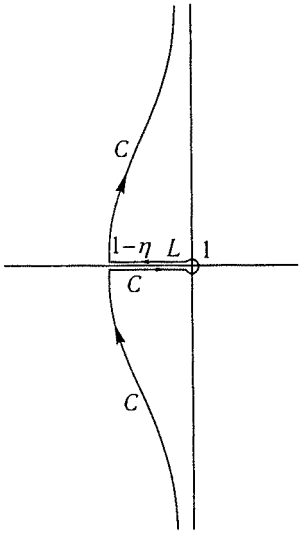


Рис. 1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L f(s)\, \frac{x^s}{s}\, ds &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{x^s}{(s-1)^{1/2} s}\, g(s)\, ds = \\ &= \frac{K\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_L \frac{x^s}{(s-1)^{1/2}}\, h(s)\, ds, \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

где

$$h(s) = 1 + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \dots \tag{4.6.3}$$

[1] Звезда и штрих имеют то же самое значение, что и в § 2.5.

вблизи $s = 1$ и L — разрез от $1 - \eta$, проходящий вокруг 1, показанный на рисунке.

Если мы примем $h(s)$ равным единице, то получим

$$\frac{K}{\sqrt{\pi}} \int_{1-\eta}^{1} \frac{x^s}{(1-s)^{1/2}}\, ds = \frac{Kx}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\eta} \frac{e^{-u \log x}}{\sqrt{u}}\, du,$$

что практически равно

$$\frac{Kx}{\sqrt{\log x}},$$

и доказательство при правильном выводе покажет, что

$$B(x) = \frac{Kx}{\sqrt{\log x}} \Big\{ 1 + \frac{\alpha_1}{\log x} + \frac{\alpha_2}{(\log x)^2} + \dots \Big\}, \tag{4.6.4}$$

ряд является асимптотическим по Пуанкаре рядом. Это, в сущности, результат Ландау, хотя он не продолжал анализ так далеко.

4.7. Тогда

$$K \int_{A}^{x} \frac{dt}{\sqrt{\log t}} = \frac{Kx}{\sqrt{\log x}} \Big\{ 1 + \frac{\beta_1}{\log x} + \frac{\beta_2}{(\log x)^2} + \dots \Big\}, \tag{4.7.1}$$

и ряд снова является асимптотическим. Таким образом, результат Рамануджана, за исключением того, что он относится к $\theta(x)$, имеет тот же вид, что и (4.6.4), но коэффициенты двух рядов не совпадают[1]. Коэффициенты ряда в (4.6.4) зависят достаточно сложным образом от коэффициентов a_1, a_2, ... в (4.6.3). Интеграл (4.7.1), как аппроксимация, не имеет преимущества перед первым слагаемым ряда (4.6.4), и утверждение Рамануджана (15), хотя и остается истинным в том виде, в котором оно сформулировано, определенно вводит в заблуждение. Он был введен в заблуждение, что не является странным, аналогией с теоремой о простых числах, в которой логарифмический интеграл $\operatorname{li} x$ имеет большое значение и является очень хорошей аппроксимацией.

Соотношение

$$B(x) \sim \frac{Kx}{\sqrt{\log x}},$$

[1] Фактически $\beta_1 \neq \alpha_1$.

тем не менее, остается истинным, и было бы очень интересно узнать, как именно Рамануджан получил это утверждение. Судя по виду K, он, очевидно, воспользовался формулой (4.5.1). Заключительная часть его доказательства, несомненно, была очень умозрительной.

4.8. Рамануджан сделал аналогичную ошибку позднее, в неопубликованной рукописи, которую изучили после его смерти мисс Стенли, Ватсон и я сам. Функция Рамануджана[1] $\tau(n)$ является «почти всегда» делящейся на 5. Более того, если $t_n = 0$, когда $\tau(n)$ делится на 5, $t_n = 1$ иначе, и

$$T(x) = \sum_{n \leqslant x} t_n.$$

Тогда

$$T(x) \sim C \frac{x}{(\log x)^{1/2}}$$

при некотором C. Здесь Рамануджан снова оказался под действием ложного представления, что выражение

$$C \int_A^x \frac{dt}{(\log t)^{1/2}}$$

было намного лучшей аппроксимацией.

C
Замечание о функции Мебиуса $\mu(n)$

4.9. Хорошо известно, что некоторые теоремы о функции Мебиуса $\mu(n)$ «столь же глубоки», как теорема о простых числах. Они эквивалентны ей в том смысле, что их можно вывести из нее и ее можно вывести из них с помощью «элементарных» преобразований. В частности, это верно для теорем

$$\sum \frac{\mu(n)}{n} = 0 \tag{4.9.1}$$

и

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = o(x); \tag{4.9.2}$$

[1] См. лекцию X.

и эти две теоремы, естественно, эквивалентны в том же самом смысле. То, что (4.9.2) следует из (4.9.1), действительно тривиально, поскольку сходимость

$$\sum \frac{a_n}{n}$$

влечет

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = o(n),$$

каковы бы ни были a_n. Вывод (4.9.1) из (4.9.2), хотя и остается «элементарным» с технической точки зрения, намного менее очевиден, и основан на достаточно тонкой теореме Аксера и на специальных свойствах $\mu(n)$.

В первом письме Рамануджана ко мне есть также утверждения, из которых видно его знакомство с (4.9.1) и (4.9.2). Из этого, разумеется, не следует, что он имел настоящее доказательство этих теорем. Сразу получается, что

$$\lim_{s\to 1} \sum \frac{\mu(n)}{n^s} = \lim_{s\to 1} \frac{1}{\zeta(s)} = 0,$$

и он вряд ли делал различия между этим выражением и (4.9.1).

Эти утверждения отмечены цифрой (2) на странице XXIV *Сборника трудов*. Если u — число, являющееся произведением нечетного числа различных простых множителей, а $U(x)$ — количество таких чисел, не превосходящих x, тогда

$$U(x) \sim \frac{3x}{\pi^2}, \tag{4.9.3}$$

$$\sum \frac{1}{u^2} = \frac{9}{2\pi^2}, \tag{4.9.4}$$

$$\sum \frac{1}{u^4} = \frac{15}{2\pi^4}. \tag{4.9.5}$$

Последние две теоремы не являются сложными. Будем писать q для числа, не содержащего квадратов, u в вышеописанном смысле и v для числа типа q, но не u. Тогда

$$\mu(u) = -1, \quad \mu(v) = 1$$

и

$$\sum \frac{1}{u^s} = \frac{1}{2} \sum \frac{|\mu(n)| - \mu(n)}{n^s}.$$

но

$$\sum \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

и

$$\sum \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \prod\Big(1 + \frac{1}{p^s}\Big) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

Следовательно,

$$\sum \frac{1}{u^s} = \frac{1}{2}\Big\{\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} - \zeta(s)\Big\}$$

при $s > 1$, а (4.9.4) и (4.9.5) — частные случаи.

Теорема (4.9.3) является более глубокой и основана на (4.9.2). Если мы определим $Q(x)$ и $V(x)$ так же, как определили $U(x)$, тогда

$$Q(x) = U(x) + V(x)$$

и

$$M(x) = V(x) - U(x).$$

Легко доказать, что

$$Q(x) \sim \frac{6x}{\pi^2},$$

и тогда (4.9.3) следует из (4.9.2). Таким образом, утверждение Рамануджана в этом случае столь же «глубокое», как теорема о простых числах.

Комментарии к лекции IV

§ 4.2. Доказательство Адамара можно продолжить и показать, что $\zeta(s)$ не имеет нулей и действительно

$$|\zeta(s)| > \frac{A}{\{\log(|t|+2)\}^A}$$

в области

$$\sigma > 1 - \frac{A}{\{\log(|t|+2)\}^A}.$$

Здесь A — подходящие положительные константы. См. Ландау, *Handbuch*, 167–170.

Доказательство Ингама было опубликовано в его работе (**2**). Его можно применить ко всем «L-функциям» Дирихле и в частности к

$$L(s) = 1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} - \dots;$$

но оно не может быть продолжено так же, как доказательство Адамара.

§ 4.3. Формула (4.3.1) приведена в *Сборнике трудов* 135 (15). Существует доказательство Вильсона (**1**).

(4.3.3) см., к примеру, в Харди и Райт 247–248.

Теорема Ландау была опубликована в *Math. Annalen* 61 (1905), 527–550. Доказательство также приведено в *Handbuch*, 697–698.

§ 4.4. См. комментарии к стр. 20 (напечатаны на стр. 34).

Точные утверждения Рамануджана см. в *Сборнике трудов*, XXIV и XXVIII. Очевидно, что если бы его утверждения о порядке $\theta(x)$ были верны, то имело бы значение то обстоятельство, считаем мы квадраты или нет.

§ 4.5. Свойства $\zeta(s)$, предполагавшиеся здесь, содержатся среди доказанных Ландау в той части *Handbuch*, на которую мы ссылались в комментарии к § 4.2. Обобщение на L-функции, и в частности на $L(s) = 1^{-s} - 3^{-s} + \dots$, см. в *Handbuch*, 459–464.

§ 4.6. Это доказательство является несколько более изощренным, чем доказательство из § 2.5, поскольку там я предположил истинность гипотезы Римана, в то время как здесь я не предполагал ничего о нулях $\zeta(s)$ и $L(s)$, что не было доказано (и мне пришлось из-за этого использовать криволинейный контур). В других аспектах это доказательство столь же грубо, что и в § 2.5.

§ 4.8. См. Стэнли (**1**). Функция $\tau(n)$ имеет множество интересных свойств сравнимости, например, $\tau(n) \equiv 0 \pmod{691}$ для почти всех n. См. их в Морделл (**1**), Ватсон (**23**) и в лекции X.

§ 4.9. См. Ландау. *Prac. Matematyczno-Fizicznych.* 21 (1910), 97–177 (130–137) и комментарий к § 2.2.

Асимптотическую формулу для $Q(x)$ см. в Харди и Райт, 267–268; Ландау, *Handbuch*, 604–609. Теорема принадлежит Гегенбауэру (Gegenbauer).

Лекция V

Задачи о точках решетки

5.1. Предположим, что D — ограниченная область на плоскости переменных u и v, содержащая внутри себя начало координат O. $D(x)$ — результат расширения D относительно O в линейном отношении $x^{1/2} : 1$ или относительно площади в отношении $x : 1$. Сколько точек решетки (т. е. точек с целочисленными координатами) содержится внутри или на границе $D(x)$, если x — велико?

Самой знаменитой из таких «задач о точках решетки» является «задача об окружности» Гаусса. Здесь D — единичная окружность и $D(x)$ — окружность

$$u^2 + v^2 \leqslant x.$$

Легко показать, что если $N(x)$ — количество точек решетки в $D(x)$, то

$$N(x) = \pi x + O(x^{1/2}) \tag{5.1.1}$$

(площадь окружности с ошибкой порядка длины окружности). Эта теорема почти интуитивна, но отнюдь не является истиной в последней инстанции. Более тщательный анализ задачи показал, что $\frac{1}{2}$ в (5.1.1) можно заменить сначала $\frac{1}{3}$, затем различными меньшими числами.

Мы также можем сформулировать теорему в менее геометрической форме. Если $r(n)$ — количество представлений целого числа n в виде суммы двух квадратов (представления, которые отличаются порядком или знаками чисел, из которых образованы квадраты, учитываются по отдельности), тогда $r(n)$ равно числу точек решетки в окружности $u^2 + v^2 = n$ и

$$N(x) = r(1) + r(2) + \ldots + r([x]) = \sum_{n \leqslant x} r(n);$$

поэтому (5.1.1) может быть записана как

$$\sum_{n \leqslant x} r(n) = \pi x + O(x^{1/2}) \tag{5.1.2}$$

и становится теоремой о «средней величине» арифметической функции $r(n)$.

Существует много обобщений задачи на эллипсы, и на гиперсферы, и на гилерэллипсоиды в пространствах любого количества измерений.

5.2. Другой знаменитой задачей о точках решетки является «задача о делителях Дирихле». Нам удобнее будет сформулировать ее в несколько измененном виде. Окружность в § 5.1 была симметрична во всех четырех квадрантах, и нам достаточно было бы сформулировать задачу лишь для одного квадранта. Если $D(x)$ теперь определяется

$$u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \quad u^2 + v^2 \leqslant x,$$

тогда

$$N(x) = \frac{1}{4}\pi x + O(x^{1/2}).$$

Мы можем также определить $D(x)$:

$$u > 0, \quad v > 0, \quad u^2 + v^2 \leqslant x,$$

не учитывая точки на осях и мы увидим, что это изменение существенно в задаче о делителях.

В задаче о делителях $D(x)$ определено как

$$u > 0, \quad v > 0, \quad uv \leqslant x,$$

поэтому $N(x)$ равно количеству точек решетки между осями и равносторонней гиперболой $uv = x$, при этом учитываются те, которые расположены на гиперболе, но не учитываются те, которые расположены на осях. На осях расположено бесконечное количество точек решетки, поэтому их исключение является существенным.

Дирихле доказал, что в этом случае

$$N(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{1/2}), \tag{5.2.1}$$

где γ — константа Эйлера. Эта теорема соответствует (5.1.1), хотя доказательство не совсем тривиально. Как и в задаче об окружности, теорема была обобщена современными исследователями, в сущности, с теми же результатами. Альтернативное утверждение (i)

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{1/2}), \tag{5.2.2}$$

$d(n)$ — число делителей n, и (ii)

$$[x] + \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \ldots = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{1/2}). \qquad (5.2.3)$$

Последнее представление используется в доказательстве Дирихле.

5.3. Я не знаю, сколько времени Рамануджан размышлял об этих задачах в юности. Он был знаком с доминирующими слагаемыми

$$x\log x + (2\gamma - 1)x$$

аппроксимации Дирихле и, возможно, обнаружил их с помощью доказательства подобного типа. В этом случае он должен был знать (5.2.1), но он навряд ли мог бы внести существенный вклад в эту область, поскольку самое важное для всех этих задач — это оценка ошибки, о чем его ранние идеи были несколько смутными.

Так, в своем первом письме ко мне он утверждал, что

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(n) = n\log n + (2\gamma - 1)n + \frac{1}{2}\,d(n).$$

Нам следует заключить (если мы будем рассматривать это утверждение сколько-либо строго), что порядок ошибки в формуле Дирихле не превосходит порядка ошибки $d([x])$ и, в частности, что

$$N(x) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\varepsilon})$$

для любого положительного ε. Это неверно (на самом деле, при $\varepsilon = \frac{1}{4}$), хотя это не так легко опровергнуть. Однако намного более правдоподобно, что Рамануджан добавил слагаемое $\frac{1}{2}\,d(n)$ просто в знак достаточно разумного формального принципа. Когда мы исследуем «функцию суммы»

$$A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n$$

арифметических функций a_n, обычно не $A(x)$, а

$$A^*(x) = \sum_{n\leqslant x}{}' a_n,$$

с последним слагаемым $a_{[x]}$ умноженным на $\frac{1}{2}$, когда x целое число, наиболее естественное представляется в анализе[1].

Позднее в своей жизни, разумеется, Рамануджан занимался этими задачами на более изощренном уровне, хотя его результаты здесь не имеют большого значения.

5.4. Здесь, однако, я рассматриваю не какую-либо из этих классических задач, а ту, которая связана с другими утверждениями Рамануджана. Она также представлена в его первом письме ко мне и выглядит следующим образом:

«Количество чисел вида 2^u3^v, меньших n, равно

$$\frac{\log 2n \log 3n}{2 \log 2 \log 3}.»$$

Формула, разумеется, носит аппроксимирующий характер, и нет никаких свидетельств о том, насколько точной считал ее Рамануджан.

Будет удобно записать

$$\eta = \log n, \quad \omega = \log 2, \quad \omega' = \log 3.$$

Тогда утверждение Рамануджана заключаются в том, что количество решений неравенств

$$u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \quad \omega u + \omega' v \leqslant \eta \tag{5.4.1}$$

«приближенно» равно

$$\frac{\eta^2}{2\omega\omega'} + \frac{\eta}{2\omega} + \frac{\eta}{2\omega'} + \frac{1}{2}.$$

$\frac{1}{2}$ в конце, разумеется, не должна восприниматься слишком серьезно, и в дальнейшем мы увидим, что если какая-нибудь константа имеет право находиться здесь, то это не $\frac{1}{2}$.

---

[1] Как в формуле Перрона,

$$A^*(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x}{}' a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \frac{e^{xs}}{s}\, ds,$$

где $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$. См. Харди и Рисс *Общая теория рядов Дирихле*, 12. В этом случае последнее слагаемое необходимо умножить на $\frac{1}{2}$, если $x = \lambda_n$.

В этой лекции я предлагаю привести краткое изложение того очень любопытного и интересного анализа, который можно сделать, основываясь на утверждении Рамануджана.

5.5. Предположим, что ω и ω' — произвольные положительные числа такие, что

$$N(\eta) = N(\eta, \omega, \omega')$$

равно количеству решений (5.4.1), т. е. количеству точек решетки в некотором прямоугольном треугольнике таком, что

$$\Omega(\eta) = \frac{\eta^2}{2\omega\omega'} + \frac{\eta}{2\omega} + \frac{\eta}{2\omega'} \tag{5.5.1}$$

и что

$$N(\eta) = \Omega(\eta) + R(\eta). \tag{5.5.2}$$

Задача заключается в том, чтобы найти наилучшее из возможных ограничений для $R(\eta)$. Она изучалась в различных видах многими исследователями и, в частности, Харди и Литтлвудом, и Островским. Харди и Литтлвуд в двух статьях, опубликованных в 1921 и 1922 годах, рассматривали ее в том виде, в котором она приведена здесь. Островский рассматривал несколько отличную задачу, казалось бы более частную, но, в сущности, эквивалентную и получил с помощью других методов практически те же самые результаты.

Задача существенно не меняется, если мы отбросим точки решетки, лежащие на осях. Горизонтальные и вертикальные стороны треугольника равны η/ω и η/ω', и количество точек решетки на них равно

$$1 + \left[\frac{\eta}{\omega}\right] + \left[\frac{\eta}{\omega'}\right] = \frac{\eta}{\omega} + \frac{\eta}{\omega'} + j,$$

где $|j| \leqslant 1$. Следовательно, если мы обозначим с помощью $M(\eta)$ количество точек решетки, лежащих внутри треугольника или на его гипотенузе, тогда

$$M(\eta) = \frac{\eta^2}{2\omega\omega'} - \frac{\eta}{2\omega} - \frac{\eta}{2\omega'} + r(\eta),$$

где $r(\eta)$ отличается от $R(\eta)$ не более чем на 1.

Сразу очевидно, что

$$N(\eta) = \frac{\eta^2}{2\omega\omega'} + O(\eta) \tag{5.5.3}$$

(площадь треугольника с максимальной ошибкой порядка его периметра). После этого все зависит от арифметической природы

$$\theta = \omega/\omega'.$$

Поскольку

$$N(\eta, \omega, \omega') = N(k\eta, k\omega, k\omega'),$$

то только отношение θ в действительности важно в задаче.

Рациональные θ

5.6. Простейшим является случай, когда θ рационально. Тогда (поскольку существенно лишь отношение ω и ω') мы можем предположить, что

$$\omega = a, \quad \omega' = b,$$

где a и b — положительные взаимно простые целые числа.

Количество решений

$$au + bv = n \tag{5.6.1}$$

равно

$$\left[\frac{n}{ab}\right] + \zeta,$$

где ζ равно 0 или 1.[1]

---

[1] Смотри, к примеру, Bachman *Niedere Zahlentheorie*, ii, 129. Доказательство достаточно простое.

Предположим, что

$$n = mab + r \quad (0 \leqslant r < ab),$$

и запишем

$$u = bU + \beta, \quad v = aV + \alpha \quad (0 \leqslant \alpha < a, \quad 0 \leqslant \beta < b);$$

поэтому (5.6.1) будет иметь вид

$$mab + r = (U + V)ab + a\beta + b\alpha. \tag{5.6.2}$$

Рассмотрим множество ab чисел

$$a\beta + b\alpha \quad (0 \leqslant \alpha < a, \quad 0 \leqslant \beta < b).$$

Все такие числа меньше, чем $2ab$, и не сравнимы (mod ab). Следовательно, их можно записать в виде

$$\rho, \quad ab + \rho',$$

где ρ и ρ' вместе пробегают

$$0, 1, \ldots, ab - 1.$$

Следовательно, $N(\eta)$ имеет скачки порядка η, когда η проходит через значение n, поэтому уравнение

$$R(\eta) = o(\eta)$$

неверно, $R(\eta)$ имеет порядок η.

5.7. Мы можем явно вычислить $N(\eta)$ следующим образом. Если λ_ν — последовательность чисел

$$au + bv \quad (u,\, v = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots),$$

упорядоченных по величине, и каждая λ_ν подсчитывается столько раз, сколько оно встречается, и

$$f(s) = \sum e^{-\lambda_\nu s},$$

тогда[1]

$$N^*(\eta) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant \eta}{}' 1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\, \frac{e^{\eta s}}{s}\, ds.$$

Здесь $c > 0$, а смысл штриха объяснен в параграфе § 5.3. Но

$$f(s) = \sum_{u,\, v} e^{-(au+bv)s} = \frac{1}{(1 - e^{-as})(1 - e^{-bs})},$$

поэтому

$$N^*(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\eta s}}{(1 - e^{-as})(1 - e^{-bs})}\, \frac{ds}{s}. \tag{5.7.1}$$

Если

$$a\beta + b\alpha = \rho.$$

то из (5.6.2) следует

$$U + V = m.$$

Существует одна пара α, β, удовлетворяющих первому уравнению, и $m+1$ пар U, V, удовлетворяющих второму, и каждый набор U, V, α, β дает решение (5.6.2). С другой стороны, если

$$a\beta + b\alpha = ab + \rho',$$

тогда из (5.6.2) получим

$$U + V = m - 1,$$

и в этом случае существует лишь m решений.

[1] По формуле Перонна, приведенной на стр. 101.

Вычислим интеграл как сумму вычетов. Подынтегральное выражение имеет

(i) тройной полюс в начале координат с вычетом

$$P(\eta) = \frac{\eta^2}{2ab} + \frac{\eta}{2a} + \frac{\eta}{2b} + \frac{a^2+3ab+b^2}{12ab}; \tag{5.7.2}$$

(ii) двойные полюса в точках

$$s = 2k\pi i,$$

где k — целое число с вычетами

$$\frac{e^{2k\eta\pi i}}{2kab\pi i}\left(\eta - \frac{1}{2k\pi i} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right);$$

(iii) простые полюса в точках

$$s = \frac{2k\pi i}{a} \quad (a \nmid k), \quad s = \frac{2k\pi i}{b} \quad (b \nmid k),^{1}$$

с вычетами

$$-\frac{1}{4k\pi}\frac{e^{2k\pi i(\eta+b/2)/a}}{\sin(kb\pi/a)}, \quad -\frac{1}{4k\pi}\frac{e^{2k\pi i(\eta+a/2)/b}}{\sin(ka\pi/b)}$$

соответственно. Несложно показать, что интеграл равен сумме всех этих вычетов[2]. Прямое вычисление приводит к формуле

$$N^*(\eta) = P(\eta) + Q(\eta) + T_1(\eta) + T_2(\eta), \tag{5.7.3}$$

где $P(\eta)$ задано выражением (5.7.2),

$$Q(\eta) = -\frac{\eta + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b}{ab}\left(\eta - [\eta] - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2ab}\left\{\left(\eta - [\eta] - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}\right\}, \tag{5.7.4}$$

[1] $x \nmid y$ означает, что в «x не является делителем y» (противоположность $x \mid y$).

[2] Применим теорему Коши к прямоугольнику

$$c - iT, \quad c + iT, \quad -\xi + iT, \quad -\xi - iT,$$

где T выбрано так, чтобы горизонтальные стороны прямоугольника не проходили на расстоянии, меньшем заданного расстояния δ от любого полюса, а затем устремим T и ξ к бесконечности.

$$T_1(\eta) = -\frac{1}{4\pi}\sum{}' \frac{\cos\frac{2k\pi}{a}\left(\eta+\frac{1}{2}b\right)}{k\sin\frac{bk\pi}{a}},$$
$$T_2(\eta) = -\frac{1}{4\pi}\sum{}' \frac{\cos\frac{2k\pi}{b}\left(\eta+\frac{1}{2}a\right)}{k\sin\frac{ak\pi}{b}}, \tag{5.7.5}$$

k в последних двух рядах пробегает по всем целым числам, которые не являются кратными a и b соответственно.

Очевидно, что

$$Q(\eta) = -\frac{\eta}{ab}\Big(\eta - [\eta] - \frac{1}{2}\Big) + O(1),$$

и $T_1(\eta)$ и $T_2(\eta)$ — периодические (с периодами a и b соответственно), и поэтому ограниченны. Следовательно,

$$N^*(\eta) = P(\eta) - \frac{\eta}{ab}\Big(\eta - [\eta] - \frac{1}{2}\Big) + O(1) \tag{5.7.6}$$

при больших η. Второе слагаемое терпит разрыв

$$\frac{n}{ab} + O(1),$$

когда η проходит через целые значения n в соответствии с нашими заключениями в § 5.6.

Иррациональные θ

5.8. Задача, естественно, является более сложной, если θ иррациональны. Во-первых, было доказано, что

$$R(\eta) = o(\eta) \tag{5.8.1}$$

для всех иррациональных θ, поэтому

$$\Omega(\eta) = \frac{\eta^2}{2\omega\omega'} + \frac{\eta}{2\omega} + \frac{\eta}{2\omega'} \tag{5.8.2}$$

является хорошей аппроксимацией $N(\eta)$ и есть еще более точные результаты для отдельных классов θ. Они зависят от характера рациональных приближений к θ или (что тоже самое) от поведения частных a_n в представлении θ в виде непрерывной дроби

$$\theta = a_0 + \frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\cdots$$

Если a_n возрастает не очень быстро, то

$$R(\eta) = O(\eta^\alpha), \tag{5.8.3}$$

где α между 0 и 1; и если a_n ограничены, тогда

$$R(\eta) = O(\log \eta). \tag{5.8.4}$$

В частности, (5.8.3) верно для всех алгебраических, а (5.8.4) — для всех квадратичных θ.

θ в задаче Рамануджана является трансцендентным числом. Иррациональность θ тривиальна, поскольку

$$\frac{\log 2}{\log 3} = \frac{a}{b}$$

влечет $3^a = 2^b$. Т. е. ее трансцендентность следует из теоремы Гельфонда и Шнайдера (Gelfond и Schneider), что

$$\alpha^\beta$$

трансцендентна, когда α и β алгебраические и β иррационально. Так как 3 и

$$3^\theta = 2$$

рациональны, θ не может быть алгебраическим.

Максимум, что мы можем доказать о $R(\eta)$ в случае Рамануджана, — это

$$R(\eta) = o\Big(\frac{\eta}{\log \eta}\Big). \tag{5.8.5}$$

Я докажу это в § 5.15. Несколько менее точное уравнение

$$R(\eta) = O\Big(\frac{\eta}{\log \eta}\Big), \tag{5.8.6}$$

которое я докажу в § 5.12, в сущности, является уравнением из теоремы Островского.

5.9. Существует «тождество» для $N^*(\eta)$, когда θ иррационально, которое по форме сходно с (5.7.3), но включает ряды, которые не являются сходящимися в обычном смысле. Я не буду его использовать,

но я приведу доказательство (5.8.1) и (5.8.6), в основном принадлежащие Хейлбронну. Доказательство Хейлбронна, в принципе, то же самое, что и у Островского, но несколько проще. Оно эффективно, когда нам нужно доказать, что $R(\eta)$ «лишь немного меньше, чем η», как в (5.8.1) и (5.8.6), но не приводит в своей упрощенной форме к более точным результатам, которые как (5.8.4) истинны лишь для очень «простых» θ.

Определим $\{x\}$ выражением

$$\{x\} = x - [x] - \frac{1}{2}.$$

Эта функция имеет аналитическое представление

$$\{x\} = -\frac{1}{\pi}\Big(\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \dots\Big),$$

но мы не будем использовать его здесь.

Ордината $u = n$ пересекает гипотенузу треугольника в точке

$$n, \quad \frac{\eta - n\omega}{\omega'},$$

и количество точек решетки на ней равно

$$1 + \Big[\frac{\eta - n\omega}{\omega'}\Big].$$

Следовательно,

$$N(\eta) = \sum_{n \leqslant \eta/\omega} \Big(1 + \Big[\frac{\eta - n\omega}{\omega'}\Big]\Big) = \sum_{n \leqslant \eta/\omega} \Big(\frac{\eta - n\omega}{\omega'} + \frac{1}{2}\Big) - \sum_{n \leqslant \eta/\omega} \Big\{\frac{\eta - n\omega}{\omega'}\Big\}.$$

Если

$$\frac{\eta}{\omega} = \Big[\frac{\eta}{\omega}\Big] + f,$$

тогда первая сумма равна

$$\begin{aligned}\Big(\Big[\frac{\eta}{\omega}\Big] + 1\Big)\Big(\frac{\eta}{\omega'} + \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}\Big[\frac{\eta}{\omega}\Big]\Big(\Big[\frac{\eta}{\omega} + 1\Big]\Big)\frac{\omega}{\omega'} = \\ = \Big(\frac{\eta}{\omega} + 1 - f\Big)\Big(\frac{\eta}{\omega'} + \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{\eta}{\omega} - f\Big)\Big(\frac{\eta}{\omega} + 1 - f\Big)\frac{\omega}{\omega'} = \\ = \frac{\eta^2}{2\omega\omega'} + \frac{\eta}{2\omega} + \frac{\eta}{2\omega'} + O(1).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$N(\eta) = \frac{\eta^2}{2\omega\omega'} + \frac{\eta}{2\omega} + \frac{\eta}{2\omega'} - S(\eta) + O(1) = \Omega(\eta) - S(\eta) + O(1), \quad (5.9.1)$$

где

$$S(\eta) = \sum_{n \leqslant \eta/\omega} \left\{ \frac{\eta}{\omega'} - n\theta \right\}; \quad (5.9.2)$$

и доказательство (5.8.1) сводится к доказательству, что

$$S(\eta) = o(\eta). \quad (5.9.3)$$

Островский в своей статье, на которую я ссылался на стр. 102, изучает сумму

$$\sum_{n \leqslant x} \{n\theta\},$$

ряд практически того же типа, что и (5.9.2), и его доказательство может быть применено столь же эффективно к (5.9.2).

5.10. Если

$$\frac{p}{q} = \frac{p_m}{q_m}$$

сходится к непрерывной дроби для θ, тогда q_m стремится к бесконечности вместе с m и

$$\theta - \frac{p}{q} = \theta - \frac{p_m}{q_m} = \frac{(-1)^m}{q_m q'_{m+1}},$$

где

$$q'_{m+1} = a'_{m+1} q_m + q_{m-1}$$

и a'_{n+1} — полное частное, соответствующее a_{n+1}. Предположим, что $q < \eta/\omega$ и

$$\left[\frac{\eta}{\omega}\right] = rq + s \quad (r \geqslant 1,\ 0 \leqslant s < q).$$

Тогда

$$S(\eta) = \sum_{n=0}^{rq-1} \left\{ \frac{\eta}{\omega'} - n\theta \right\} + O(s) = S^*(\eta) + O(s). \quad (5.10.1)$$

Если мы запишем

$$n = \mu q + \nu \quad (\mu = 0, 1, \ldots, r-1; \quad \nu = 0, 1, \ldots, q-1),$$

тогда

$$S^*(\eta) = \sum_{\mu=0}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{q-1} \left\{ \frac{\eta}{\omega'} - (\mu q + \nu)\theta \right\} = \sum_{\mu=0}^{r-1} S_\mu(\eta), \tag{5.10.2}$$

где

$$S_\mu(\eta) = \sum_{0}^{q-1} \{\alpha - \nu\theta\}, \quad \alpha = \alpha_\mu = \frac{\eta}{\omega'} - \mu q\theta. \tag{5.10.3}$$

Мы докажем в следующем параграфе, что

$$S_\mu(\eta) = O(1) \tag{5.10.4}$$

равномерно по α. Если мы сейчас предположим это, то из (5.10.1), (5.10.2) и (5.10.4) получим

$$S(\eta) = O(r) + O(s) = O\left(\frac{\eta}{q_m}\right) + O(q_m). \tag{5.10.5}$$

Доказательство того, что $S_\mu(\eta)$ ограниченно

5.11. Давайте предположим для определенности, что m — четно. Тогда

$$0 < \theta - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2}.$$

Также

$$\alpha = \frac{a}{q} + \delta,$$

где a — целое число и

$$0 \leqslant \delta < \frac{1}{q}.$$

Поэтому

$$\alpha - \nu\theta - \frac{a - \nu p}{q} = \delta - \nu\left(\theta - \frac{p}{q}\right)$$

меньше, чем $1/q$, и больше, чем $-1/q$, поэтому

$$\left|\alpha - \nu\theta - \frac{a-\nu p}{q}\right| < \frac{1}{q}. \tag{5.11.1}$$

Если m нечетно, тогда θ меньше чем p/q. Определим a выражением

$$\alpha = \frac{a}{q} - \delta \quad \left(0 \leqslant \delta < \frac{1}{q}\right),$$

и (5.11.1) по-прежнему истинно. Следовательно, в любом случае

$$\alpha - \nu\theta, \quad \frac{a-\nu p}{q} \tag{5.11.2}$$

различаются меньше чем на $1/q$. Но $(p, q) = 1$, и поэтому

$$\frac{a-\nu p}{q} = i_\nu + r_\nu,$$

где i_ν — целое число и r_ν пробегает в каком-то порядке значения

$$0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}.$$

Целые части чисел (5.11.2) могут различаться, только если существует целое число между числами, и это может происходить лишь тогда, когда $r_\nu = 0$, и, следовательно, лишь однажды. В этом случае разность

$$[\alpha - \nu\theta] - \left[\frac{a-\nu p}{q}\right]$$

равна 0 или -1. Назовем эту разность ε.

Следовательно,

$$\sum_0^{q-1}[\alpha - \nu\theta] = \sum_0^{q-1}\left[\frac{a-\nu p}{q}\right] + \varepsilon =$$

$$= \sum_0^{q-1}\frac{a-\nu p}{q} - \frac{1}{q} - \frac{2}{q} - \ldots - \frac{q-1}{q} + \varepsilon = a - \frac{1}{2}(p+1)(q-1) + \varepsilon,$$

$$S_\mu(q) = \sum_0^{q-1}\{\alpha - \nu\theta\} = \sum_0^{q-1}\Big(\alpha - \nu\theta - \frac{1}{2}\Big) - \sum_0^{q-1}[\alpha - \nu\theta] =$$

$$= q\Big(\alpha - \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}q(q-1)\theta - a + \frac{1}{2}(p+1)(q-1) - \varepsilon =$$

$$= q\alpha - a - \frac{1}{2}q(q-1)\Big(\theta - \frac{p}{q}\Big) - \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

$$|S_\mu(q)| \leqslant |q\delta| + \frac{1}{2}q^2 \cdot \frac{1}{q^2} + \frac{1}{2} + 1 < 3.$$

Это завершает доказательство (5.10.4) и (5.10.5).

5.12. Таким образом,

$$S(\eta) = O\left(\frac{\eta}{q_m}\right) + O(q_m).$$

Для любого заданного положительного δ и для любого достаточно большого η мы можем выбрать m так, чтобы

$$\frac{1}{\delta} < q_m < \delta\eta, \quad \frac{\eta}{q_m} + q_m < 2\delta\eta.$$

Следовательно, $S(\eta) = o(\eta)$ для всех иррациональных θ; и, как мы знаем, это эквивалентно (5.8.1).

Далее предположим, что θ принимает значение Рамануджана. Тогда

$$|2^q - 3^p| \geqslant 1 \tag{5.12.1}$$

для всех p, q. Т. е.

$$|1 - e^{p\log 3 - q\log 2}| \geqslant 2^{-q},$$

откуда следует, что

$$|q\theta - p| > A2^{-q} \tag{5.12.2}$$

для константы A и всех q.

Если p и q равны p_m и q_m, тогда

$$|q_m\theta - p_m| < \frac{1}{q_{m+1}},$$

и поэтому

$$q_{m+1} < A2^{q_m} < e^{Aq_m}.$$[1]

Мы можем выбрать m так, чтобы

$$q_m \leqslant \frac{\eta}{\log \eta} < q_{m+1}.$$

Тогда

$$e^{Aq_m} > q_{m+1} > \frac{\eta}{\log \eta}, \quad q_m < A \log \eta, \quad \frac{\eta}{q_m} + q_m < A \frac{\eta}{\log \eta},$$

и это доказывает (5.8.6).

Доказательство (5.8.5)

5.13. Осталось доказать (5.8.5). Это лишь небольшое улучшение по сравнению с (5.8.6) и, без сомнения, не является истиной в последней инстанции, поэтому может показаться странным, что мы настаиваем на этом. Но доказательство зависит от очень интересной теоремы Пиллаи (Pillai), и ради этой теоремы я включаю это доказательство.

Запишем последовательность

$$2, 3, 4, 8, 9, 16, 27, 32, 64, 81, \ldots,$$

образованную степенями 2 и 3 в порядке возрастания величины и назовем n-й член последовательности u_n. Тогда теорема Пиллаи утверждает, что $u_{n+1} - u_n$, n-й скачок в ряде, стремится к бесконечности почти так же быстро, как и u_n. Более точно, для любого заданного положительного δ

$$|2^x - 3^y| > 2^{(1-\delta)x}$$

для всех целых x и y с $x > x_0(\delta)$.

В частности, из этого следует, что уравнение

$$2^x - 3^y = k \tag{5.13.1}$$

имеет лишь конечное число целых решений для любого данного k. Это легче доказать. Очень широко известная теорема Тью (Thue) утверждает, что

$$AX^3 - BY^3 = l \tag{5.13.2}$$

[1] A, разумеется, не одни и те же.

(с любыми целыми A, B, l) имеет лишь конечное число решений. Если мы теперь положим

$$x = 3\xi + \rho, \quad y = 3\eta + \sigma \quad (\rho, \sigma = 0, 1, 2),$$

мы получим девять уравнений

$$2^{\rho}(2^{\xi})^3 - 3^{\sigma}(3^{\eta})^3 = k$$

вида (5.13.2), каждое из которых имеет лишь конечное число решений, и, следовательно, (5.13.1) также имеет лишь конечное число решений.

5.14. Пиллаи доказал более общую теорему, что *если* m, n, a, b — *заданные положительные целые числа*

$$am^x - bn^y \neq 0$$

для любых целых x *и* y, *и* δ *положительно, тогда*

$$|am^x - bn^y| > m^{(1-\delta)x}$$

для всех $x > x_0(\delta)$. Здесь $x_0(\delta)$, разумеется, зависит от m, n, a и b так же, как и от δ. Аналогично, K, которое возникает в доказательстве, может зависеть от m, n, a и b так же, как и от любого параметра, указанного в обозначениях.

Мы используем одну глубокую теорему Зигеля: *если* ξ — *алгебраическое число степени* r, *тогда существует* $A(\xi)$, *зависящее только от* ξ, *такое, что*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{A(\xi)}{q^{2r^{1/2}}}$$

для всех целых p *и* q. Существует похожая теорема Лиувилля, в которой вместо r стоит $2r^{1/2}$. Тью показал, что r можно заменить любым числом большим, чем $\frac{1}{2}r + 1$, но ни теорема Лиувилля, ни теорема Тью недостаточно сильны для доказательства теоремы Пиллаи. Существенным является наличие показателя, имеющего меньший порядок величины, чем r.

Предположим сейчас, что u и v — положительные целые числа, что a/b не являются в точности степенью r и что

$$\frac{1}{2}au^r < bv^r < au^r,$$

если

$$w = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/r} u = \alpha u,$$

тогда α не более чем алгебраическое число степени r и

$$au^r - bv^r = b(w^r - v^r) > brv^{r-1}(w-v) > K(r)u^{r-1}(w-v) = K(r)u^r\left(\alpha - \frac{v}{u}\right).$$

Следовательно,

$$au^r - bv^r > K(r)u^{r-2r^{1/2}} \tag{5.14.1}$$

по теореме Зигеля. Очевидно, что это также верно, если $0 < bv^r \leqslant \frac{1}{2}au^r$, поэтому это верно всегда, когда $au^r - bv^r$ положительно. Аналогично,

$$bv^r - au^r > K(r)v^{r-2r^{1/2}}, \tag{5.14.2}$$

когда оно положительно, и быстрое изучение показывает, что мы можем объединить (5.14.1) и (5.14.2) в виде

$$|au^r - bv^r| > K(r)z^{r-2r^{1/2}}, \tag{5.14.3}$$

где u и v — любые положительные числа, а z может быть u или v по нашему выбору[1]. $K(r)$, разумеется, зависит от a и b, также как и от r.

Теперь мы можем доказать теорему Пиллаи. Выберем δ маленьким и положительным и

$$r = \frac{16}{\delta^2}$$

и запишем

$$x = sr + h \quad (0 \leqslant h < r), \quad y = lr + l \quad (0 \leqslant l < r), \quad u = m^s, \quad v = n^l.$$

Тогда

$$|am^x - bn^y| = |am^h \cdot u^r - bn^l \cdot v^r| > K(r,\, h,\, l)u^{r-2r^{1/2}}$$

по (5.14.3), и поэтому

$$|am^x - bn^y| > K(\delta)u^{r-2r^{1/2}},$$

[1] Поскольку a/b не является r-й степенью, $au^r - bv^r$ не может равняться 0. Если оно имеет меньший порядок, чем u^r или v^r, тогда u и v имеют один и тот же порядок.

поскольку количество значений h и l зависит только от r, а r только от δ. Также

$$u^r = m^{x-h} > K(\delta)m^x,$$
$$u^{r-2r^{1/2}} = u^{(1-\delta/2)r} > K(\delta)m^{(1-\delta/2)x};$$

и поэтому

$$|am^x - bn^y| > K(\delta)m^{(1-\delta/2)x}.$$

Из этого следует, что

$$|am^x - bn^y| > m^{(1-\delta)x}$$

для $x > x_0(\delta)$, и в этом заключается теорема Пиллаи.

5.15. Теорема Пиллаи как раз достаточна для того, чтобы улучшить (5.8.6) до (5.8.5). Возвращаясь к доказательству §5.12, мы можем заменить (5.12.1) на

$$|2^q - 3^p| \geqslant 2^{q(1-\delta)}$$

(для любых положительных δ и достаточно больших p и q) и (5.12.2) на

$$|q\theta - p| > 2^{-\delta q} = e^{-\varepsilon q},$$

где $\varepsilon = \delta \log 2$. Следовательно,

$$q_{m+1} < e^{\varepsilon q_m}$$

для достаточно больших m. Выберем m так, чтобы

$$q_m \leqslant \frac{2\varepsilon\eta}{\log\eta} < q_{m+1}.$$

Тогда

$$q_m > \frac{1}{\varepsilon}\log q_{m+1} > \frac{1}{\varepsilon}(\log\eta - \log\log\eta + \log 2\varepsilon) > \frac{1}{2\varepsilon}\log\eta$$

для больших η и m и

$$q_m + \frac{\eta}{q_m} < \frac{4\varepsilon\eta}{\log\eta},$$

поэтому

$$S(\eta) = o\Big(\frac{\eta}{\log \eta}\Big).$$

Таким образом, мы заменили O из (5.8.6) на o. Это может показаться разочаровывающим, что использование таких сильных средств привело к столь малому улучшению конечного результата, но такие разочарования являются обычными в этой области анализа.

Комментарии к лекции V

§ 5.1. Два доказательства (5.1.1) находятся в Харди и Райт, 268–269.

Существенной сложностью задачи об окружности является проблема определения Θ, наименьшего значения ξ такого, что

$$N(x) = \pi x + O(x^{\xi+\varepsilon})$$

для любого положительного ε. Из (5.1.1) следует, что $\Theta \leqslant \frac{1}{2}$. Серпицкий доказал в 1906 г., что $\Theta \leqslant \frac{1}{3}$, ван дер Корпут (van der Corput), в 1923 г., что $\Theta < \frac{1}{3}$, Литтлвуд и Валфиц (Walfisz), в 1924 г., что $\Theta \leqslant \frac{37}{112}$. В другом направлении Харди и Ландау независимо доказали в 1915 г., что $\Theta \geqslant \frac{1}{4}$. Тщательное изучение задачи вплоть до текущего момента можно найти в Ландау, *Vorlesungen*, ii, 183–308.

С тех пор результаты были улучшены Ниландом (Nieland), Тичмаршем и Виноградовым. Наилучший результат принадлежит Виноградову — $\Theta \leqslant \frac{17}{53}$.

Дальнейшие ссылки можно найти в Боре и Крамере, *Enzykl. d. Math. Wiss*, II o 8 (1922), 823–824 и в двух статьях Тичмарша, *Quarterly Journal of Math.* (Oxford), 2 (1931), 161–173 и *Proc. London Math. Soc.*, (2), 38 (1935), 96–115 и 555. Статья Литтлвуда и Валфица опубликована в *Proc. Royal Soc.* (A), 106 (1924), 478–488.

§ 5.2. Доказательство Дирихле формулы (5.2.1) см., к примеру, в Харди и Райт, 262–263.

История этой задачи схожа с задачей об окружности, хотя современные исследователи в основном изучают последнюю. В этой задаче Θ — наименьшее ξ, для которого

$$N(x) = x \log x + (2\gamma - 1) + O(x^{\xi+\varepsilon}).$$

Из (5.2.1) следует, что $\Theta \leqslant \frac{1}{2}$. Вороной доказал в 1903 г., что $\Theta \leqslant \frac{1}{3}$, Харди и Ландау в 1916 г. — что $\Theta \geqslant \frac{1}{4}$ и ван дер Корпут в 1922 г. — что $\Theta < \frac{33}{100}$. Дальнейшие ссылки см. в статье Бора и Крамера, процитированной выше, 815–822.

Наилучший из известных результатов это, похоже, тот, что $\Theta \leqslant \frac{27}{82}$, доказанный ван дер Корпутом в более поздней статье в *Math., Annalen*, 98 (1928), 697–717.

§ 5.3. Одним из примеров служит формула

$$\sum_0^\infty \frac{r(n)}{\sqrt{n+a}}\, e^{-2\pi\sqrt{(n+a)b}} = \sum_0^\infty \frac{r(n)}{\sqrt{n+b}}\, e^{-2\pi\sqrt{(n+b)a}}. \tag{1}$$

Здесь a и b положительные, а $r(n)$ имеет тот же смысл, что и в § 5.1.

Формулу (1) легко доказать, записав ряды в левой части в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-ax-\pi^2 b/x} \Big\{ \sum r(n)\, e^{-nx} \Big\} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-ax-\pi^2 b/x} \vartheta^2(x) \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

где

$$\vartheta(x) = 1 + 2e^{-x} + 2e^{-4\pi x} + \dots,$$

и воспользовавшись функциональным уравнением

$$\vartheta(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, \vartheta\Big(\frac{\pi^2}{x}\Big).$$

Существует обобщение на эллипсоид, которое я привел в *Quarterly Journal of Math.*, 46 (1915), 283.

Формула остается верной, пока $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ имеют положительные вещественные части. Если мы положим $a = xe^{i\theta}$, где $0 < \theta < \pi$ и x положительное и нецелое, устремляя $\theta \to \pi$ и взяв мнимые части, а затем положив $b = 0$, получим

$$\sum_{0 \leqslant n < x} \frac{r(n)}{\sqrt{x-n}} = 2\pi\sqrt{x} + \sum_1^\infty \frac{r(n)}{\sqrt{n}}\, \sin\{2\pi\sqrt{nx}\}. \tag{2}$$

Эта формула так же получится, если положить $\alpha = -\frac{1}{2}$ в формуле для $\sum (x-n)^\alpha r(n)$, которую я доказал (при $\alpha > 0$) в статье в *Proc. London Math. Soc.* (2), 15 (1916), 192–213 (205). Никакой из этих выводов, разумеется, не

является *доказательством* (2), и я не знаю, существует ли какое-либо доказательство, представленное в литературе. Формула имеет тот же самый тип, что и тождество

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant x}{}' r(n) = \pi x + \sqrt{x}\sum_{1}^{\infty}\frac{r(n)}{\sqrt{n}}\,J_1\{2\pi\sqrt{nx}\}$$

(впервые доказанное в моей статье в *Quarterly Journal*, процитированной выше).

Мне кажется, что ряд в правой части (2) является суммируемым в смысле Чезара или Рисциана (Rieszian) для любого положительного порядка, пока x не является целым числом.

§ 5.4. *Труды*, xxiv (3).

§ 5.5. Основные статьи Харди и Литтлвуда опубликованы в *Proc. London Math. Soc.* (2), 20 (1922), 15–36 и *Abh. math. Semin. Hamburg*, 1 (1922), 212–249 и статья Островского в *Abh. math. Semin. Hamburg*, 1 (1922), 77–98 и 250–251. Изложение этих задач вместе с исчерпывающей библиографией см. в Коксма «Diophantische Approximationen», *Ergebnisse der Math.* IV 4 (1936), Кар. IX.

§ 5.8. Задача доказательства трансцендентности α^β при данных условиях является седьмой проблемой Гильберта в его докладе «Mathematische Probleme» на седьмом международном конгрессе математиков в Париже в 1900. Это выступление было опубликовано на немецком в *Göttinger Nachrichten* (1900), 253–297 и на французском под названием «Sur les problèmes futurs des mathématiques» в официальных тезисах конгресса (Париж, 1902). См. Коксма, *l.c. supra*, Кар. IV, в особенности, стр. 64–65, где приведены ссылки на статьи Гельфонда и Шнайдера.

§ 5.9. «Тождество» см. в теореме 4, второй статье Харди и Литтлвуда, на которую ссылались в § 5.5.

Доктор Хейлбронн (Heilbronn) сообщил свое доказательство лично мне.

§ 5.10. Обозначение для непрерывных дробей взято из Харди и Райт, глава X.

§§ 5.13–14. Теорема Пиллаи была доказана в *Journal Indian Math. Soc.*, 19 (1931), 1–11.

Pólya, *Math. Zeitschrift*, 1 (1918), 143–148 доказал общую теорему, из которой следует как частный случай, что (5.13.1) имеет лишь конечное число решений. Хершфельд, *Bull. Amer. Math. Soc.* 42 (1936), 231–234 доказал, что

существует не более одного решения, когда k достаточно велико. Другие результаты такого рода приведены в статье Пиллаи *Journal Indian Math. Soc.*, (2), 2 (1936), 119–122 и 215.

Теоремы Тью и Зигеля см. в Ландау, *Vorlesungen*, III, 37–56. Теорема Зигеля — Satz 691. Она сформулирована там в несколько ином виде и для $r \geqslant 3$, но она тривиальна, когда $r = 2$.

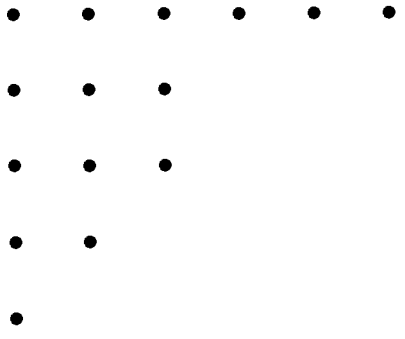
Лекция VI
Работы Рамануджана о разбиениях

6.1. *Разбиением* n называют представление n в виде произвольного числа положительных целых частей. Так,

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

имеет 5 разбиений. Порядок, в котором расположены части, несущественен, поэтому мы можем представлять их, если мы пожелаем это, расположенными по убыванию. Обозначим число разбиений числа n через $p(n)$; так, $p(1) = 1$ и $p(4) = 5$. Удобно определить $p(0) = 1$.

Разбиение n можно представить графически в виде массива точек или «узлов». Так,



представляет разбиение $6 + 3 + 3 + 1$ числа 15. Мы также можем рассматривать рисунок по столбцам, тогда он будет представлять собой разбиение $5 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1$. Два разбиения, связанные таким образом, называются *сопряженными*.

Наибольшая часть в каждом из этих разбиений равна числу частей в другом. В общем случае, рисунок с m строк представляет при горизонтальном рассмотрении разбиение на m частей, а при вертикальном — разбиение на части, наибольшая из которых равна m. Из этого

следует, что число разбиений n на m частей равно числу разбиений на части, наибольшая из которых равна m; и что число разбиений на не более чем m частей равно числу разбиений, отдельные части в которых не превосходят m.

6.2. Существует множество менее очевидных теорем о разбиениях, которые могут быть доказаны с помощью изучения их графических изображений. Я выберу в качестве примера красивое доказательство Ф. Франклина знаменитого тождества Эйлера.

Тождество Эйлера имеет вид

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \ldots \qquad (6.2.1)$$

Правая часть равна

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \{x^{k(3k-1)/2} + x^{k(3k+1)/2}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{k(3k+1)/2}.$$

Ее также можно записать в виде

$$1 + \sum_{1}^{\infty} c_n x^n,$$

где c_n равно $(-1)^k$, когда $n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1)$, а иначе 0.

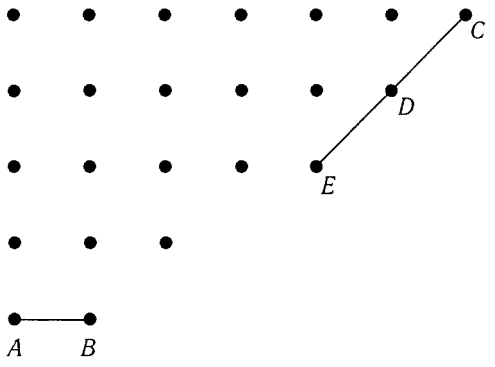
Давайте запишем

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = \sum \gamma(n) x^n$$

и перемножим произведение так, чтобы получить арифметическое представление коэффициента $\gamma(n)$. Для каждого разбиения n на неравные части найдется член при x^n, соответствующий этому разбиению: так, разбиение $6 = 3+2+1$ приводит к члену $(-1)^3 x^6$. В общем случае, разбиение n на μ неравных частей добавляет $(-1)^\mu$ к $\gamma(n)$, поэтому

$$\gamma(n) = p_e(n) - p_o(n),$$

где $p_e(n)$ и $p_o(n)$ — количество разбиений n с четным и нечетным числом неравных частей. Мы попытаемся установить, насколько сможем,

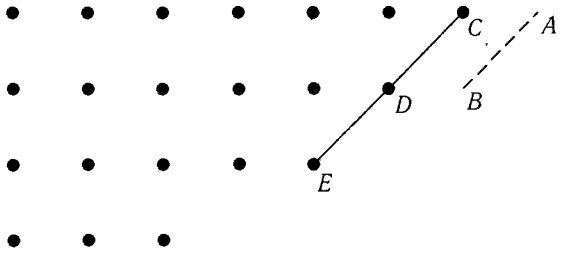


(G_1)

однозначное соответствие между разбиениями этих двух типов. Соответствие не может быть полным, поскольку полное соответствие покажет, что $p_e(n) = p_o(n)$ и $\gamma(n) = 0$ для каждого n.

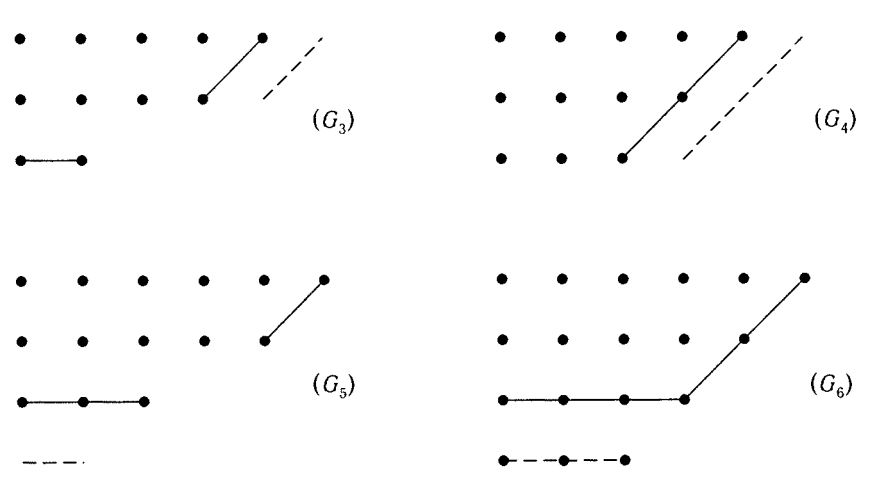
Мы возьмем граф G_1, который представляет (при горизонтальном рассмотрении) произвольное разбиение n на любое количество неравных частей в убывающем порядке. Назовем нижнюю линию AB *базой* β графа. С самого удаленного северо-восточного узла проведем в юго-западном направлении самую длинную линию, возможную в графе (она, разумеется, может содержать лишь один узел). Эту линию CDE мы назовем наклоном σ графа. Будем писать $\beta < \sigma$, когда (как в графе G_1) в σ больше узлов, чем в β, и будем использовать аналогичные обозначения в других случаях. Тогда возможны три случая.

(i) $\beta < \sigma$. Перенесем β в позицию параллельно и вне σ, как показано на графе G_2. Это приводит к новому разбиению на убывающие неравные части и на число таких частей, чья четность противоположна тому же числу в G_1.



(G_2)

Назовем эту операцию O и обратную операцию (убирание σ и помещение его под β) назовем Ω. Очевидно, что Ω невозможно, когда $\beta < \sigma$ без нарушения условия построения графа.



(ii) $\beta = \sigma$. В этом случае O возможно (как в графе G_3), если $\beta \neq \sigma$ (как в графе G_4), когда эта операция невозможна. Ω невозможно в том же случае.

(iii) $\beta > \sigma$. В этом случае O всегда невозможно. Ω возможно (как в графе G_5), если $\beta \neq \sigma$ и $\beta \neq \sigma + 1$ (как в графе G_6). Ω невозможно в последнем случае, поскольку она приведет к разбиению с двумя равными частями.

Подведем итог: существует (1, 1) соответствие между двумя типами разбиений, показанных в случаях на рисунках (G_4) и (G_6). В первом из этих исключительных случаев n имеет вид

$$k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (2k-1) = \frac{1}{2}(3k^2 - k),$$

и в этом случае четных или нечетных разбиений больше на единицу, в зависимости от того, четно или нечетно k. Во втором случае n имеет вид

$$(k+1) + (k+2) + (k+3) + \ldots + 2k = \frac{1}{2}(3k^2 + k),$$

с аналогичным преобладанием четных или нечетных разбиений. Таким

образом, $\gamma(n) = (-1)^k$, если $n = \frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, и $\gamma = 0$ иначе. Т. е. $\gamma(n) = c_n$, и в этом заключается теорема Эйлера.

6.3. Доказательство Франклина — поразительный пример того, что можно сделать с помощью элементарных «комбинаторных» аргументов; но большая часть теории разбиений требует более аналитических постановок.

Аналитическая теория была создана Эйлером и основана, как и аналитическая теория простых чисел, на идее *производящей функции*. Но производящие функции теории разбиений являются *степенными рядами*

$$F(x) = \sum f(n)x^n.$$

Функция $F(n)$, называемая производящей функцией для $f(n)$, также называется *перенумеровывающей* $f(n)$.

Легко обнаружить производящую функцию для $p(n)$. Это функция

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}$$

(функция фундаментальная в теории эллиптических функций). Действительно, раскладывая каждый множитель $F(x)$ по правилу бинома, получим

$$F(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)\dots,$$

и быстрое изучение показывает, что каждое разбиение n добавляет в точности единицу к x^n. Следовательно,

$$F(x) = \sum p(n)x^n.$$

Легко найти производящие функции, которые нумеруют разбиение n на части с различного рода ограничениями. Так,

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots}$$

нумерует разбиение на *нечетные* части;

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$$

— разбиение на *неравные* части; и

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\dots$$

разбиение на *нечетные и неравные* части. Произведение Эйлера

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$$

нумерует функцию $\gamma(n)$ из параграфа § 6.2., преобладания количества разбиений на четное число неравных частей над количеством разбиений на нечетное число неравных частей.

Аналогично, (я выбираю примеры, на которые буду ссылаться в дальнейшем)

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}$$

нумерует разбиение на части, не превосходящие m или (что эквивалентно, как мы видели раньше) на не более чем m частей;

$$\frac{x^N}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)}$$

нумерует количество разбиений $n-N$ на не больше чем m частей и

$$\frac{x^N}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2m})}$$

— число разбиений $n-N$ на не более чем m четных частей, или число разбиений $\frac{1}{2}(n-N)$ на не более чем m частей любого типа. Наконец,

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^9)\dots},$$

где степени x — числа $5m+1$ и $5m+4$, нумерует разбиение n на части этих двух видов.

Сравнения Рамануджана

6.4. Об арифметических свойствах $p(n)$ известно очень мало; к примеру, мы не знаем, когда $p(n)$ нечетное или четное. Рамануджан

был первым и, вплоть до последнего времени, единственным математиком, который обнаружил какие-либо подобные свойства, и его теоремы были открыты, на первый взгляд, с помощью наблюдения. МакМахон (MacMahon) вычислил для других целей, на которые я сошлюсь позже, таблицу $p(n)$ для первых 200 значений n, и Рамануджан обнаружил, что таблица показывает определенные простые свойства сравнимости $p(n)$. В частности, количества разбиений чисел $5m+4$, $7m+5$ и $11m+6$ делятся соответственно на 5, 7 и 11, т. е.

$$p(5m+4) \equiv 0 \pmod 5, \tag{6.4.1}$$

$$p(7m+5) \equiv 0 \pmod 7, \tag{6.4.2}$$

$$p(11m+6) \equiv 0 \pmod{11}. \tag{6.4.3}$$

Так, $p(4) = 5$ и $p(5) = 7$.

6.5. Рамануджан обнаружил сравнительно простые доказательства (6.4.1) и (6.4.2). Они зависят от двух формул, принадлежащих теории эллиптических функций, формулы Эйлера (6.2.1) и формулы Якоби

$$\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\}^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + \ldots, \tag{6.5.1}$$

где степени в правой части являются треугольными числами $\frac{1}{2}k(k+1)$. Мы доказали (6.2.1), но столь же простого доказательства (6.5.1) не существует. Мы можем также записать (6.5.1) как

$$\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\}^3 = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} 2(-1)^k(2k+1)x^{k(k+1)/2}.$$

Рамануджан дальше доказывает следующим образом. Имеем

$$\begin{aligned} x\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}^4 &= x\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}\cdot\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}^3 = \\ &= x(1-x-x^2+x^5+\ldots)(1-3x+5x^3-7x^6+\ldots), \end{aligned}$$

по формулам (6.2.1) и (6.5.1). Запишем это выражение как

$$x\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}^4 = \frac{1}{2}\sum\sum(-1)^{\mu+\nu}(2\nu+1)x^{1+\mu(3\mu+1)/2+\nu(\nu+1)/2}, \tag{6.5.2}$$

как μ, так и ν пробегают от $-\infty$ до $+\infty$, и рассмотрим, при каких условиях показатель степени x делится на 5. Для этого необходимо, чтобы

$$2(\mu+1)^2+(2\nu+1)^2=8\Big\{1+\frac{1}{2}\mu(3\mu+1)+\frac{1}{2}\nu(\nu+1)\Big\}-10\mu^2-5$$

также было кратно 5. Теперь

$$2(\mu+1)^2\equiv 0,\ 2,\ 3 \pmod 5$$

и

$$(2\nu+1)^2\equiv 0,\ 1,\ 4 \pmod 5,$$

что мы можем увидеть, пронумеровав возможные случаи; сумма одного остатка из каждого множества может равняться 0 или 5, только если все они равны 0. Следовательно, если показатель степени в (6.5.2) является кратным 5, коэффициент $2\nu+1$ также кратен 5, таким образом, *коэффициент* x^{5m+5} *в*

$$x\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}^4$$

кратен 5.

Далее, в биномиальном разложении

$$\frac{1}{(1-x)^5}$$

все коэффициенты делятся на 5 за исключением коэффициентов при $1,\ x^5,\ x^{10},\ \ldots,$ которые имеют остаток 1 (mod 5). Таким образом,

$$\frac{1}{(1-x)^5}\equiv\frac{1}{1-x^5} \pmod 5^{1}$$

или

$$\frac{1-x^5}{(1-x)^5}\equiv 1 \pmod 5.$$

Следовательно, коэффициент при x^{5m+5} в

$$x\,\frac{(1-x^5)(1-x^{10})\ldots}{(1-x)(1-x^2)\ldots}=x\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}^4\,\frac{(1-x^5)(1-x^{10})\ldots}{\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}^5}$$

[1] Соответствующие коэффициенты сравнимы (mod 5).

кратен 5, и поэтому то же верно и для

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots};$$

и этот коэффициент равен $p(5m+4)$.

Аналогичным способом можем доказать (6.4.2). В этом случае запишем

$$x^2\{(1-x)(1-x^2)\ldots\}^6 = x^2(1-3x+5x^3-7x^6+\ldots)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\sum\sum(-1)^{\mu+\nu}(2\mu+1)(2\nu+1)x^{2+\mu(\mu+1)/2+\nu(\nu+1)/2}$$

и заметим, что

$$(2\mu+1)^2+(2\nu+1)^2 = 8\Big\{2+\frac{1}{2}\mu(\mu+1)+\frac{1}{2}\nu(\nu+1)\Big\}-14$$

делится на 7, только если и $2\mu+1$, и $2\nu+1$ одновременно делятся на 7. Доказательство можно завершить тем же способом, что и раньше. Похоже, не существует никакого столь же простого доказательства (6.4.3).

6.6. Рамануджан пошел намного дальше. Он доказал сравнение по модулям 5^2, 7^2 и 11^2, сравнение для 5^2 имеет вид

$$p(25m+24) \equiv 0 \pmod{5^2},$$

и сделал общее предположение: *если*

$$\delta = 5^a 7^b 11^c$$

и

$$24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta},$$

то

$$p(m\delta+\lambda) \equiv 0 \pmod{\delta}$$

для каждого m. Достаточно будет доказать сравнение для частных случаев модулей 5^a, 7^b и 11^c. Общее сравнение будет их следствием.

Это предположение интенсивно исследовалось, и было обнаружено, что Рамануджан слишком сильно обобщил. Гупта (Gupta), продолжив вычисления МакМахона функции $p(n)$ до $n = 300$, обнаружил, что

$$p(243) = 133\,978\,259\,344\,888$$

— число, не делящееся на 7^3, и С. Чоула (S. Chowla) обнаружил, что

$$24\,243 \equiv 1 \pmod{7^2},$$

что противоречит гипотезе Рамануджана. С другой стороны, Кречмар (Krečmar) доказал сравнение

$$p(125m + 99) \equiv 0 \pmod{5^3},$$

а Ватсон — сравнение для общего случая 5^a, Д. Х. Лемер (D. H. Lehmer) проверил гипотезу в некоторых частных случаях для 11^3 и 11^4. Работа Лемера потребовала вычисления некоторых конкретных очень больших значений $p(n)$ с помощью метода, который я объясню в лекции VIII: наибольшее из них равно

$$\begin{aligned} p(14031) = {} & 92\,85303\,04759\,09931\,69434\,85156\,67127\,75089 \\ & 29160\,56358\,46500\,54568\,28164\,58081\,50403 \\ & 46756\,75123\,95895\,59113\,47418\,88383\,22063 \\ & 43272\,91599\,91345\,00745 \end{aligned} \tag{6.6.1}$$

— число, делящееся на 11^4.

6.7. Существует другое доказательство (6.4.1), которое намного сложнее приведенного мной, но которое более информативно и позволило Рамануджану намного глубже вникнуть в теорию эллиптических модулярных функций. В той же самой статье, в которой он доказал (6.4.1) и (6.4.2), Рамануджан сформулировал без доказательства два замечательных тождества

$$p(4) + p(9)x + p(14)x^2 + \ldots = 5\frac{\{(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{15})\ldots\}^5}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\}^6} \tag{6.7.1}$$

и

$$\begin{aligned} p(5) + p(12)x + p(17)x^2 + \ldots = {} & 7\,\frac{\{(1-x^7)(1-x^{14})(1-x^{21})\ldots\}^3}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\}^4} + \\ & + 49x\,\frac{\{(1-x^7)(1-x^{14})(1-x^{21})\ldots\}^7}{\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\}^8}. \end{aligned} \tag{6.7.2}$$

Из них (6.4.1) и (6.4.2) становятся интуитивно ясными, а также эти тождества служат доказательством сравнений по модулям 5^2 и 7^2. Таким образом, если мы предполагаем (6.7.1), то получим

$$\frac{p(4)x + p(9)x^2 + \dots}{5\{(1-x^5)(1-x^{10})\dots\}^4} = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)\dots}\,\frac{(1-x^5)(1-x^{10})\dots}{\{(1-x)(1-x^2)\dots\}^5}$$
$$\equiv \frac{x}{(1-x)(1-x^2)\dots} \pmod 5.$$

Следовательно (после того, что мы уже доказали), коэффициент при x^{5m+5} в левой части кратен 5, и из этого следует, что

$$p(25m+24) \equiv 0 \pmod{5^2}.$$

Аналогично из (6.7.2) получаем

$$p(49m+47) \equiv 0 \pmod{7^2}.$$

Рамануджан никогда не публиковал полного доказательства (6.7.1) или (6.7.2), но доказательства были получены Дарлингом и Морделлом (Darling и Mordell).

Тождество Роджерса–Рамануджана

6.8. Теперь я перейду к двум формулам, «тождествам Роджерса–Рамануджана», в которых Рамануджан был предвосхищен намного менее известным математиком, но которые, разумеется, столь же примечательны, как и все, что он когда-либо написал.

Тождества Роджерса–Рамануджана имеют вид

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)} + \dots + \frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)} + \dots =$$
$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^6)\dots(1-x^4)(1-x^9)\dots} \qquad (6.8.1)$$

и

$$1 + \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)} + \dots + \frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)} + \dots =$$
$$= \frac{1}{(1-x^2)(1-x^7)\dots(1-x^3)(1-x^8)\dots}. \qquad (6.8.2)$$

Показатели в знаменателях правой части в обоих случаях являются арифметическими прогрессиями с разностью 5. В этих формулах удивительно то, что «основные ряды» в левой части имеют сравнительно знакомый тип.

Формулы имеют очень любопытную историю. Впервые они были обнаружены в 1894 году Роджерсом, талантливым, но сравнительно малоизвестным математиком, которого сейчас вспоминают в основном благодаря переоткрытию Рамануджаном его работ. Роджерс был прекрасным аналитиком, чей талант, в меньшей степени, был подобен таланту Рамануджана, но никто не обращал большого внимания на то, что он сделал, и та работа, в которой он доказал формулы, прошла никем незамеченной.

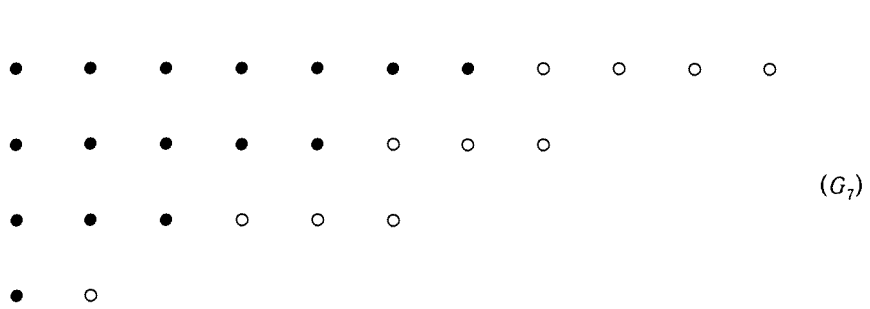
Рамануджан переоткрыл эти формулы когда-то до 1913 года. Тогда у него не было их доказательства (и он знал, что у него его нет), и никто из математиков, которым я показывал формулы, не мог найти доказательства. Поэтому они приведены без доказательства во втором томе *Комбинаторного анализа* МакМахона.

Загадка была разрешена трижды в 1917 году. В этом году Рамануджан, просматривая старые тома *Записок Лондонского математического общества*, неожиданно обнаружил работу Роджерса. Я хорошо помню его удивление и его восхищение работой Роджерса. В последовавшей переписке Роджерсу удалось, благодаря Рамануджану, сделать значительные упрощения его исходного доказательства. Примерно в тоже самое время И. Шур (I. Schur), который в то время был отрезан от Англии из-за войны, вновь переоткрыл тождества. Шур опубликовал два доказательства, одно из которых является «комбинаторным» и совершенно непохоже ни на какое другое из известных доказательств. Сейчас опубликовано семь доказательств, на четыре из которых я уже сослался, два намного более простых доказательства были обнаружены позже Роджерсом и Рамануджаном и опубликованы в *Сборнике работ*, и намного позже Ватсон получил доказательство, основанное на совершенно других идеях. Ни одно из доказательств нельзя назвать «простым» и «прямым», поскольку простейшим доказательством, в сущности, является проверка, и нет сомнения, что вряд ли следует ожидать очень простого доказательства.

6.9. МакМахон и Шур показали, что теоремы имеют простую комбинаторную интерпретацию. Возьмем первое тождество. Мы можем

представить квадрат m^2 как

$$1+3+5+\ldots+(2m-1),$$



(G_7)

или так, как показано черными точками на графе (G_7). Если теперь мы возьмем любое разбиение числа $n-m^2$ на не более чем m частей, с расположением частей в порядке убывания, и добавим их к графу, как показано с помощью кружочков на (G_7), где $m=4$ и $n=4^2+11=27$, мы получим разбиение n (здесь

$$27=11+8+6+2)$$

на части без повторений, или последовательностей[1], или *частей, минимальная разность между которыми равна* 2. Разбиения n такого типа, связанные с некоторыми m, можно перенумеровать с помощью

$$\frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)},$$

общего слагаемого ряда в левой части (6.8.1), и весь ряд нумерует все такие разбиения n.

С другой стороны, правая часть нумерует разбиения на числа $5m+$ $+1$ и $5m+4$. Следовательно, (6.8.1) можно переформулировать как «комбинаторную» теорему: *количество разбиений n с минимальной разницей* 2 *равно количеству разбиений на части* $5m+1$ *и* $5m+4$. Таким образом, когда $n=9$, существует 5 разбиений каждого типа:

$$9,\quad 8+1,\quad 7+2,\quad 6+3,\quad 5+3+1$$

[1] Частей, отличающихся на 1.

первого типа и

$$9,\quad 6+1+1+1,\quad 4+4+1,\quad 4+1+1+1+1+1,$$
$$1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

второго. Существует аналогичная комбинаторная интерпретация (6.8.2).

Формулировки этих теорем принадлежат МакМахону (или Шуру); ни Роджерс, ни Рамануджан никогда не рассматривали их комбинаторный аспект. Естественно спросить, а существует ли доказательство этих теорем с помощью «комбинаторных» аргументов, прямое соответствие между двумя множествами разбиений, но до сих пор ни одного такого доказательства неизвестно. «Комбинаторное» доказательство Шура базируется не на (6.8.1), а на преобразовании этой формулы, о котором я вскоре расскажу[1]. Оно схоже с доказательством Франклина формулы (6.2.1), но значительно сложнее.

6.10. Доказательства, приведенные Роджерсом и Рамануджаном, очень похожи, но доказательство Роджерса несколько более понятно.

Мы можем записать правую часть (6.8.1) в виде

$$\frac{1}{\prod\{(1-x^{5m+1})(1-x^{5m+4})\}}=\frac{\prod\{(1-x^{5m})(1-x^{5m+2})(1-x^{5m+3})\}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots};$$

числитель правой части можно преобразовать по стандартной формуле из теории тета-функций в

$$1-x^2-x^3+x^9+x^{11}-\ldots,$$

где показатели являются числами

$$\frac{1}{2}(5n^2\pm n)\quad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

Поэтому нам нужно доказать, что

$$1+\frac{x}{1-x}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)}+\ldots=\frac{1-x^2-x^3+x^9+x^{11}-\ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}. \quad (6.10.1)$$

[1] (6.10.1), в которой обе части умножены на $(1-x)(1-x^2)\ldots$

Аналогично, (6.8.2) эквивалентно

$$1+\frac{x^2}{1-x}+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)}+\ldots=\frac{1-x-x^4+x^7+x^{13}-\ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}, \quad (6.10.2)$$

и показатели в числителе в правой части являются числами $\frac{1}{2}(5n^2\pm 3n)$.

6.11. Воспользуемся вспомогательной функцией

$$G_k=G_k(a,\,x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{2n}x^{n(5n+1)/2-kn}(1-a^kx^{2kn})C_n, \quad (6.11.1)$$

где k принимает значения 0, 1 или 2 и

$$C_0=1, \quad C_n=\frac{(1-a)(1-ax)\ldots(1-ax^{n-1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}.$$

Поэтому

$$G_k=(1-a^k)C_0-a^2x^{3-k}(1-a^kx^{2k})C_1+a^4x^{11-2k}(1-a^kx^{4k})C_2-\ldots \quad (6.11.2)$$

Если $a\neq 0$, тогда $G_0=0$ для всех x. Также

$$G_1(x,\,x)=1-x-x^4+x^7+x^{13}-\ldots \quad (6.11.3)$$

и

$$G_2(x,\,x)=1-x^2-x^3+x^9+x^{11}-\ldots \quad (6.11.4)$$

— ряды, которые возникают в (6.10.2) и (6.10.1).

Если оператор η определен по формуле

$$\eta f(a,\,x)=f(ax,\,x),$$

тогда

$$\eta C_n=\frac{(1-ax)\ldots(1-ax^n)}{(1-x)\ldots(1-x^n)}=\frac{1-ax^n}{1-a}C_n \quad (6.11.5)$$

и

$$\eta C_{n-1}=\frac{(1-ax)\ldots(1-ax^{n-1})}{(1-x)\ldots(1-x^{n-1})}=\frac{1-x^n}{1-a}C_n. \quad (6.11.6)$$

Следовательно,

$$(1-x^n)C_n=(1-a)\eta C_{n-1},\quad (1-ax^n)C_n=(1-a)\eta C_n, \tag{6.11.7}$$

и, в частности,

$$\eta C_0=C_0=1.$$

Если k равно 1 или 2, то

$$G_k-G_{k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{2n}x^{n(5n+1)/2-kn}\{1-a^kx^{2kn}-x^k(1-a^{k-1}x^{2(k-1)n})\}C_n=$$

$$=a^{k-1}(1-a)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a^{2n}x^{n(5n+1)/2-kn}\{(1-x^k)+a^{k-1}x^{(2k-1)n}(1-ax^n)\}C_n=$$

$$=a^{k-1}(1-a)\eta C_0+(1-a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a^{2n}x^{n(5n+1)/2-kn}\{\eta C_{n-1}+a^{k-1}x^{(2k-1)n}\eta C_n\},$$

ввиду (6.11.7). Когда мы перепишем этот ряд в терминах ηC_0, ηC_2, ..., коэффициент при ηC_n примет вид

$$(-1)^n(1-a)\{a^{2n+k-1}x^{n(5n+1)/2+(k-1)n}-a^{2n+2}x^{(n+1)(5n+6)/2-k(n+1)}\}=$$
$$=(-1)^n(1-a)a^{2n+k-1}x^{n(5n+1)/2+(k-1)n}\{1-a^{3-k}x^{(3-k)(2n+1)}\}.$$

Следовательно,

$$G_k-G_{k-1}=(1-a)a^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{2n}x^{n(5n+1)/2+(k-1)n}\{1-a^{3-k}x^{(3-k)(2n+1)}\}\eta C_n.$$

Но

$$G_{3-k}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{2n}x^{n(5n+1)/2-(3-k)n}\{1-a^{3-k}x^{(3-k)2n}\}C_n,$$

и поэтому

$$\eta G_{3-k}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{2n}x^{n(5n+1)/2+(k-1)n}\{1-a^{3-k}x^{(3-k)(2n+1)}\}C_n;$$

следовательно,

$$G_k-G_{k-1}=(1-a)a^{k-1}\eta G_{3-k}\quad (k=1,2). \tag{6.11.8}$$

6.12. Если теперь

$$H_k = H_k(a,\, x) = \frac{G_k(a,\, x)}{(1-a)(1-ax)(1-ax^2)\dots}$$

(так чтобы $H_0 = 0$), тогда (6.11.8) принимает вид

$$H_k - H_{k-1} = a^{k-1}\eta H_{3-k}.$$

В частности,

$$H_1 = \eta H_2, \quad H_2 - H_1 = a\eta H_1, \tag{6.12.1}$$

и поэтому

$$H_2 = \eta H_2 + a\eta^2 H_2. \tag{6.12.2}$$

Предположим теперь, что

$$H_2 = 1 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots,$$

где коэффициенты зависят только от x. Подставляя в (6.12.2), получим

$$1 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots = 1 + c_1 ax + c_2 a^2 x^2 + \dots + a(1 + c_1 ax^2 + c_2 a^2 x^4 + \dots).$$

Следовательно, приравнивая коэффициенты,

$$c_1 = \frac{1}{1-x}, \quad c_2 = \frac{x^2}{1-x^2}c_1, \quad c_3 = \frac{x^4}{1-x^3}c_2, \quad \dots$$

и

$$c_n = \frac{x^{n(n-1)}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)};$$

поэтому

$$\frac{G_2(a,\, x)}{(1-a)(1-ax)\dots} = H_2(a,\, x) = 1 + \frac{a}{1-x} + \frac{a^2x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \\ + \frac{a^3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots$$

Также

$$\frac{G_1(a,\, x)}{(1-a)(1-ax)\dots} = H_1(a,\, x) = \eta H_2(a,\, x) = 1 + \frac{ax}{1-x} + \\ + \frac{a^2x^4}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{a^3x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots$$

Наконец, полагая $a = x$ в этих формулах и используя (6.11.4) и (6.11.3), мы получим (6.10.1) и (6.10.2).

Это доказательство является элементарным и сравнительно простым, но, разумеется, достаточно искусственным. Оно представляет собой «проверку»; мы проверяем, что ряд (6.11.1) удовлетворяет функциональным уравнениям, и доказательство не дает никаких объяснений о нашем выборе этого частного ряда.

6.13. Существует еще одно доказательство Роджерса, в котором предполагается меньше, но которое в действительности является более ясным[1].

Сократим запись наших формул с помощью следующих обозначений:

$$x_n = 1 - x^n, \quad x_n\,! = x_1 x_2 \dots x_n,$$

и начнем с разложения функции

$$f(a) = \prod_1^\infty (1 + ax^n)$$

по степеням a. Функция удовлетворяет соотношению

$$f(a) = (1 + ax) f(ax).$$

Подставляя в $f(a)$ степенной ряд по степеням a и приравнивая коэффициенты, мы сразу получаем, что

$$f(a) = 1 + \frac{x}{x_1\,!}a + \frac{x^3}{x_2\,!}a^2 + \dots + \frac{x^{n(n+1)/2}}{x_n\,!}a^n + \dots$$

Заменяя a на $ae^{i\theta}$ и $ae^{-i\theta}$ и перемножая получившиеся ряды, получаем, что

$$\Phi(x, \theta, a) = \prod_1^\infty (1 + 2ax^n \cos\theta + a^2 x^{2n}) =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{x_1\,!}ae^{i\theta} + \frac{x^3}{x_2\,!}a^2 e^{2i\theta} + \dots\right)\left(1 + \frac{x}{x_1\,!}ae^{-i\theta} + \frac{x^3}{x_2\,!}a^2 e^{-2i\theta} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \sum_1^\infty \frac{B_n(\theta)}{x_n\,!}a^n, \quad (6.13.1)$$

[1] Доказательство в § 10–12 формулы (6.10.1) ничего не предполагает, хотя требуются некоторые знания из теории тета-функций, для того чтобы отождествить (6.8.1) и (6.10.1). В доказательстве в текущем параграфе мы воспользуемся формулой из теории тета-функций.

где

$$\frac{B_{2n}(\theta)}{x_{2n}!} = \frac{x^{n(n+1)}}{x_n!\,x_n!}\Big(1 + \frac{x_n}{x_{n+1}}2x\cos 2\theta + \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n+1}x_{n+2}}2x^4\cos 4\theta + \ldots + \\ + \frac{x_n x_{n-1}\ldots x_1}{x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{2n}}2x^{n^2}\cos 2n\theta\Big), \quad (6.13.2)$$

$$\frac{B_{2n+1}(\theta)}{x_{2n+1}!} = \frac{x^{(n+1)^2}}{x_n!\,x_{n+1}!}\Big(2\cos\theta + \frac{x_n}{x_{n+2}}2x^2\cos 3\theta + \\ + \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n+2}x_{n+3}}2x^6\cos 5\theta + \ldots + \frac{x_n x_{n-1}\ldots x_1}{x_{n+2}x_{n+3}\ldots x_{2n+1}}2x^{n(n+1)}\cos(2n+1)\theta\Big). \quad (6.13.3)$$

Наконец, заменяя a в (6.13.1) на $x^{-1/2}$ и используя стандартную формулу из теории тета-функций, а именно

$$\Phi(x,\,\theta,\,x^{-1/2}) = \prod(1 + 2x^{n-1/2}\cos\theta + x^{2n-1}) = \\ = \frac{1 + 2x^{1/2}\cos\theta + 2x^{4/2}\cos 2\theta + 2x^{9/2}\cos 3\theta + \ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots},$$

мы тем самым получаем

$$\frac{1 + 2x^{1/2}\cos\theta + 2x^{4/2}\cos 2\theta + 2x^{9/2}\cos 2\theta + \ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = 1 + \sum_1^\infty \frac{B_n(\theta)}{x_n!}x^{-n/2}. \quad (6.13.4)$$

6.14. Если мы заменим $B_n(\theta)$ в (6.13.4) его явным выражением (6.13.2) или (6.13.3) и переставим слагаемые в правой части, чтобы получился тригонометрический ряд, мы получим равенство двух сходящихся тригонометрических рядов. Такое равенство должно быть тождеством, коэффициенты при $\cos n\theta$ в двух рядах должны быть одинаковыми. Следовательно, *мы можем заменить*

$$1,\ 2\cos\theta,\ 2\cos 2\theta,\ 2\cos 3\theta,\ \ldots$$

любыми числами, при которых ряды останутся сходящимися.

Если мы заменим

$$1,\ 2\cos 2\theta,\ 2\cos 4\theta,\ \ldots,\ 2\cos 2n\theta,\ \ldots$$

на

$$1,\ -(1+x),\ x(1+x^2),\ \ldots,\ (-1)^n x^{n(n-1)/2}(1+x^n),\ \ldots$$

и все нечетные косинусы на 0, тогда $B_{2n}(\theta)$ принимают вид

$$\beta_{2n} = \frac{x_{2n}!}{x_n!\,x_n!}x^{n(n+1)}\Big\{1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}x(1+x) + \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n+1}x_{n+2}}x^5(1+x^2) - \ldots + \\ + (-1)^n\frac{x_n x_{n-1}\ldots x_1}{x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{2n}}x^{n(3n-1)/2}(1+x^n)\Big\}, \quad (6.14.1)$$

и мы получим

$$1 + \frac{\beta_2}{x_2!}x^{-1} + \frac{\beta_4}{x_4!}x^{-2} + \ldots = \frac{1 - x^2 - x^3 + x^9 + x^{11} - \ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}, \quad (6.14.2)$$

где правая часть совпадает с правой частью (6.10.1). С другой стороны, если мы заменим

$$2\cos\theta,\ 2\cos 3\theta,\ \ldots,\ 2\cos(2n+1)\theta,\ \ldots$$

на

$$(1-x),\ -(1-x^3),\ \ldots,\ (-1)^n x^{n(n-1)/2}(1-x^{2n+1})$$

и все четные косинусы на 0, тогда $B_{2n+1}(\theta)$ принимают вид

$$\beta_{2n+1} = \frac{x_{2n+1}!}{x_n!\,x_{n+1}!}x^{(n+1)^2}\Big\{1 - \frac{x_n}{x_{n+2}}x^2(1-x^3) + \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n+2}x_{n+3}}x^7(1-x^5) - \ldots + \\ + (-1)^n\frac{x_n x_{n-1}\ldots x_1}{x_{n+2}x_{n+3}\ldots x_{2n+1}}x^{n(3n+1)/2}(1-x^{2n+1})\Big\}. \quad (6.14.3)$$

Умножая на $x^{-1/2}$, получим

$$\frac{\beta_1}{x_1!}x^{-1} + \frac{\beta_3}{x_3!}x^{-2} + \ldots = \frac{1 - x - x^4 + x^7 + x^{13} - \ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}, \quad (6.14.4)$$

где правая часть совпадает с правой частью (6.10.2). Остается доказать, что ряды в левой части (6.14.2) и (6.14.4) совпадают с рядами в левых частях (6.10.1) и (6.10.2).

6.15. Мы можем сделать это, вычислив β_n элементарным способом. Но перед тем, как мы займемся этим, отметим, что подстановки

в § 6.14 соответствуют линейным аналитическим преобразованиям. Таким образом, если $x = e^{-\delta}$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\theta^2/\delta} \cos\theta \cdot 2\cos 2n\theta \cdot d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\theta^2/\delta} \{\cos(2n-1)\theta + \cos(2n+1)\theta\}\, d\theta =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\pi\delta}\{e^{-(2n-1)^2\delta/2} + e^{-(2n+1)^2\delta/2}\} = \sqrt{\pi\delta/2}\, x^{1/\delta} \cdot x^{n(n-1)/2}(1+x^n).$$

Следовательно, первая подстановка § 6.14 соответствует результату (i) при замене θ на $\theta + \frac{1}{2}\pi$ и (ii) при работе с

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\delta}}\, x^{-1/\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\theta^2/\delta} \cos\theta \ldots\, d\theta.$$

Аналогично можно проверить, что вторая подстановка является результатом (i) при замене θ на $\theta + \frac{1}{2}\pi$ и (ii) при работе с

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi\delta}}\, x^{-1/\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\theta^2/\delta} \sin 2\theta \ldots\, d\theta.$$

6.16. Теперь запишем

$$\beta_{2n} = \frac{x_{2n}!}{x_n!\, x_n!} x^{n(n+1)} \gamma_{2n}, \quad \beta_{2n+1} = \frac{x_{2n+1}!}{x_n!\, x_{n+1}!} x^{(n+1)^2} \gamma_{2n+1} \qquad (6.16.1)$$

и докажем, что

$$\gamma_{2n} = x_n!, \quad \gamma_{2n+1} = x_{n+1}!. \qquad (6.16.2)$$

Тогда получим

$$\beta_{2n} = x^{n(n+1)} x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n}, \quad \beta_{2n+1} = x^{(n+1)^2} x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n+1}, \qquad (6.16.3)$$

и можно сразу проверить, что ряды в левых частях (6.14.2) и (6.14.4) сводятся к рядам Роджерса–Рамануджана.

Для доказательства (6.16.2) достаточно показать, что

$$\gamma_{2n+1} = x_{n+1}\gamma_{2n}, \quad \gamma_{2n+2} = \gamma_{2n+1}. \qquad (6.16.4)$$

Теперь

$$\gamma_{2n} = 1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\,x(1+x) + \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n+1}x_{n+2}}\,x^5(1+x^2) -$$

$$- \frac{x_n x_{n-1} x_{n-2}}{x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}}\,x^{12}(1+x^3) + \ldots = \left(1 - x\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) - x^2\frac{x_n}{x_{n+1}}\left(1 - x^3\frac{x_{n-1}}{x_{n+2}}\right) +$$

$$+ x^7\frac{x_n x_{n-1}}{x_{n+1}x_{n+2}}\left(1 - x^5\frac{x_{n-2}}{x_{n+3}}\right) - \ldots = \frac{1}{x_{n+1}}(1-x) - x^2\frac{x_n}{x_{n+1}x_{n+2}}(1-x^3) +$$

$$+ x^7\frac{x_n x_{n-1}}{x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}}(1-x^5) - \ldots = \frac{\gamma_{2n+1}}{x_{n+1}}$$

и

$$\gamma_{2n+1} = (1-x) - \frac{x_n}{x_{n+2}}\,x^2(1-x^3) + \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n+2}x_{n+3}}\,x^7(1-x^5) -$$

$$- \frac{x_n x_{n-1} x_{n-2}}{x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4}}\,x^{15}(1-x^7) + \ldots = 1 - x\left(1 + x\frac{x_n}{x_{n+2}}\right) +$$

$$+ x^5\frac{x_n}{x_{n+2}}\left(1 + x^2\frac{x_{n-1}}{x_{n+3}}\right) - x^{12}\frac{x_n x_{n-1}}{x_{n+2}x_{n+3}}\left(1 + x^3\frac{x_{n-2}}{x_{n+4}}\right) + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}x(1+x) + \frac{x_{n+1}x_n}{x_{n+2}x_{n+3}}x^5(1+x^2) - \frac{x_{n+1}x_n x_{n-1}}{x_{n+2}x_{n+3}x_{n+4}}x^{12}(1+x^3) + \ldots =$$

$$= \gamma_{2n+2}.$$

Это необходимые соотношения.

Уравнения (6.16.2) представляют собой

$$1 - \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}\,x(1+x) + \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})}{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}\,x^5(1+x^2) - \ldots =$$

$$= (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n) \quad (6.16.5)$$

и

$$(1-x) - \frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}\,x^2(1-x^3) + \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})}{(1-x^{n+2})(1-x^{n+3})}\,x^7(1-x^5) - \ldots =$$

$$= (1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{n+1}). \quad (6.16.6)$$

Каждое из них сводится при $n \to \infty$ к

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \ldots = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$$

— тождество Эйлера; и аргументы этого параграфа представляют собой особенно простое доказательство этого тождества. Позже мы получим формулы (6.16.5) и (6.16.6) несколько другим способом[1].

6.17. Из (6.12.2) следует (или можно непосредственно проверить), что

$$F(a) = H_1(a, x) = 1 + \frac{ax}{1-x} + \frac{a^2x^4}{(1-x)(1-x^2)} + \dots$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(a) = F(ax) + axF(ax^2).$$

Следовательно,

$$\frac{F(a)}{F(ax)} = 1 + ax\,\frac{F(ax^2)}{F(ax)} = 1 + \frac{ax}{1 + ax^2\,\dfrac{F(ax^3)}{F(ax^2)}} = 1 + \frac{ax}{1+}\,\frac{ax^2}{1+}\,\frac{ax^3}{1+\dots}.$$

В частности,

$$1 + \frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{1+}\,\frac{x^3}{1+\dots} = \frac{F(1)}{F(x)} = \frac{(1-x^2)(1-x^7)\dots(1-x^3)(1-x^8)\dots}{(1-x)(1-x^6)\dots(1-x^4)(1-x^9)\dots} =$$
$$= \frac{1 - x^2 - x^3 + x^9 + x^{11} - \dots}{1 - x - x^4 + x^7 + x^{13} - \dots}$$

является частным эллиптических тета-функций, которые можно вычислить при определенных особых значениях x. Эта формула служит ключом к вычислению Рамануджаном непрерывной дроби для особых значений x, которые я процитировал в моей первой лекции.

Комментарии к лекции VI

Эта лекция содержит значительную часть материала главы 19 книги Харди и Райт, и неизбежно здесь присутствует определенное количество повторений, но изложение этой лекции, естественно, является менее систематичным. В книге Харди и Райт не содержится ничего соответствующего §6.13–16.

[1] См. лекцию VII, §7.8.

§ 6.2. См. Харди и Райт, § 19.11, или МакМахон, *Комбинаторный анализ*, с. 21–23. Доказательство Франклина впервые было опубликовано в *Comptes rendus*, 92 (1881), 448–450.

И Харди и Райт, и МакМахон приводят другие примеры «графических» доказательств.

§ 6.3. Для более строгого доказательства того, что $F(x)$ перечисляет $p(n)$, см. Харди и Райт, § 19.3.

§ 6.4–5. Сравни с Харди и Райт, § 19.12, где, однако, отсутствует доказательство (6.4.2). Существуют альтернативные доказательства (6.4.1) и (6.4.2) и доказательство (6.4.3) в статье №30 из *Сборника работ* Рамануджана. Дарлинг (**3**) привел еще одно доказательство (6.4.1) и (6.4.2).

В статье МакМахона (**2**) содержится несколько интересных замечаний о четности $p(n)$. МакМахон не доказал ни одной общей теоремы, но привел рекуррентные сравнения $\pmod 2$, из которых можно очень быстро вычислить четность $p(n)$ для достаточно больших n. Так, он доказал в «примерно пятиминутных вычислениях», что $p(1000)$ нечетно.

Одно из стандартных доказательств (6.5.1) воспроизводится в Харди и Райт, § 19.9.

§ 6.6–7. Доказательство Рамануджана сравнений по модулям 5^2, 7^2 и 11^2 содержится в неопубликованной рукописи, которая сейчас находится у профессора Ватсона. Дарлинг (**2**) приводит доказательство (6.7.1), а Морделл (Mordell) (**1**) – намного более короткие доказательства (6.7.1) и (6.7.2).

Ссылки на работу Чоула (Chowla), Гупта (Gupta), Кречмара (Kreč̌mar), Лемера (Lehmer) и Ватсона соответственно С. Чоула (**1**); Гупта (**1, 2, 3**); Кречмар (**1**); Д. Г. Лемер (**1, 3**) и Ватсон (**24**).

§ 6.8. Роджерс (**1**): тождества являются формулами (1) и (2) § 5. Роджерс также предвосхитил «неравенство Гельдера» (и цитируется Гельдером), но он не записал его в стандартном виде и не осознал его фундаментального значения. См. Харди, Литтлвуд и Пойя, *Неравенства*, 25 и 311.

Два более поздних доказательства Роджерса содержатся в его статьях (**2**) и (**4**): в последней из них содержится доказательство, приведенное в § 6.10–6.12, а в первой – приведенное в § 6.13–6.16.

Само доказательство Рамануджана см. в №26 *Сборника работ*. Два доказательства Шура были опубликованы в *Berliner Sitzungsberichte* (1917), 301–321, а доказательство Ватсона – в Ватсон (**3**).

Кажется, Рамануджан не приводил формул в явном виде в своих письмах ко мне, но формулы IX, (4)-(7) его первого письма зависят от них. См. лекцию I, формулы (1.10)–(1.12); *Сборник работ*, xxvii и Ватсон (**4**). Рамануджан предложил эти формулы в качестве задачи в *Журнал Индийского математического общества*, 6 (1914), 199; см. *Сборник работ*, 330.

§ 6.9. См. Харди и Райт, § 19.13, и МакМахон, *Комбинаторный анализ*, ii, 33–36.

§ 6.10–6.12. См. Харди и Райт, § 19.4. Формулы из теории тета-функций, необходимые в начале доказательства, доказаны в § 19.8–19.9 (теоремы 355 и 356).

§ 6.13. Разложение $f(a)$ по степеням a восходит к Эйлеру. Формула из теории тета-функций доказана в Харди и Райт, § 19.8, или в любом из стандартных учебников по эллиптическим функциям.

§ 6.17. См. лекцию I, формулы (1.10)–(1.12). Доказательства приведены в Ватсон (**4**).

Лекция VII
Гипергеометрические ряды

7.1. Результаты Рамануджана о гипергеометрических рядах содержатся в двух главах его записной книжки, которую я проанализировал и отредактировал после его смерти. В результате этого анализа произошло небольшое наводнение публикаций Лондонского математического общества работами Бейли, Ватсона, Випла и др. Превосходное изложение результатов всех этих исследований см. в трактате Бейли.

Задача, которая является основной в 10-й главе записной книжки, — это суммирование ряда

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\\ \beta_1,\ \beta_2\end{matrix}\right)=1+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{1\cdot\beta_1\beta_2}+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\alpha_3(\alpha_3+1)}{1\cdot 2\cdot\beta_1(\beta_1+1)\beta_2(\beta_2+1)}+\dots, \tag{7.1.1}$$

и глава содержит практически все, что и было известно об этом ряде до 1922 года. Когда $\beta_2=\alpha_3$, ряд сводится к обычному гипергеометрическому ряду и его сумма определяется формулой Гаусса

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2\\ \beta_1\end{matrix}\right)=1+\frac{\alpha_1\alpha_2}{1\cdot\beta_1}+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)}{1\cdot 2\cdot\beta_1(\beta_1+1)}+\dots=$$
$$=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_1-\alpha_1-\alpha_2)}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\Gamma(\beta_1-\alpha_2)}.^{1} \tag{7.1.2}$$

Нам потребуется использование гипергеометрических рядов более высокого порядка, и я начну с объяснения стандартных обозначений. Запишем

$$a^{(n)}=a(a+1)\dots(a+n-1),\quad a_{(n)}=a(a-1)\dots(a-n+1)$$

[1] Здесь и далее я игнорирую вопросы сходимости. Читатель должен уметь получать условия, при которых цитируемые или доказываемые мною формулы корректны.

и

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p\\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_q\end{matrix};\ x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{(n)}\alpha_2^{(n)}\ldots\alpha_p^{(n)}}{n!\beta_1^{(n)}\beta_2^{(n)}\ldots\beta_q^{(n)}}\,x^n. $$

Этот ряд обычно сходится для всех x, если $p\leqslant q$, и для $|x|<1$, когда $p=q+1$. Когда $p>q+1$, ряд расходится для всех x, за исключением тех случаев, когда $\alpha=0$ или отрицательное целое число. Мы будем обычно опускать первый аргумент, когда $x=1$. Таким образом,

$$ F\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\\ \beta_1,\ \beta_2\end{matrix}\right)={}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\\ \beta_1,\ \beta_2\end{matrix}\right)={}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\\ \beta_1,\ \beta_2\end{matrix};\ 1\right). $$

7.2. Ключевой формулой главы является

$$ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(s+2n)\frac{s^{(n)}(x+y+z+u+2s+1)^{(n)}}{n!(x+y+z+u+s)_{(n)}}\prod_{x,\,y,\,z,\,u}\frac{x_{(n)}}{(x+s+1)^{(n)}}= $$

$$ =\frac{s}{\Gamma(s+1)\Gamma(x+y+z+u+s+1)}\prod_{x,\,y,\,z,\,u}\frac{\Gamma(x+s+1)\Gamma(y+z+u+s+1)}{\Gamma(z+u+s+1)}, \tag{7.2.1} $$

где один из пяти аргументов

$$ x,\ y,\ z,\ u,\ -x-y-z-u-2s-1 \tag{7.2.2} $$

является положительным целым числом. Если это условие (которые является существенным) удовлетворяется, тогда ряд обрывается и формула представляет собой алгебраическое тождество. Вся глава, в действительности, по сути своей является главой об элементарной формальной алгебре. Мы изучаем сначала тождества между полиномами. Из них мы выводим тождества между бесконечными рядами, при этом потребуются переходы к пределу, и хотя некоторые из них интересны с некоторой точки зрения, они не представляют никакой серьезной трудности для компетентного специалиста по математическому анализу.

Похоже, что Рамануджан получил эти формулы в 1910 или в 1911 году, но его опередил Доугалл (Dougall). Формула выглядит достаточно сложно, но доказательство Доугалла является очень простым. Я полагаю, что Рамануджан доказал формулу аналогичным образом[1], но доказательство не приводится в его записных книжках.

[1]Проверка частных случаев, которые собраны вместе подходящим образом, приводит к строгому доказательству.

Если мы заметим, что

$$a_{(n)} = (-1)^n(-a)^{(n)}$$

и

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2}s\right)^{(n)}}{\left(\frac{1}{2}s\right)^{(n)}} = \frac{s+2n}{s},$$

мы можем записать (7.2.1) в виде

$$ {}_7F_6\left(\begin{matrix} s,\ 1+\frac{1}{2}s,\ -x,\ -y,\ -z,\ -u,\ x+y+z+u+2s+1 \\ \frac{1}{2}s,\ x+s+1,\ y+s+1,\ z+s+1,\ u+s+1,\ -x-y-z-u-s \end{matrix}; 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+1)\Gamma(x+y+z+u+s+1)} \prod_{x,\,y,\,z,\,u} \frac{\Gamma(x+s+1)\Gamma(y+z+u+s+1)}{\Gamma(z+u+s+1)}. \tag{7.2.3}$$

Если мы запишем $-v$ вместо $x+y+z+u+2s+1$ так, что

$$x+y+z+u+v = -2s-1, \tag{7.2.4}$$

тогда формула принимает вид

$$ {}_7F_6\left(\begin{matrix} s,\ 1+\frac{1}{2}s,\ -x,\ -y,\ -z,\ -u,\ -v \\ \frac{1}{2}s,\ x+s+1,\ y+s+1,\ z+s+1,\ u+s+1,\ v+s+1 \end{matrix}; 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+1)\Gamma(x+y+z+u+s+1)} \prod_{x,\,y,\,z,\,u} \frac{\Gamma(x+s+1)\Gamma(y+z+u+s+1)}{\Gamma(z+u+s+1)}. \tag{7.2.5}$$

Очевидно, что левая часть равенства симметрична по переменным x, y, z, u, v. Правая часть равенства симметрична по четырем аргументам x, y, z, u, и поскольку пять аргументов связаны симметричным соотношением (7.2.4), то оно симметрично по пяти аргументам.

Один из аргументов должен быть положительным целым числом. Если, скажем,

$$x = m,$$

тогда ряд обрывается и правая часть принимает вид

$$\frac{(s+1)^{(m)}(z+u+s+1)^{(m)}(u+y+s+1)^{(m)}(y+z+s+1)^{(m)}}{(y+s+1)^{(m)}(z+s+1)^{(m)}(u+s+1)^{(m)}(y+z+u+s+1)^{(m)}}. \quad (7.2.6)$$

И если мы умножим обе части на

$$(y+s+1)^{(m)}(y+z+u+s+1)^{(m)},$$

тогда формула представляет собой утверждение о тождестве двух полиномов от y, каждый из них имеет степень $2m$.

Предположим, что формула истинна при

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

и докажем ее при $x = m$. Достаточно, после нашего последнего замечания, доказать, что она истинна при $2m+1$ различных значениях y.

Итак, формула истинна для

$$y = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$$

по предположению индукции и по симметрии относительно x и y, и для

$$v = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

т. е. при

$$y = -2s-z-u-m-1,\ -2s-z-u-m-2,\ \ldots,\ -2s-z-u-2m$$

по предположению индукции и по симметрии относительно x и v. Следовательно, она истинна для $2m$ значений y различных в общем случае, и достаточно проверить ее истинность для еще одного значения. Мы выберем значение

$$y = -s-m.$$

Это значение y является полюсом лишь для последнего слагаемого ряда (7.2.5), и достаточно доказать, что вычет этого слагаемого равен вычету произведения (7.2.6). Легко проверяется, что каждый из вычетов равен

$$(-1)^{m-1}\frac{(s+1)^{(m)}}{(m-1)!}\,\frac{(s+z+u+1)^{(m)}(z-m+1)^{(m)}(u-m+1)^{(m)}}{(s+z+1)^{(m)}(s+u+1)^{(m)}(z+u-m+1)^{(m)}},$$

и тем самым доказательство завершено[1].

[1] Я приведу несколько более подробное доказательство в § 7.7, где я докажу более общую формулу, которая содержит (7.2.3) как частный случай.

7.3. Имеется огромное количество замечательных частных случаев. Если мы предположим, что x, y или z — положительные целые числа, разделим на s, запишем $t-u$ вместо s, а затем устремим $u \to \infty$, то получим

$$F\left(\begin{matrix}-x,\ -y,\ -z\\ t+1,\ x-y-z-t\end{matrix}\right) = \\ = \frac{\Gamma(t+1)\Gamma(y+z+t+1)\Gamma(z+x+t+1)\Gamma(x+y+t+1)}{\Gamma(x+t+1)\Gamma(y+t+1)\Gamma(z+t+1)\Gamma(x+y+z+t+1)}, \quad (7.3.1)$$

что дает значение (7.1.1), когда

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \beta_1+\beta_2-1$$

и одно из α является отрицательным целым числом. Этот результат был получен Заальшютцем (Saalschütz) в 1890 году.

Если, с другой стороны, мы предположим, что u — положительное целое число, разделим на s, положим $z = -\frac{1}{2}s$, а затем устремим $u \to \infty$, то получим

$$F\left(\begin{matrix}-x,\ -y,\ s\\ x+s+1,\ y+s+1\end{matrix}\right) = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)\Gamma(x+s+1)\Gamma(y+s+1)\Gamma\left(x+y+\frac{1}{2}s+1\right)}{\Gamma(s+1)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}s+1\right)\Gamma\left(y+\frac{1}{2}s+1\right)\Gamma(x+y+s+1)}. \quad (7.3.2)$$

Эта формула, полученная А. К. Диксоном (A. C. Dixon), определяет значение (7.1.1), когда

$$\alpha_1+\beta_1 = \alpha_2+\beta_2 = \alpha_3+1.$$

Она включает в себя формулу Ф. Морли (F. Morley)

$$1+\left(\frac{m}{1}\right)^3+\left(\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\right)^3+\ldots = \frac{\Gamma\left(1-\frac{3}{2}m\right)}{\left\{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}m\right)\right\}^3}\cos\frac{1}{2}m\pi$$

для суммы кубов коэффициентов биномиального ряда для $(1-x)^{-m}$.

Формулы (7.3.1) и (7.3.2) — это две из трех наиболее важных в теории ряда (7.1.1). Третья формула — это

$$\frac{\Gamma(x+y+s+1)}{\Gamma(x+s+1)\Gamma(y+s+1)}F\left(\begin{matrix}-a,\ -b,\ x+y+s+1\\ x+s+1,\ y+s+1\end{matrix}\right)=$$
$$=\frac{\Gamma(a+b+s+1)}{\Gamma(a+s+1)\Gamma(b+s+1)}F\left(\begin{matrix}-x,\ -y,\ a+b+s+1\\ a+s+1,\ b+s+1\end{matrix}\right). \quad (7.3.3)$$

Эта формула Тома (Thomae) так же была переоткрыта Рамануджаном. Она не является следствием тождества Доугалла–Рамануджана, которое является моей основной темой, но я приведу доказательство Рамануджана[1]. По формуле Гаусса,

$$\frac{\Gamma(x+y+s+n+1)}{\Gamma(x+s+n+1)\Gamma(y+s+n+1)}=\frac{1}{\Gamma(s+n+1)}F\left(\begin{matrix}-x,\ -y\\ s+n+1\end{matrix}\right)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(-x)\Gamma(-y)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-x+m)\Gamma(-y+m)}{m!\Gamma(s+m+n+1)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Gamma(x+y+s+1)}{\Gamma(x+s+1)\Gamma(y+s+1)}F\left(\begin{matrix}-a,\ -b,\ x+y+s+1\\ x+s+1,\ y+s+1\end{matrix}\right)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(-a)\Gamma(-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-a+n)\Gamma(-b+n)\Gamma(x+y+s+n+1)}{n!\Gamma(x+s+n+1)\Gamma(y+s+n+1)}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(-a)\Gamma(-b)\Gamma(-x)\Gamma(-y)}\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-x+m)\Gamma(-y+m)\Gamma(-a+n)\Gamma(-b+n)}{m!n!\Gamma(s+m+n+1)}$$

и заключение следует из симметрии.

7.4. Вернемся к тождеству Доугалла–Рамануджана. Записная книжка содержит множество элегантных сумм, большая часть из которых, хотя и не все, может быть выведена из (7.2.1)[2]. Я не могу привести

[1] Один из немногих случаев, в котором Рамануджан приводит явное доказательство в записной книжке. Доказательство, в сущности, совпадает с доказательством Тома.

[2] В моей статье (**8**) и на стр. 96 трактата Бейли приводится большое количество примеров.

здесь эти суммы в большом количестве, но я расскажу кое-что о формулах (1.2), (1.3) и (1.4) моей первой лекции.

Если мы положим u в (7.2.1) положительным целым числом и устремим $u \to \infty$, мы получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(s+2n)\frac{s^{(n)}}{n!}\prod_{x,\,y,\,z}\frac{x_{(n)}}{(x+s+1)^{(n)}} = \\ = \frac{s\Gamma(x+y+z+s+1)}{\Gamma(s+1)}\prod_{x,\,y,\,z}\frac{\Gamma(x+s+1)}{\Gamma(y+z+s+1)}. \quad (7.4.1)$$

Частные случаи

$$x = y = -s, \quad z = \infty$$

и

$$x = y = z = -s$$

приводят к

$$s-(s+2)\Big(\frac{s}{1}\Big)^3+(s+4)\Big(\frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\Big)^3-\ldots=\frac{\sin s\pi}{\pi}, \quad (7.4.2)$$

что сводится к (1.2) при $s=\frac{1}{2}$, и

$$s+(s+2)\Big(\frac{s}{1}\Big)^4+(s+4)\Big(\frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\Big)^4+\ldots=\frac{\sin^2 s\pi}{2\pi^2\cos s\pi}\frac{\{\Gamma(s)\}^2}{\Gamma(2s)}, \quad (7.4.3)$$

что сводится к (1.3) при $s=\frac{1}{4}$.

Формула (1.4) является более сложной, и ее невозможно вывести из (7.2.1). Доказательства были получены мною и Виплем. Первое зависит от теории полиномов Лежандра, а второе — от обобщения формулы (7.2.1), полученного самим Виплем. Каждое из доказательств показывает, что ряд Рамануджана равен

$$\frac{2}{\pi}\Big\{1+\Big(\frac{1}{2}\Big)^3+\Big(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\Big)^3+\ldots\Big\},$$

а затем суммирует этот ряд с помощью (7.3.2). Было бы очень интересно знать доказательство самого Рамануджана.

Другой интересной суммой является

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-\ldots=\left\{\frac{\Gamma(9/8)}{\Gamma(5/4)\Gamma(7/8)}\right\}^2. \tag{7.4.4}$$

Она тоже не является следствием (7.2.1), но может быть получена с помощью двух формул

$$\left\{{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix};\ x\right)\right\}^2={}_3F_2\left(\begin{matrix}2\alpha,\ \alpha+\beta,\ 2\beta\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 2\alpha+2\beta\end{matrix};\ x\right) \tag{7.4.5}$$

и

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ 1+\alpha-\beta\end{matrix};\ -1\right)=\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\alpha-\beta\right)}, \tag{7.4.6}$$

полученных, соответственно, Клаузеном и Куммером (Clausen и Kummer). Обе эти формулы также содержатся в записной книжке. И если мы положим

$$\alpha=\beta=\frac{1}{4}$$

в (7.4.5) и (7.4.6) и $x=-1$ в (7.4.5), мы получим

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-\ldots={}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\\ 1,\ 1\end{matrix};\ -1\right)=\left\{{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\\ 1\end{matrix};\ -1\right)\right\}^2=$$
$$=\left\{\frac{\Gamma(9/8)}{\Gamma(5/4)\Gamma(7/8)}\right\}^2.$$

7.5. Другая интересная формула, привлекшая большое внимание, — это

$$\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{n+2}+\ldots=$$
$$=\left\{\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right\}^2\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2+\ldots\text{до } n \text{ слагаемых}\right\}. \tag{7.5.1}$$

Я докажу ее как частный случай более общей формулы, полученной Бейли, а именно

$$\left\{\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m)}\right\}^2\left\{\frac{1}{m}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{m+1}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{m+2}+\ldots\text{до } n \text{ слагаемых}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}\right\}^2\left\{\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{n+2}+\ldots\text{до } m \text{ слагаемых}\right\}. \tag{7.5.2}$$

Мы можем записать ее как уравнение между двумя конечными рядами типа ${}_4F_3$. Для

$$\frac{1}{m}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{m+1}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{m+2}+\ldots\text{до } n \text{ слагаемых} =$$

$$=\left\{\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\ldots(2n-2)}\right\}^2\frac{1}{m+n-1}\left\{1+\frac{(2n-2)^2(m+n-1)}{(2n-3)^2(m+n-2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(2n-2)^2(2n-4)^2(m+n-1)(m+n-2)}{(2n-3)^3(2n-5)^2(m+n-2)(m+n-3)}+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{(m+n-1)\pi}\left\{\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}\right\}^2 F\left(\begin{matrix}1,\,-n+1,\,-n+1,\,-m-n+1\\ -n+\frac{3}{2},\,-n+\frac{3}{2},\,-m-n+2\end{matrix}\right).^1$$

Следовательно, (7.5.2) сводится к

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 F\left(\begin{matrix}1,\,-n+1,\,-n+1,\,-m-n+1\\ -n+\frac{3}{2},\,-n+\frac{3}{2},\,-m-n+2\end{matrix}\right)=$$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)F\left(\begin{matrix}1,\,-m+1,\,-m+1,\,-m-n+1\\ -m+\frac{3}{2},\,-m+\frac{3}{2},\,-m-n+2\end{matrix}\right). \tag{7.5.3}$$

Теперь

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\,b\\ c\end{matrix};\,x\right)=(1-x)^{c-a-b}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}c-a,\,c-b\\ c\end{matrix};\,x\right),$$

[1] Используя обозначения § 7.1.

и тогда

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+1,\,-n+1\\ -m-n+2\end{matrix};\,x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-m+\frac{1}{2},\,-m+\frac{1}{2}\\ -m-n+1\end{matrix};\,x\right)=
$$

$$
={}_2F_1\left(\begin{matrix}-m+1,\,-m+1\\ -m-n+2\end{matrix};\,x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-n+\frac{1}{2},\,-n+\frac{1}{2}\\ -m-n+1\end{matrix};\,x\right).
$$

Если мы приравняем коэффициенты при x^{m+n-1} в двух частях этого уравнения, то обнаружим, что получили (7.5.3).

7.6. Большая часть предыдущих формул, и в частности (7.2.1), может быть обобщена для «элементарных» рядов. Я докажу обобщение (7.2.1), поскольку оно интересно само по себе и имеет любопытную связь с тождествами Роджерса - Рамануджана.

«Элементарное» обобщение гипергеометрических рядов впервые было систематически изучено Хайне (Heine). Предположим, что в гипергеометрическом ряде

$$
1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\dots \tag{7.6.1}
$$

мы запишем

$$
\frac{1-q^{\lambda+n}}{1-q^{\mu+n}},
$$

где $0<q<1$, для

$$
\frac{\lambda+n}{\mu+n}
$$

(ее предел при $q\to 1$), а затем запишем l, m вместо q^λ и q^μ и также внесем множитель q^n в n-е слагаемое ряда. Мы тем самым получим ряд

$$
1+\frac{(1-a)(1-b)}{(1-q)(1-c)}q+\frac{(1-a)(1-aq)(1-b)(1-bq)}{(1-q)(1-q^2)(1-c)(1-cq)}q^2+\dots, \tag{7.6.2}
$$

который сводится к (7.6.1) при $q\to 1$. Это «элементарный ряд», соответствующий (7.6.1).

Более обще, мы можем записать

$$(a)_q^n = (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1})$$

и

$$\Phi\left(\begin{matrix}a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_r\\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_s\end{matrix}\right) = \sum_0^\infty \frac{(a_1)_q^n (a_2)_q^n \dots (a_r)_q^n}{(q)_q^n (b_1)_q^n \dots (b_s)_q^n} q^n. \tag{7.6.3}$$

Если $a_1 = q^{\alpha_1}, \dots,\ b_1 = q^{\beta_1}, \dots$ и $q \to 1$, тогда (7.6.3) сводится к

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_r\\ \beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_s\end{matrix}\right).$$

Соотношение в виде суммы между α и β, такое как $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, будет соответствовать соотношению для произведения a и b, например, $a_1 b_1 = q$.

Аналогом ряда (7.2.5) служит

$$\Phi\left(\begin{matrix}a,\ q\sqrt{a},\ -q\sqrt{a},\ 1/b,\ 1/c,\ 1/d,\ 1/e,\ 1/f\\ \sqrt{a},\ -\sqrt{a},\ abq,\ acq,\ adq,\ aeq,\ afq\end{matrix}\right). \tag{7.6.4}$$

Здесь мы заменили s, x, y, z, u, v на

$$q^s = a, \quad q^x = b, \quad q^y = c, \quad q^z = d, \quad q^u = e, \quad q^v = f.$$

Действие четырех параметров

$$q\sqrt{a}, \quad -q\sqrt{a}, \quad \sqrt{a}, \quad -\sqrt{a}$$

заключается в множителе

$$\frac{1-aq^{2n}}{1-a}$$

в общем слагаемом ряда так же, как действие двух параметров $1+\frac{1}{2}s$ и $\frac{1}{2}s$ в (7.2.5) заключалось в множителе $(s+2n)/s$. Соотношение (7.2.4) заменяется соотношением

$$a^2 bcdefq = 1, \tag{7.6.5}$$

и один из параметров, скажем, b, должен иметь вид q^m.

Мы можем преобразовать произведение гамма-функций в правой части (7.2.1) и конечное произведение (7.2.6) аналогичным образом. Имеем

$$\frac{\Gamma(\mu_1+a)\Gamma(\mu_2+1)}{\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1)}=\prod_1^\infty\frac{(\lambda_1+n)(\lambda_2+n)}{(\mu_1+n)(\mu_2+n)},$$

когда $\lambda_1+\lambda_2=\mu_1+\mu_2$, и это заменяется на

$$\frac{f(l_1)f(l_2)}{f(m_1)f(m_2)},$$

где

$$f(l)=\prod_1^\infty(1-lq^n).$$

Следовательно, произведение гамма-функций становится

$$f(a)f(abcde)\prod_{b,\,c,\,d,\,e}\frac{f(abc)}{f(ab)f(abcd)}, \tag{7.6.6}$$

и конечное произведение принимает вид

$$\frac{(aq)_q^m(aqde)_q^m(aqec)_q^m(aqcd)_q^m}{(aqc)_q^m(aqd)_q^m(aqe)_q^m(aqcde)_q^m}; \tag{7.6.7}$$

и мы приходим к предположению, что если (7.6.5) удовлетворяется и одно из b, c, d, e, f, скажем, b, равно q^m, тогда (7.6.4) равно либо (7.6.6), либо (7.6.7). Очевидно, что (7.6.4) симметрично по b, c, d, e, f (поскольку ограничение может быть наложено на любой из этих параметров), в то время как (7.6.6) симметрична относительно четырех из пяти симметрично связанных параметров и, следовательно, симметрична по всем из них.

7.7. Мы можем доказать тождество, впервые полученное Ф. Х. Джексоном с помощью аргумента, который строго параллелен аргументу § 7.2. Мы предположим, что тождество истинно при

$$b=1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^{m-1},$$

и докажем его для $b=q^m$. Пусть $b=q^m$ и мы умножили обе части на

$$(aqc)_q^m(aqcde)_q^m,$$

тогда оно станет тождеством между двумя полиномами от c степени $2m$, и будет достаточно проверить его для $2m+1$ различных значений c. Во-первых, тождество истинно при

$$c = 1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^{m-1}$$

по предположению индукции и благодаря симметрии между b и c, а также для m значений c, соответствующих тому же значению f. Следовательно, достаточно проверить тождество еще для одного значения c.

Мы выберем значение

$$c = a^{-1}q^{-m},$$

которое является полюсом лишь последнего слагаемого ряда (7.6.4). Достаточно доказать, что вычет в этом полюсе равен вычету (7.6.7). Вычеты равны, за исключением множителя $-a^{-1}q^{-m}$, значениям коэффициентов

$$\frac{1}{1-acq^m} = -\frac{1}{aq^m}\frac{1}{c-a^{-1}q^{-m}},$$

где $c = a^{-1}q^{-m}$, и нам нужно доказать, что эти коэффициенты равны для данного значения c.

Чтобы вычислить первый коэффициент, заметим, что

$$b = q^m, \quad c = \frac{1}{aq^m}, \quad \frac{1}{f} = adeq,$$

и мы получим

$$\frac{1-aq^{2m}}{1-a}\frac{(a)_q^m}{(q)_q^m}\frac{(q^{-m})_q^m}{(aq^{m+1})_q^m}\frac{(aq^m)_q^m}{(q^{-m+1})_q^{m-1}}\frac{(1/d)_q^m(1/e)_q^m(adeq)_q^m}{(adq)_q^m(aeq)_q^m(1/de)_q^m}q^m. \quad (7.7.1)$$

Поскольку

$$\Big(\frac{1}{d}\Big)_q^m = \Big(1-\frac{1}{d}\Big)\Big(1-\frac{q}{d}\Big)\ldots\Big(1-\frac{q^{m-1}}{d}\Big) = (-1)^m q^{m(m+1)/2}d^{-m}(dq^{-m+1})_q^m,$$

слагаемые в $1/e$ и $1/de$ могут быть преобразованы аналогичным образом и

$$(q)_q^m = (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m) = (-1)^m q^{m(m+1)/2}(q^{-m})_q^m.$$

(7.7.1) равен

$$\frac{1-aq^{2m}}{1-a}\frac{(a)_q^m(aq^m)_q^m}{(aq^{m+1})_q^m}\frac{(adeq)_q^m(dq^{-m+1})_q^m(eq^{-m+1})_q^m}{(q^{-m+1})_q^{m-1}(adq)_q^m(aeq)_q^m(deq^{-m+1})_q^m}.$$

Также

$$\frac{1-aq^{2m}}{1-a}\frac{(a)_q^m(aq^m)_q^m}{(aq^{m+1})_q^m}=\frac{1-aq^{2m}}{1-a}(1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{m-1})\frac{1-aq^m}{1-aq^{2m}}=(aq)_q^m.$$

Следовательно, в конечном итоге (7.7.1) сводится к

$$\frac{(aq)_q^m(adeq)_q^m(dq^{-m+1})_q^m(eq^{-m+1})_q^m}{(q^{-m+1})_q^{m-1}(adq)_q^m(aeq)_q^m(deq^{-m+1})_q^m},$$

которое также является коэффициентом, встречающимся в (7.6.7).

Тем самым завершается доказательство неравенства Джексона, которое включает тождество Доугалла–Рамануджана в качестве предельного случая.

7.8. Давайте предположим, в частности, что

$$a=1,\quad b=q^m,\quad c=d=e=\varepsilon,\quad f=a^{-2}q^{-m-1}\varepsilon^{-3},$$

и устремим ε к нулю. Тогда

$$\frac{(1-c^{-1})(1-c^{-1}q)\dots(1-c^{-1}q^{n-1})}{(1-acq)(1-acq^2)\dots(1-acq^n)}\sim(-1)^nq^{n(n-1)/2}\varepsilon^{-n}$$

и аналогично для множителей в d и e, и

$$\frac{(1-f^{-1})(1-f^{-1}q)\dots(1-f^{-1}q^{n-1})}{(1-afq)(1-afq^2)\dots(1-afq^n)}\sim(-1)^nq^{-n(n-1)/2+mn}\varepsilon^{3n}.$$

После небольших упрощений получим

$$\sum_{n=0}^{m}(-1)^n(1+q^n)\frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q^{m-n+1})}{(1-q^{m+1})(1-q^{m+2})\dots(1-q^{m+n})}q^{n(3n-1)/2}=$$
$$=(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m),$$

которое является одной из двух формул Роджерса, непосредственно доказанных в §6.16. Если положить $a=q$ вместо $a=1$, мы получим вторую формулу. Эти формулы приводят, как мы видели в §6.16, к доказательству тождества Роджерса–Рамануджана. Доказательство,

полученное таким образом, представляет собой компромисс между доказательством Роджерса, приведенным в § 6.13–16 и доказательством, позднее полученным Ватсоном. Ватсон использовал тождество, которое является более сложным по виду, чем тождество § 7.6–7, но которое приводит к тождествам Роджерса – Рамануджана с помощью прямых предельных переходов. Мы использовали более простое тождество, непосредственное обобщение тождества Доугалла – Рамануджана, для того чтобы избежать достаточно изощренной алгебры § 6.16, но сохранить более простую часть доказательства Роджерса.

Комментарии к лекции VII

§ 7.1. Мой анализ этих двух глав содержится в книге Харди (**8**). Здесь я называю главу, в которой я в основном заинтересован гл. xii, но она же является гл. x в ватсоновском варианте «второго издания». См. Ватсон, (**10**), 139.

Почти все формулы, обсуждавшиеся в лекции, доказаны в трактате Бейли *Обобщенные гипергеометрические ряды* (Кембридж, 1935). Этот трактат содержит полную библиографию, и я не стану повторять ссылки на статьи, опубликованные до 1914 года.

Обозначения для обобщенных гипергеометрических рядов, которые стали стандартными, были введены Барнсом (Barnes) в *Proc. London Math. Soc.* (**2**), 5 (1907), 59–116.

§ 7.2. Тождество Доугалла – Рамануджана – это первая формула в гл. x записной книжки. Формулы (1.2) и (1.3) лекции I являются ее частными случаями, но Рамануджан, похоже, даже не опубликовал общую формулу, которую я обнаружил в записной книжке лишь после его смерти.

§ 7.3. Частный случай формулы Морли, в котором m является отрицательным целым числом, был обнаружен Диксоном уже в 1891 году (и через некоторое время доказан Ричмондом в 1892 году). Морли опубликовал свою формулу в 1902 году, и этот результат помог Диксону получить в том же году формулу (7.3.2). Исходное доказательство Диксона является очень сложным.

Соответствующую сумму разложения $(1+x)^m$ через ${}_3F_2$ с аргументом -1 нельзя просуммировать в конечное произведение гамма-функций.

Формула (7.3.3) эквивалентна формуле (1) §3.2 трактата Бейли. Содержание теоремы заключается в том, что

$$\frac{1}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_1+\beta_2-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)}F\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\\ \beta_1,\ \beta_2\end{matrix}\right)$$

является симметричной функцией пяти аргументов

$$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \beta_1+\beta_2-\alpha_2-\alpha_3,\quad \beta_1+\beta_2-\alpha_3-\alpha_1,\quad \beta_1+\beta_2-\alpha_1-\alpha_2.$$

§ 7.4. Предельный переход, использованный при выводе (7.4.1), требует некоторого изучения. См. стр. 27 трактата Бейли и работу Доуголла, на которую он ссылается.

Относительно формулы (1.4) см. Харди (**4**) и Виппл (**1**).

Виппл приводит два обобщения формулы (7.4.4) в работе (**3**). Эти обобщения дают суммы рядов

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+x,\ \frac{1}{2}-x\\ 1+x,\ 1-x\end{matrix};\ -1\right) $$

и

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+x,\ \frac{1}{2}+2x\\ 1+x,\ 1+2x\end{matrix};\ -1\right), $$

которые сводятся к ряду Рамануджана при $x=0$. Вторая формула может быть доказана методом, изложенным в лекции.

§ 7.5. Первые доказательства (7.5.1) были получены Дарлингом (**1**) и Ватсоном (**5**), а обобщение — Бейли (**2, 4**), Ходгкинсоном (**1**) и Випплом (**2**). Формула имеет интересные приложения к константам «Лебега» и «Ландау»: см. Ватсон, *Quarterly Journal of Math.* (Оксфорд), 1 (1930), 310–318.

Бейли (**4**) доказал (7.5.2) и еще более общую формулу

$$ \frac{\Gamma(x+m)\Gamma(y+m)}{\Gamma(m)\Gamma(x+y+m)}\left[{}_3F_2\left(\begin{matrix}x,\ y,\ v+m-1\\ v,\ x+y+n\end{matrix}\right)\right]_n = $$

$$ = \frac{\Gamma(x+n)\Gamma(y+n)}{\Gamma(n)\Gamma(x+y+n)}\left[{}_3F_2\left(\begin{matrix}x,\ y,\ v+n-1\\ v,\ x+y+n\end{matrix}\right)\right]_m. $$

Здесь $[\ldots]_n$ и $[\ldots]_m$ означают, что берутся лишь первые n или m слагаемых ряда. Формула сводится к (7.5.2), когда $x=y=\frac{1}{2}$, $v=1$.

Формула (7.5.3) является частным случаем формулы (1) §7.2 трактата Бейли. Замените обозначения x, y, z, u, v, w, n на

$$ -n+1,\quad -n+1,\quad 1,\quad -m-n-2,\quad -n+\frac{3}{2},\quad -n+\frac{3}{2},\quad m+n-1. $$

Дальнейшие сведения можно узнать в § 10.4 трактата.

§ 7.6. См. Хайне, *Theorie der Kugelfuntionen*, i (1878), 97–125.

§ 7.7. Джексон, *Messenger of Math.*, 50 (1921), 101–112. См. § 8.3 трактата Бейли. Доказательство Ватсона тождества Роджерса – Рамануджана дано в § 8.5–6.

Лекция VIII
Асимптотическая теория разбиений

8.1. В этой лекции я стану рассматривать следующую задачу: насколько велика величина $p(n)$ для больших n? Примечательно, если мы примем во внимание, сколько было написано об аппроксимациях или об асимптотических значениях арифметических функций, что этот вопрос ни разу не задавался до 1917 года, когда мы вместе с Рамануджаном опубликовали мемуар, который входит под №36 в *Сборник трудов*. Нам повезло найти задачу, которая оказалась столь замечательной и которая позволяла настолько полное и настолько удивительное решение.

8.2. Существует один очевидный метод, с помощью которого можно пытаться решить любую такую задачу (если не найдется какого-нибудь вполне элементарного метода). Если a_n положительно и степенной ряд

$$F(x) = \sum a_n x^n$$

имеет радиус сходимости 1, тогда существует общее соответствие между порядком величины a_n для больших n и порядком величины $F(x)$ при x, близких к 1. Таким образом, сначала необходимо определить порядок величины функции Эйлера

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} \tag{8.2.1}$$

при $0 < x < 1$ и $x \to 1$.[1] Все это достаточно просто, если нас удовлетворяет грубая аппроксимация. Для

$$\log F(x) = \sum_n \log \frac{1}{1-x^n} = \sum_{m,\,n} \frac{x^{mn}}{m} = \sum \frac{x^m}{m(1-x^m)}$$

и

$$mx^{m-1}(1-x) < 1 - x^m < m(1-x),$$

[1] Я записываю x вместо q, поскольку q потребуется для других целей.

поэтому

$$\frac{1}{1-x}\sum\frac{x^m}{m^2} < \log F(x) < \frac{1}{1-x}\sum\frac{x}{m^2}. \tag{8.2.2}$$

Каждый из рядов (8.2.2) имеет предельное значение $\frac{1}{6}\pi^2$ при $x \to 1$, и поэтому

$$\log F(x) \sim \frac{\pi^2}{6(1-x)} \tag{8.2.3}$$

или

$$F(x) = \exp\Big\{\frac{\pi^2/6 + o(1)}{1-x}\Big\}. \tag{8.2.4}$$

Следовательно, порядок величины $F(x)$ в первой аппроксимации равен

$$\exp\frac{\pi^2}{6(1-x)}. \tag{8.2.5}$$

Мы хотим знать порядок a_n, соответствующий этому порядку для

$$F(x) = \sum a_n x^n.$$

Если $a_n = n^\alpha$, когда $a > -1$, и $x = e^{-y}$ при $y \to 0$, тогда

$$F(x) = \sum n^\alpha x^n = \sum n^\alpha e^{-ny} \sim \int_0^\infty t^\alpha e^{-ty}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{y^{\alpha+1}} \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.$$

С другой стороны, если бы a_n были столь же большими, как $e^{\delta n}$, для некоторого положительного δ, тогда ряд начнет расходиться до того, как x достигнет 1. Очевидно, что в этом случае a_n должны быть меньше такой величины, но больше любой степени n. Естественно предположить, что правильный порядок величины — приближенно

$$e^{Bn^b}$$

для b от 0 до 1 и некоторого B.

Порядок

$$G(x) = \sum e^{Bn^b}x^n = \sum e^{Bn^b - ny}$$

можно приблизительно вычислить по порядку его максимального слагаемого. Это происходит при $Bbn^{b-1} = y$ приближенно; тогда максимальное слагаемое приближенно имеет порядок

$$\exp\bigl\{C(1-x)^{-b/(1-b)}\bigr\},$$

где

$$C = B^{1/(1-b)}b^{b/(1-b)}(1-b).$$

Это согласуется с (8.2.5), если $b = \frac{1}{2}$ и $B^2 = \frac{2}{3}\pi^2$; и мы приходим к заключению, что порядок $p(n)$ должен быть приближенно равным

$$e^{Kn^{1/2}},$$

где

$$K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{8.2.6}$$

8.3. В действительности истиной будет то, что

$$\log p(n) \sim Kn^{1/2} \tag{8.3.1}$$

или

$$p(n) = e^{\{K+o(1)\}n^{1/2}}, \tag{8.3.2}$$

но мы не можем доказать это очень простым способом. Однако достаточно легко доказать, что

$$e^{An^{1/2}} < p(n) < e^{Bn^{1/2}} \tag{8.3.3}$$

при $n > 0$ и *некоторых* положительных A и B.

Если $x = e^{-y}$, тогда $y \to 0$ при $x \to 1$ и

$$1 - x \sim y. \tag{8.3.4}$$

Запишем

$$F(x) = \sum p(n)e^{-ny} = G(y) \tag{8.3.5}$$

и предположим, что

$$0 < E < C = \frac{1}{6}\pi^2 < D. \tag{8.3.6}$$

(i) Из (8.2.3), (8.3.4) и (8.3.6) следует, что

$$p(n)e^{-ny} < G(y) < \exp\frac{D}{y}$$

для всех n и для малых y. Следовательно, принимая $y = n^{-1/2}$, получим

$$p(n) < \exp\Big(ny + \frac{D}{y}\Big) = e^{Bn^{1/2}}$$

при $B = D + 1$, поэтому B может быть любым числом, большим, чем $C + 1$.

(ii) С другой стороны,

$$G(y) > \exp\frac{E}{y}$$

для малых y; поэтому

$$G_1(y) + G_2(y) = \sum_0^m p(n)e^{-ny} + \sum_{m+1}^\infty p(n)e^{-ny} > \exp\frac{E}{y}$$

для всех m. Но $p(n)$ возрастает вместе с n, и поэтому

$$(m+1)p(m) > G_1(y) > \exp\frac{E}{y} - G_2(y).$$

Также

$$G_2(y) = \sum_{m+1}^\infty p(n)e^{-ny} < \sum_{m+1}^\infty \exp(Bn^{1/2} - ny)$$

после того, что мы доказали в пункте (i); поэтому

$$p(m) > \frac{1}{m+1}\Big\{\exp\frac{E}{y} - \sum_{m+1}^\infty \exp(Bn^{1/2} - ny)\Big\}.$$

Выберем H таким, что $H > 2B$, и возьмем $y = Hm^{-1/2}$. Тогда

$$\sum_{m+1}^\infty \exp(Bn^{1/2} - ny) \leqslant \sum_{m+1}^\infty \exp(Bn^{1/2} - 2Bnm^{-1/2}) < \sum_0^\infty e^{-Bn^{1/2}} < L,$$

скажем. Следовательно,

$$p(m) > \frac{1}{m+1}\Big(\exp\frac{E}{y} - L\Big) = \frac{1}{m+1}\Big(\exp\frac{E}{H}m^{1/2} - L\Big) > \exp Am^{1/2}$$

для больших m, A — произвольное число, меньшее, чем E/H. Поскольку E может быть любым числом, меньшим, чем C, а H — произвольное число, большее, чем $2B = 2(1+D)$, т. е. произвольное число, большее, чем $2(1+C)$, A может быть произвольным числом, меньшим, чем $\frac{1}{2}C/(1+C)$.

8.4. Чтобы доказать (8.3.1) или (8.3.2), нам потребуется общая теорема так называемого «тауберова» типа. В действительности верно, когда $a_n \geqslant 0$ для всех n, что

$$\log\sum a_n x^n \sim \frac{C}{1-x}$$

влечет

$$\log A_n = \log(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \sim 2(Cn)^{1/2}.$$

Когда, как в данном случае, a_n возрастает вместе с n, мы можем заменить последнее уравнение на

$$\log a_n \sim 2(Cn)^{1/2},$$

тем самым получим (8.3.1).

Тем самым мы получили асимптотическую формулу для логарифма $p(n)$. Но асимптотическая формула для логарифма арифметической функции представляет собой очень грубый результат; при этом не различаются, например, порядки величин

$$n^{\pm 1000}e^{Kn^{1/2}}.$$

Нам хотелось бы, по крайней мере, получить асимптотическую формулу для самой $p(n)$. В действительности

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}}e^{K\sqrt{n}}, \tag{8.4.1}$$

но мы не можем доказать такую формулу при помощи аргументов столь элементарных и столь общего вида. Необходимо использовать более сильные методы, которые будут достаточно учитывать особенности самой $F(x)$.

8.5. Нашим естественным источником является теорема Коши. Она говорит нам, что

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(x)}{x^{n+1}}\, dx, \tag{8.5.1}$$

где C — это контур вокруг начала координат. Нам нужно передвинуть C в наиболее выгодное положение, а затем непосредственно изучить интегралы. Разумеется, в этой идее нет абсолютно ничего нового. Это то, что доминирует во всей аналитической теории чисел и, особенно, в теории простых чисел; но данная постановка является весьма отличной и будет поучительным сравнение двух задач.

В теории простых чисел нашими производящими функциями были ряды Дирихле $\sum a_n n^{-s}$, и доказательство теоремы о простых числах зависело от интеграла

$$\psi^*(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}\, ds,$$

где $c > 1$. Мы передвинули контур интегрирования влево до полюса в $s = 1$ и показали, что $\psi^*(x)$ и $\psi(x)$ отличаются от вычета x в полюсе на величину ошибки порядка, меньше, чем x.[1]

Это заключение было правильным, но доказательство было очень сложно проверить, поскольку $\zeta(s)$ ведет себя на бесконечности очень сложным образом. В частности, положение ее нулей до сих пор крайне загадочно. С другой стороны, здесь нет никакой сложности насчет особенности, которая приводит к доминирующему слагаемому, полюсу при $s = 1$ наиболее простого из возможных типов.

8.6. Особенности $F(x)$ нашей текущей задачи намного более сложные. Они покрывают единичную окружность $|x| = 1$. Окружность является «барьером» для функции, которая не выходит за ее пределы и, здесь не может быть вопросов о «перемещении C через сингулярности». Все что мы можем сделать — это перенести C ближе к особым точкам и подробно изучить каждую его часть.

Для всего этого, однако, есть сильное утешение. Функция $F(x)$ принадлежит к хорошо известному классу эллиптических модулярных

[1] См. лекцию II.

функций, чьи свойства тщательно изучались и очень хорошо известны. Все эти функции имеют те же самые особые свойства, как и $F(x)$, и существуют лишь внутри окружности, но они удовлетворяют замечательному функциональному уравнению, которое позволяет нам очень точно определить их поведение вблизи любой точки окружности. В частности, $F(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x) = \frac{x^{1/(24)}}{(2\pi)^{1/2}} \Big(\log \frac{1}{x}\Big)^{1/2} \exp\Big\{\frac{\pi^2}{6\log(1/x)}\Big\} F(x'), \tag{8.6.1}$$

где

$$\log \frac{1}{x} \log \frac{1}{x'} = 4\pi^2, \quad x' = \exp\Big\{-\frac{4\pi^2}{\log(1/x)}\Big\}. \tag{8.6.2}$$

Если, к примеру, x положительно и находится вблизи 1, тогда x' чрезвычайно мало и $F(x')$ практически равна 1. Поэтому (8.6.1) выражает $F(x)$ фактически в терминах элементарных функций. Существуют подобные формулы, связанные с другими точками окружности, такими как

$$-1,\ e^{2\pi i/3},\ e^{-2\pi i/3},\ i,\ -i,\ e^{-2\pi i/5},\ \ldots$$

(в общем случае со всеми простыми корнями из 1); но (8.6.1) самой по себе достаточно, чтобы позволить нам добиться большого продвижения.

В частности, если мы выберем в качестве C окружность с радиусом лишь чуть меньшим, чем 1, мы можем сделать подстановку из (8.6.1) в (8.5.1) и заменить $F(x')$ единицей, с ошибкой, порядок которой оказывается равным

$$e^{Hn^{1/2}},$$

где

$$H < K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Тогда в интеграле остаются лишь элементарные функции, и мы можем вычислить его очень точно.

Результатом служит формула

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \Big(\frac{e^{K\lambda_n}}{\lambda_n}\Big) + O(e^{Hn^{1/2}}), \tag{8.6.3}$$

где

$$\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}, \quad H < K. \tag{8.6.4}$$

Она включает (8.4.1) и является намного более точной. Вид доминирующего слагаемого, на первый взгляд, является достаточно загадочным, но, естественно, возникает из анализа. В частности, «$-\frac{1}{24}$» в λ_n, естественно, возникает из показателя $\frac{1}{24}$ в (8.6.1).

8.7. Однако это ни в коей мере не означает конца исследования. Формула (8.6.1) подходит лишь для изучения $F(x)$ вблизи $x = 1$. Как я отмечал, существуют аналогичные формулы, связанные с другими «рациональными точками»

$$x_{p,\,q} = e^{2p\pi i/q} \tag{8.7.1}$$

на единичной окружности. Можно сказать (разумеется, очень грубо), что эти «рациональные особые точки» являются наиболее *тяжелыми* особыми точками $F(x)$, что $F(x)$ вблизи них больше, чем вблизи любой другой точки на окружности, и что их вклад в интеграл (8.5.1), возможно, перевесит вклад всех других точек.

Далее, вес этих рациональных особых точек уменьшается при возрастании q. При $x \to 1$ вдоль радиуса $F(x)$ ведет себя приближенно, как

$$\exp\Big\{\frac{\pi^2}{6(1-x)}\Big\},$$

в то время как при $x \to x_{p,\,q}$ она ведет себя приближенно, как

$$\exp\Big\{\frac{\pi^2}{6q^2(1-|x|)}\Big\}.$$

Следует ожидать, что

$$p(n) = P_1(n) + P_2(n) + \ldots + P_Q(n) + R(n), \tag{8.7.2}$$

где $P_1(n)$ является доминирующим слагаемым в (8.6.3), $P_2(n), \ldots, P_Q(n)$ имеют аналогичную форму, но с меньшими числами $K_2, \ldots, K_Q$ вместо K и порядок ошибки $R(n)$ меньше, чем $e^{K_Q n^{1/2}}$.

Доказательство всего этого может быть получено без больших дополнительных сложностей. $P_q(n)$ имеет вид

$$P_q(n) = L_q(n)\phi_q(n), \tag{8.7.3}$$

где

$$\phi_q(n) = \frac{q^{1/2}}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\Big(\frac{e^{K\lambda_n/q}}{\lambda_n}\Big), \tag{8.7.4}$$

$$L_q(n) = \sum_p \omega_{p,\,q} e^{-2np\pi i/q}, \tag{8.7.5}$$

p пробегает целые числа, меньшие, чем q, и взаимно простые с ним[1], и $\omega_{p,\,q}$ является некоторым 24-м корнем из единицы. Таким образом,

$$L_1(n) = 1, \quad \phi_1(n) = P_1(n), \quad K_q = \frac{K}{q}.$$

И

$$R(n) = O(e^{H_Q n^{1/2}}), \tag{8.7.6}$$

где

$$H_Q < K_Q$$

(поэтому $H_Q \to 0$, когда $Q \to \infty$). Таким образом, мы можем получить значение $p(n)$ с величиной ошибки $O(e^{\delta n^{1/2}})$ и произвольно маленьким положительным числом δ.

8.8. На этом мы могли бы остановиться, если бы не любовь к вычислениям майора МакМахона. МакМахон был умелым и увлекающимся вычислителем и сделал для нас таблицу значений $p(n)$ вплоть до $n = 200$. В частности, он обнаружил, что

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388, \tag{8.8.1}$$

и мы, естественно, выберем это значение для проверки нашей асимптотической формулы. Следует ожидать хорошего результата с ошибкой, возможно, в одном или двух знаках, но мы никогда и не мечтали надеяться, что мы нашли столь хороший результат. В действительности, восемь слагаемых нашей формулы дают значение $p(200)$ с ошибкой 0,004.

[1] Когда $q = 1$, $p = 0$.

Неизбежно был задан вопрос: не может ли использоваться наша формула для вычисления точных значений $p(n)$ для любого большого n.

Очевидно, что если бы это было возможно, то было бы необходимо использовать «большое» количество слагаемых ряда, т. е., скажем, сделать Q функцией числа n. Мы получили следующий конечный результат. Существуют константы α, M такие, что

$$p(n) = \sum_{q<\alpha n^{1/2}} P_q(n) + R(n), \tag{8.8.2}$$

где

$$|R(n)| < Mn^{-1/4}, \tag{8.8.3}$$

и поскольку $p(n)$ является целым числом, (8.8.2) дает его точное значение для достаточно больших n. Формула является одной из тех редких формул, которые являются одновременно и асимптотическими, и точными. Она позволяет нам узнать все, что мы хотим о порядке и приближенном виде $p(n)$, и она также выглядит подходящей для точных вычислений. Фактически, именно с помощью этой формулы Д. Х. Лемер (D. H. Lehmer) впервые вычислил значение $p(721)$.

8.9. Однако, вплоть до недавнего времени, необходимо было делать любопытное отступление в этом случае. Значения $p(200)$ и $p(243)$ были *известны*, поскольку они были непосредственно вычислены Мак-Махоном и Гуптой, но вычисления, основанные на (8.8.2), не являлись решающими. Мы не можем использовать эту формулу для того, чтобы *доказать*, что $p(721)$ имеет конкретное значение, пока мы не найдем численных значений α и M. Рамануджан и я лишь доказали их существование. Необходимо было повторить весь наш анализ, задавая численные значения все нашим «константам» и заменяя все наши слагаемые типа «O» слагаемыми с численными границами. До того, как это было сделано, вычисления Лемера, который использовал 21 слагаемое ряда и получил значение

$$161\,061\,755\,750\,279\,477\,635\,534\,762{,}0041,$$

давали очень сильное предположение, что это число является значением $p(721)$, но не были доказательными.

Промежуток к настоящему времени заполнен Радемахером, который (пытаясь, в первую очередь, всего лишь упростить наш анализ)

смог сделать очень удачную формальную замену. Рамануджан и я работали не с самой функцией

$$\phi(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn}\Big(\frac{e^{K\lambda_n}}{\lambda_n}\Big),$$

а с «почти эквивалентной» функцией

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn}\Big(\frac{\operatorname{ch} K\lambda_n - 1}{\lambda_n}\Big)$$

(впоследствии отбрасывая менее важные части функции). Радемахер работал с

$$\psi(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn}\Big(\frac{\operatorname{sh} K\lambda_n}{\lambda_n}\Big),$$

которая также «почти эквивалентна», и, по-видимому, это небольшое изменение имеет очень важное значение, поскольку оно привело к *тождеству* для $p(n)$.

Имеем

$$\frac{d}{dn}\Big(\frac{1}{\lambda_n} \operatorname{sh} \frac{K\lambda_n}{q}\Big) = \frac{d}{dn}\Big(\frac{K}{q} + \frac{K^3(n-1/24)}{6q^3} + \dots\Big) = O\Big(\frac{1}{q^3}\Big)$$

для фиксированных n и больших q. Следовательно, функция

$$\psi_q(n) = \frac{q^{1/2}}{\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn}\Big\{\frac{\operatorname{sh}(K\lambda_n/q)}{\lambda_n}\Big\} \tag{8.9.1}$$

ведет себя при больших q как произведение $q^{1/2} \cdot q^{-3} = q^{-5/2}$ и

$$|L_q(n)| = \Big|\sum_p \omega_{p,\,q} e^{-2np\pi i/q}\Big| \leqslant q, \tag{8.9.2}$$

поэтому

$$\sum_p L_q(n)\psi_q(n) \tag{8.9.3}$$

сходится. Ряд $\sum L_q(n)\phi_q(n)$ не является сходящимся; я и Рамануджан не решили до конца этот вопрос, но затем он был разрешен Лемером.

Радемахер доказал, что

$$p(n) = \sum_{q=1}^{\infty} L_q(n)\psi_q(n) \tag{8.9.4}$$

и что остаток после Q слагаемых меньше, чем

$$CQ^{-1/2} + D\Big(\frac{Q}{n}\Big)^{1/2} \operatorname{sh} \frac{Kn^{1/2}}{Q},$$

где C и D — константы, для которых он получил определенное значение. Остаток имеет порядок $n^{-1/2}$, когда Q имеет порядок $n^{1/2}$, как и в нашей предыдущей работе.

Доказательство тождества Радемахера

8.10. Остаток этой лекции будет посвящен доказательству (8.9.4).

Ряд Фарея $\mathfrak{F}_N$ порядка N представляет собой множество несократимых дробей p/q между 0 и 1, чьи знаменатели не превосходят N. Мы включаем 0 и 1 в виде $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$: таким образом, $\mathfrak{F}_5$ представляет собой

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

Если

$$x = re^{2\pi i\theta}$$

и θ пробегает значения $\mathfrak{F}_N$ (так что и первое, и последнее значения x равны r), мы определяем множество «точек Фарея» $re^{2p\pi i/q}$ на окружности $|x| = r$.

Предположим, что $q > 1$ и

$$\frac{p''}{q''}, \ \frac{p}{q}, \ \frac{p'}{q'}$$

— три последовательных дроби из $\mathfrak{F}_N$. Будем связывать с p/q интервал $\xi_{p,q}$ или

$$\frac{p}{q} - \chi''_{p,q}, \quad \frac{p}{q} + \chi'_{p,q},$$

где

$$\chi''_{p,\,q} = \frac{1}{q(q+q'')}, \quad \chi'_{p,\,q} = \frac{1}{(q+q')}.$$

Эти интервалы полностью заполняют интервал (0, 1), и длина каждой из частей, на которые $\xi_{p,\,q}$ делится величиной p/q, лежит между

$$\frac{1}{2Nq}, \quad \frac{1}{Nq}.$$

Определение, естественно, потребует изменения, когда $q = 1$. Тогда p/q является $\frac{0}{1}$ или $\frac{1}{1}$ и разбиение интервала состоит всего лишь из одной части.

Мы также будем использовать обозначение $\xi_{p,\,q}$ для дуги $|x| = r$, определенной теми же значениями θ. Две экстремальных дуги, которые получаются при $x = r$, соединяются в одну. Мы будем называть это разбиение окружности *разбиением Фарея* порядка N.

Применим (8.5.1) к окружности C, определенной

$$|x| = r = e^{-2\pi/N^2}.$$

Запишем

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(x)}{x^{n+1}}\,dx = \sum_{p,\,q}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi_{p,\,q}} \frac{F(x)}{x^{n+1}}\,dx = \sum_{p,\,q} j_{p,\,q} \tag{8.10.1}$$

и изучим каждый интеграл по отдельности. Пределы суммирования определяются выражениями

$$0 < p < q, \quad (p,\,q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant N \tag{8.10.2}$$

(за исключением того, что p принимает при $q = 1$ единственное значение 0).

8.11. Для $\xi_{p,\,q}$ запишем

$$x = re^{2\pi i\theta}, \quad r = e^{-2\pi/N^2}, \quad \theta = \frac{p}{q} + \phi, \tag{8.11.1}$$

поэтому

$$x = \exp\Big\{\frac{2p\pi i}{q} - 2\pi\Big(\frac{1}{N^2} - i\phi\Big)\Big\} = \exp\Big(\frac{2p\pi i}{q} - \frac{2\pi z}{q}\Big), \tag{8.11.2}$$

где

$$z = q\Big(\frac{1}{N^2} - i\phi\Big). \tag{8.11.3}$$

Таким образом, $\phi = 0$ дает фареевскую точку $\xi_{p,\,q}$

$$-\chi'' = -\chi''_{p,\,q} \leqslant \phi \leqslant \chi'_{p,\,q} = \chi' \tag{8.11.4}$$

и

$$\frac{1}{2qN} < \frac{\chi'}{\chi''} < \frac{1}{qN}, \quad |\phi| < \frac{1}{qN}. \tag{8.11.5}$$

Мы также приведем здесь некоторые простые неравенства, которые потребуются в дальнейшем. Поскольку $|q\phi| < 1/N$ и $q \leqslant N$, имеем

$$|z| = q(N^{-4} + \phi^2)^{1/2} \leqslant (q^2N^{-4} + N^{-2})^{1/2} \leqslant 2^{1/2}N^{-1} \tag{8.11.6}$$

(поэтому величина $|z|$ мала равномерно для больших N). Также

$$\Big|\exp\Big(-\frac{\pi z}{12q}\Big)\Big| = \exp\Big(-\frac{\pi}{12N^2}\Big) < 1 \tag{8.11.7}$$

и

$$\frac{1}{q}\Re\frac{1}{z} = \frac{N^{-2}}{q^2(N^{-4} + \phi^2)} > \frac{N^{-2}}{q^2N^{-4} + N^{-2}} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{8.11.8}$$

8.12. Теперь воспользуемся формулой типа (8.6.1), но связанной с $e^{2p\pi i/q}$ вместо 1. Формула имеет вид

$$F(x) = \omega_{p,\,q}z^{1/2}\exp\Big(\frac{\pi}{12qz} - \frac{\pi z}{12q}\Big)F(x'), \tag{8.12.1}$$

где

$$x = \exp\Big(\frac{2p\pi i}{q} - \frac{2\pi z}{q}\Big), \quad x' = \exp\Big(\frac{2p_1\pi i}{q} - \frac{2\pi}{qz}\Big), \tag{8.12.2}$$

$\omega_{p,\,q}$ — 24-й корень из единицы, на который мы ссылались в § 8.7, $z^{1/2}$ — его главное значение и $pp_1 \equiv -1 \pmod q$. Формула сводится к (8.6.1) при $q = 1$.

Если мы подставим значение из (8.12.1) в интеграл $j_{p,\,q}$ из (8.10.1), запишем

$$\Psi(z) = \Psi_q(z) = z^{1/2}\exp\Big(\frac{\pi}{12qz} - \frac{\pi z}{12q}\Big) \tag{8.12.3}$$

и заметим, что

$$\frac{dx}{x} = 2\pi i\, d\phi, \quad x^{-n} = \exp\Big(\frac{2n\pi}{N^2} - \frac{2np\pi i}{q} - 2n\pi\phi i\Big),$$

мы получим

$$e^{-2n\pi/N^2} j_{p,q} = \omega_{p,q} e^{-2np\pi i/q} \int_{-\chi''}^{\chi'} \Psi(z) F(x') e^{-2n\pi\phi i}\, d\phi. \tag{8.12.4}$$

Удобно также иметь формулу для $j_{p,q}$, в которой переменной интегрирования будет z. Такая формула, которая является тривиальным преобразованием (8.12.4), имеет вид

$$j_{p,q} = \frac{i}{q} \omega_{p,q} e^{-2np\pi i/q} \int \Psi(z) F(x') e^{2n\pi z/q}\, dz; \tag{8.12.5}$$

путь интегрирования — это прямая линия, соединяющая точки

$$q\Big(\frac{1}{N^2} + i\chi''\Big), \quad q\Big(\frac{1}{N^2} - i\chi'\Big)$$

плоскости z.

8.13. Когда z мало и положительно (т. е. когда x вблизи $e^{2p\pi i/q}$ на радиусе к этой точке),

$$|x'| = e^{-2\pi/qz}$$

чрезвычайно мало и $F(x')$ практически равно 1. Мы можем надеяться заменить $F(x')$ на 1 без внесения больших ошибок на всем $\xi_{p,q}$. Таким образом, запишем

$$j_{p,q} = J_{p,q} + J'_{p,q} \tag{8.13.1}$$

и

$$p(n) = \sum j_{p,q} = \sum J_{p,q} + \sum J'_{p,q} = P(n) + P'(n), \tag{8.13.2}$$

скажем, $J_{p,q}$ и $J'_{p,q}$ — интегралы, полученные из $j_{p,q}$, когда мы заменяем $F(x')$ на

$$1, \quad F(x') - 1$$

соответственно. Разумеется, $P(n)$ и $P'(n)$ зависят от N так же, как и от n, и нам нужно изучить их пределы при $N \to \infty$.

8.14. Докажем сначала, что

$$P'(n) \to 0. \tag{8.14.1}$$

Имеем

$$\Psi(z)\{F(x') - 1\} = z^{1/2} \exp\Big\{-\frac{\pi}{12q}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big\} \sum_1^\infty p(\nu) x'^\nu.$$

Теперь

$$|e^{-\pi z/12q}| < 1$$

по (8.11.7). Также

$$|e^{\pi/12qz} x'^\nu| = \Big|\exp\Big\{\frac{\pi}{12qz} + \nu\Big(\frac{2p_1\pi i}{q} - \frac{2\pi}{qz}\Big)\Big\}\Big| =$$

$$= \exp\Big\{-\frac{2\pi}{q}\Big(\nu - \frac{1}{24}\Big)\Re\frac{1}{z}\Big\} \leqslant e^{-(\nu-1/24)\pi}$$

по (8.11.8), поэтому

$$\Big|e^{\pi/12qz} \sum_1^\infty p(\nu) x'^\nu\Big| \leqslant \sum_1^\infty p(\nu) e^{-(\nu-1/24)\pi} = B,$$

где B — константа. Наконец,

$$|z|^{1/2} \leqslant 2^{1/4} N^{-1/2}$$

по (8.11.6), и промежуток интегрирования в (8.12.4) меньше, чем $2/qN$ по (8.11.5). Следовательно,

$$|J'_{p,\,q}| < e^{2n\pi/N^2} \cdot \frac{2}{qN} \cdot 2^{1/4} N^{-1/2} B = e^{2n\pi/N^2} \frac{2^{5/4} B}{qN^{5/2}}$$

и

$$|P'(n)| = O\Big(N^{-5/2} \sum_{p,\,q} \frac{1}{q}\Big) = O\Big(N^{-5/2} \sum_{q \leqslant N} 1\Big) = O(N^{-1/2}).$$

Объединяя (8.14.1) и (8.13.2) и учитывая, что $p(n)$ не зависит от N, получаем, что

$$p(n) = \lim_{N\to\infty} P(n). \tag{8.14.2}$$

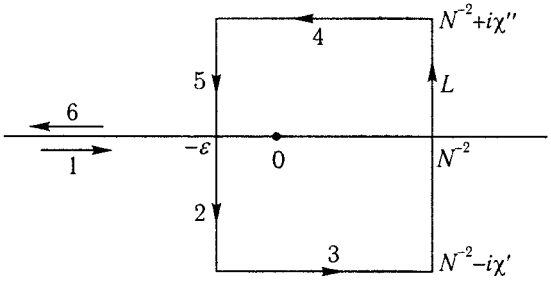


Рис. 2

8.15. Обсуждая $P(n)$, мы использовали формулу (8.12.5), в которой $F(x')$ заменили на 1. Положив

$$z = qZ,$$

мы получим

$$J_{p,q} = \omega_{p,q} e^{-2np\pi i/q} R_{p,q}, \tag{8.15.1}$$

где

$$R_{p,q} = \frac{q^{1/2}}{i} \int Z^{1/2} \exp\Big\{ \frac{\pi}{12q^2 Z} + 2\pi\Big(n - \frac{1}{24}\Big)Z \Big\}\, dZ. \tag{8.15.2}$$

Путем интегрирования теперь служит линия L рисунка 2. Таким образом,

$$p(n) = \lim_{N\to\infty} P(n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{q=1}^{N} \sum_{p} \omega_{p,q} R_{p,q} e^{-2np\pi i/q} = \lim_{N\to\infty} \sum_{q=1}^{N} T_q, \tag{8.15.3}$$

где

$$T_q = \sum_{p} \omega_{p,q} R_{p,q} e^{-2np\pi i/q}. \tag{8.15.4}$$

Теперь нам нужно преобразовать $R_{p,q}$. Применим теорему Коши к контуру, отмеченному на рисунке. Здесь $Z^{1/2}$ положительно в точке N^{-2}, равно $-i(-Z)^{1/2}$, где $(-Z)^{1/2}$ положительно на линии (1) и равно $i(-Z)^{1/2}$ на (6). Также

$$\varepsilon < N^{-2}$$

и устремим ε к нулю, перед тем как N будет стремиться к ∞.

По теореме Коши, получаем

$$R_{p,\,q} = \frac{q^{1/2}}{i}\Big(\int\limits_{-\infty}^{(0+)} - \int\limits_{(1)} - \int\limits_{(2)} - \int\limits_{(3)} - \int\limits_{(4)} - \int\limits_{(5)} - \int\limits_{(6)}\Big) =$$

$$= 2q^{1/2}U_q + iq^{1/2}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6), \quad (8.15.5)$$

скажем, где U_q — интеграл от $-\infty$ до $-\infty$, включая начало координат в положительном направлении, и не зависит от p.[1]

Очевидно, что

$$I_1 + I_6 \to -2iV_q, \quad (8.15.6)$$

где

$$V_q = \int\limits_0^\infty t^{1/2}\exp\Big\{-\frac{\pi}{12q^2t} - 2\pi\Big(n - \frac{1}{24}\Big)t\Big\}\,dt \quad (8.15.7)$$

(поэтому V_q также не зависит от p), когда $\varepsilon \to 0$. Если мы предположим временно, что другими интегралами I_2, I_3, I_4 и I_5 можно пренебречь, тогда получим

$$p(n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{q=1}^{N} T_q = \lim_{N\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{q=1}^{N} T_q =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{q=1}^{N}\{2q^{1/2}U_q + iq^{1/2}(I_1 + I_6)\}\sum_{p}\omega_{p,\,q}e^{-2np\pi i/q} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{q=1}^{N} 2q^{1/2}(U_q + V_q)\sum_{p}\omega_{p,\,q}e^{-2np\pi i/q} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} 2\sum_{q=1}^{N} q^{1/2}L_q(U_q + V_q) = 2\sum_{q=1}^{\infty} q^{1/2}L_q(U_q + V_q).$$

Здесь $L_q = L_q(n)$, определенная формулой (8.7.5). Если мы затем можем доказать, что

$$U_q + V_q = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\Big(\frac{1}{\lambda_n}\operatorname{sh}\frac{K\lambda_n}{q}\Big), \quad (8.15.8)$$

доказательство тождества Радемахера будет завершено.

[1] $R_{p,\,q}$ зависит от p, а также и от q, поскольку χ' и χ'' зависят от них; поэтому то же самое верно для I_2, I_3, I_4, I_5. Но U_q, V_q и верхние грани, полученные для $I_2, \ldots, I_5$ в § 8.16, не зависят от p.

8.16. Нам нужно проверить временное предположение, сделанное в § 8.15. Достаточно доказать, что

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{q=1}^{N} q^{1/2}\sum_{p}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}|I_2+I_3+I_4+I_5|=0$$

или что

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{q=1}^{N} q^{3/2}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\max_{p}|I_2+I_3+I_4+I_5|=0. \tag{8.16.1}$$

В I_2

$$Z=-\varepsilon-iY\quad(0<Y<\chi'),$$

$$\Re(Z)<0,\quad \Re\Big(\frac{1}{Z}\Big)=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+Y^2}<0$$

и

$$|I_2|<(\varepsilon^2+\chi'^2)^{1/2}\chi'<\Big(\varepsilon^2+\frac{1}{q^2N^2}\Big)^{1/2}\frac{1}{qN}.$$

Очевидно, что I_5 удовлетворяет тому же неравенству и

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}|I_2+I_5|\leqslant 2(qN)^{-3/2} \tag{8.16.2}$$

(для каждого p).

В I_3

$$Z=X-i\chi'\quad(-\varepsilon<X<N^{-2}),\quad |Z|^{1/2}<2^{1/2}q^{-1/2}N^{-1/2}$$

по (8.11.6);

$$|e^{2\pi(n-1/24)Z}|<e^{2n\pi/N^2};$$

$$\frac{1}{q^2}\Re\frac{1}{Z}=\frac{X}{q^2(X^2+\chi'^2)}\leqslant\frac{N^{-2}}{q^2\chi'^2}\leqslant 4$$

по (8.11.5) и для каждого p

$$|I_3|<2N^{-2}\cdot 2^{1/2}q^{-1/2}N^{-1/2}\cdot e^{2n\pi/N^2}\cdot e^{\pi/3}<BN^{-5/2}q^{-1/2}e^{2n\pi/N^2}, \tag{8.16.3}$$

где B снова является константой (в частности не зависит от p). Очевидно, что I_4 также удовлетворяет тому же самому неравенству, и поэтому

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}|I_3+I_4|<2BN^{-5/2}q^{-1/2}e^{2n\pi/N^2}. \tag{8.16.4}$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\sum_{q=1}^{N} q^{3/2}(qN)^{-3/2}\to 0$$

и

$$\sum_{q=1}^{N} q^{3/2}N^{-5/2}q^{-1/2}\to 0,$$

и каждое из них имеет порядок $O(N^{-1/2})$.

8.17. Осталось лишь вычислить интегралы U_q и V_q и тем самым доказать (8.15.8). Интеграл U_q является стандартным и может быть вычислен по формуле, приведенной в книге Ватсона *Функции Бесселя*. Имеем

$$U_q=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{(0+)} Z^{1/2}\exp\Big\{\frac{\pi}{12q^2Z}+2\pi\Big(n-\frac{1}{24}\Big)Z\Big\}\,dZ=$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\frac{d}{dn}\int_{-\infty}^{(0+)} Z^{-1/2}\exp\Big\{\frac{\pi}{12q^2Z}+2\pi\Big(n-\frac{1}{24}\Big)Z\Big\}\,dZ.$$

Если мы положим

$$Z=\frac{t}{2\pi(n-1/24)}=\frac{t}{2\pi\lambda_n^2},$$

то получим

$$\frac{1}{4\pi i}\frac{d}{dn}\Big\{\frac{1}{\lambda_n\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^{(0+)} t^{-1/2}\exp\Big(t-\frac{\mu^2}{4t}\Big)\,dt\Big\}$$

при

$$\mu^2=-\frac{2\pi^2\lambda_n^2}{3q^2},\quad \mu=i\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\lambda_n}{q}=i\frac{K\lambda_n}{q},$$

и это равно

$$\frac{1}{2i}\frac{d}{dn}\Big\{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\lambda_n}\cdot 2\pi i\Big(\frac{1}{2}\mu\Big)^{1/2}J_{-1/2}(\mu)\Big\}=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\Big(\frac{1}{\lambda_n}\operatorname{ch}\frac{K\lambda_n}{q}\Big),$$

поэтому

$$U_q=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\Big(\frac{1}{\lambda_n}\operatorname{ch}\frac{K\lambda_n}{q}\Big).$$

Для V_q имеем

$$V_q=\int_0^\infty t^{1/2}\exp\Big\{-\frac{\pi}{12q^2t}-2\pi\Big(n-\frac{1}{24}\Big)t\Big\}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dn}\int_0^\infty t^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{\pi}{12q^2t}-2\pi\Big(n-\frac{1}{24}\Big)t\Big\}\,dt.$$

Поскольку

$$\int_0^\infty e^{-a^2t^2-b^2/t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab},$$

когда a и b положительны, получаем

$$V_q=-\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\Big(\frac{e^{-K\lambda_n/q}}{\lambda_n}\Big)$$

и

$$U_q+V_q=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\Big(\frac{1}{\lambda_n}\operatorname{sh}\frac{K\lambda_n}{q}\Big),$$

что соответствует (8.15.8).

8.18. Легко установить ошибку, связанную с использованием лишь N слагаемых ряда. Значение N, которое мы выбираем, будет зависеть от n, и мы должны использовать аппроксимации, равнозначные относительно n. Во-первых,

$$|L_q(n)|\leqslant q$$

по (8.9.2). Также

$$\frac{d}{dn}\Big(\frac{1}{\lambda_n}\operatorname{sh}\frac{K\lambda_n}{q}\Big)=\frac{d}{dn}\Big(\frac{K}{q}+\frac{K^3(n-1/24)}{6q^3}+\dots\Big)=O\Big(\frac{1}{q^3}\Big),$$

если

$$n<Aq^2,$$

для фиксированного A, и q велико (и равномерно в любом подобном интервале значений n). Ошибка будет связана со всеми значениями q, превышающими N, поэтому N должно иметь, по крайней мере, порядок $n^{1/2}$.

При этом мы имеем

$$\psi_q(n)=O(q^{-5/2})$$

для $q>N$ и

$$\sum_{N+1}^{\infty}L_q(n)\psi_q(n)=O\Big(\sum_{N+1}^{\infty}q^{-5/2}\Big)=O(N^{-1/2}).$$

В частности, если мы возьмем N порядка $n^{1/2}$, мы получим $p(n)$ для больших n с ошибкой $O(n^{-1/2})$.

Достаточно тщательный анализ необходим для численных вычислений, но здесь нет принципиальных сложностей. Таким образом, Радемахер, используя лишь грубую оценку (8.9.2), получил, что ошибка с использованием N слагаемых меньше, чем

$$B_1N^{-1/2}+B_2\Big(\frac{N}{n}\Big)^{1/2}\operatorname{sh}\frac{Kn^{1/2}}{N}$$

(с определенными значениями B_1 и B_2). Если мы пожелаем использовать $\phi_q(n)$ вместо $\psi_q(n)$, как в формуле Харди–Рамануджана (а это более удобно), тогда здесь возникает небольшая дополнительная ошибка, которую легко оценить. Таким образом, Радемахер смог показать, что если $n=721$ и $N=21$, ошибка меньше, чем 0,38. Поскольку $p(n)$ принимает целые значения, любая оценка с погрешностью меньше $\frac{1}{2}$ достаточно хороша для вычисления $p(n)$.

q	$P_q(721)$
1	161061755750279601828302117,84821
2	−124192062781,96844
3	−706763,61926
4	2169,16829
5	0,00000[1]
6	14,20724
7	6,07837
8	0,18926
9	0,04914
10	0,00000[1]
11	0,08814
12	−0,03525
13	0,03247
14	−0,00687
15	0,00000[1]
16	−0,01133
17	0,00000[1]
18	−0,00553
19	0,00859
20	0,00000[1]
21	−0,00524
	161061755750279477635534762,0041

Грубой оценки будет достаточно для конкретных целей. Эти вычисления, к примеру, были предприняты для того, чтобы узнать, будет ли

$$p(721) \equiv 0 \pmod{11^3}$$

в соответствии с одной из гипотез Рамануджана. Поскольку Рамануджан доказал, что $p(721)$ кратно 11^2, любая оценка с ошибкой, меньше, чем 60,5, достаточна для этих целей.

Я представил в таблице значения первых 21 слагаемых формулы Харди–Рамануджана[2]. Скорость сходимости впечатляет, и фактическая ошибка намного меньше той, которая получается из анализа Радемахера. Наибольшее значение $p(n)$, полученное таким способом,

[1] Эти слагаемые тождественно равны нулю.

[2] Соответствующая таблица для $n = 14031$ слишком велика, чтобы ее можно было напечатать.

недавно вычислено Лемером и равно

$$p(14031) = 92\,85303\,04759\,09931\,69434\,85156\,67127\,75089$$
$$29160\,56358\,46500\,54568\,28164\,58081\,50403$$
$$46756\,75123\,95895\,59113\,47418\,88383\,22063$$
$$43272\,91599\,91345\,00745.$$

Для этого потребовалось 62 слагаемых ряда и более тонкая оценка $L_q(n)$; грубое неравенство (8.9.2) оказалось недостаточным. Лемер, однако, показал, что

$$|L_q(n)| < 2q^8, \tag{8.18.1}$$

и этого было достаточно для его целей. Оказалось, что

$$p(14031) \equiv 0 \pmod{11^4},$$

как и предсказывал Рамануджан.

Комментарии к лекции VIII

§ 8.1. Большая часть материала этой лекции содержится в статье Харди и Рамануджана *Proc. London Math. Soc.* (2), 17 (1918), 75–115 (№36 сборника трудов), и в Радемахер (**2**).

§ 8.3. Харди и Рамануджан (см. выше, 285–287) доказали более точное неравенство

$$Hn^{-1}e^{2n^{1/2}} < p(n) < Kn^{-1}e^{2(2n)^{1/2}}$$

элементарными методами.

§ 8.4. Тауберова теорема доказана в более общем виде Харди и Рамануджаном, *Proc. London Math. Soc.* (2), 16 (1917), 112–132 (№34 сборника трудов). В конце этой работы приведены ссылки на аналогичные теоремы Валирона и других исследователей.

«Тауберовы» методы являются эффективными, поскольку они применяются для широкого круга задач. Так, мы можем доказать, что число разбиений числа n на простые равно

$$\exp\Big\{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\Big(\frac{n}{\log n}\Big)^{1/2}\Big\}$$

с той же степенью точности, что и в (8.3.1) или (8.3.2).

§ 8.6. Функциональные уравнения для $F(x)$, потребовавшиеся здесь и в дальнейшем (в частности, в § 8.12), являются формулами линейных преобразований функции $h(\tau)$ Таннери и Молка (Tannery и Molk). См. Таннери и Молк, *Fonctions elliptiques*, ii, 264–267 (таблицы XLV–XLVI).

Формула (8.6.3) была независимо получена Успенским, *Bull. de l'acad. des sciences de l'URSS* (Доклады Академии наук СССР) (6), 14 (1920), 199–218. Статья Успенского была опубликована немного позже нашей, и мы рассмотрели решение намного глубже, поэтому его доказательство (8.6.3), которое проще нашего, не было отмечено по заслугам.

§ 8.7. Аннотация №36, которая появилась в 1917 году в *Comptes rendus* (№31 Сборника трудов), не выходит за пределы этого исследования. Идея аппроксимации арифметической функции «сингулярным рядом», в котором каждое слагаемое соответствует «рациональной точке» на окружности сходимости производящего ряда, является одной из доминирующих в работе Харди и Литтлвуда о задаче Варинга.

Различные выражения для $\omega_{p,q}$ были получены Хермитом (Hermite), Таннери и Молком, Харди и Рамануджаном и Радемахером (**1**). Выражение, полученное Радемахером, имеет вид

$$\omega_{p,q} = e^{\pi i s_{p,q}},$$

где

$$s_{p,q} = \frac{1}{q}\sum_{\mu=1}^{q-1} \mu\Big(\frac{\mu p}{q} - \Big[\frac{\mu p}{q}\Big] - \frac{1}{2}\Big).$$

Д. Х. Лемер (**4**) доказал, что $L_q(n)$ обладает «мультипликативным» свойством, которое позволяет нам свести его вычисление к случаям, в которых q является простым числом или степенью простого числа, и что в этих случаях оно представляет собой произведение $q^{1/2}$, степени 2, значения квадратичного вычета и косинуса от рационального числа, умноженного на π.

§ 8.8–9. МакМахон исследовал рекуррентную формулу

$$p(n) - p(n-2) - p(n-3) + p(n-5) + \ldots = 0,$$

полученную приравниванием коэффициентов в тождестве

$$(1 - x^2 - x^3 + x^5 + \ldots)\sum p_n x^n = 1.$$

Гупта (**1, 2**) использовал дополнительные методы.

Лемер вычислил $p(721)$ по формуле Харди – Рамануджана в своей статье (**1**), но результат впервые был доказан Радемахером (**2**). Оба, Лемер

и Радемахер, также вычислили $p(599)$ для проверки гипотезы Рамануджана (§ 6.6) для сравнений по модулю 5^4 (результат снова оказался положительным). В то же время, Гупта (**2**) проверил значение $p(599)$ непосредственным вычислением.

В своей статье (**3**) Лемер получил значение $p(n)$ для

$$n = 1224,\ 2052,\ 2474,\ 14031$$

и проверил их делимость на

$$5^4,\ 11^3,\ 5^5,\ 11^4$$

соответственно.

Радемахер и Цукерманн (Zuckermann) (**1**) и Цукерманн (**3**) получили тождества для коэффициентов других модулярных функций. Некоторые из этих функций имеют тот же тип, что и $F(x)$, в то время как другие являются функциями другого типа, также рассмотренными Харди и Рамануджаном [*Proc. Royal Soc*, (A), 95 (1919), 144–155 (№37 Сборника трудов)].

Сходимость рядов Харди–Рамануджана рассмотрел Лемер (**2, 4, 5**). В первой из этих работ рассматривается вопрос о расходимости, а в двух последующих он доказывает более точные результаты.

§ 8.10. Для соответствующих свойств рядов Фарея см., к примеру, Харди и Райт, гл. III или Ландау, *Vorlesungen*, i, 98–100.

§ 8.17. См. Ватсон, *Функции Бесселя*, гл. VI, в особенности стр. 176.

§ 8.18. О (8.18.1) см. Лемер (**4**), 292.

Лекция IX

Представление чисел в виде сумм квадратов

9.1. Задача представления целого числа n в виде суммы заданного числа k квадратов целых чисел одна из самых знаменитых в теории чисел. Ее историю можно проследить еще к Диофанту, но эта задача, в сущности, началась с теоремы Жирара (Girard) (или теоремы Ферма) о том, что простое число вида $4m+1$ представимо в виде суммы двух квадратов. Почти все известные математики, работающие в области теоретической арифметики, внесли вклад в решение этой задачи, но в ней до сих пор остались нерешенные вопросы.

Обозначим число представлений n в виде суммы k квадратов, т. е. число целых решений уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = n,$$

через $r_k(n)$. Нам нужно уделить внимание знакам и порядку переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Таким образом,

$$1 = (\pm1)^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm1)^2, \quad 5 = (\pm2)^2 + (\pm1)^2 = (\pm1)^2 + (\pm2)^2$$

и

$$r_2(1) = 4, \quad r_2(5) = 8.$$

Задача заключается в том, чтобы определить $r_k(n)$ в терминах более простой арифметической функции переменной n, такой как количество или сумма его делителей. Задача намного проще, если k является *четным* числом $2s$, и я буду предполагать это в данной лекции.

Якоби решил задачу для $2s = 2, 4, 6$ и 8. Таким образом он доказал, что

$$r_2(n) = 4 \sum_{d \text{ нечетно}, d|n} (-1)^{(d-1)/2} = 4\{d_1(n) - d_3(n)\} \tag{9.1.1}$$

и что

$$r_4(n) = 8 \sum_{d|n} d = 8\sigma(n) \tag{9.1.2}$$

или

$$r_4(n) = 24 \sum_{d \text{ нечетно}, d|n} d = 24\sigma^o(n), \tag{9.1.3}$$

в зависимости от того, является ли n нечетным или четным. Здесь суммирование происходит по всем делителям d числа n или по всем нечетным делителям; $d_1(n)$ и $d_3(n)$, соответственно, — число делителей n вида $4m+1$ и $4m+3$; $\sigma(n)$ — сумма делителей n и $\sigma^o(n)$ — сумма нечетных делителей. Формула для $r_6(n)$ является несколько более сложной, но имеет тот же самый общий тип, и то же самое происходит и для $r_8(n)$.

9.2. Якоби получил свои формулы из теории эллиптических тета-функций. Если

$$\vartheta(x) = 1 + 2x + 2x^4 + \ldots = \sum_{-\infty}^{\infty} x^{n^2}, \tag{9.2.1}$$

то

$$\vartheta^2(x) = 1 + 4\Big(\frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^5}{1-x^5} - \frac{x^7}{1-x^7} + \ldots\Big) \tag{9.2.2}$$

и

$$\vartheta^4(x) = 1 + 8\Big(\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \ldots\Big), \tag{9.2.3}$$

и (9.1.1), (9.1.2) и (9.1.3) получаются в результате приравнивания коэффициентов при равных степенях. Таким образом, правая часть (9.2.2) равна (игнорируя слагаемое 1)

$$4 \sum_{d \text{ нечетно}} (-1)^{(d-1)/2} \frac{x^d}{1-x^d} = 4 \sum_{d \text{ нечетно}} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{(d-1)/2} x^{id}$$

и коэффициент при x^n равен

$$4 \sum_{d \text{ нечетно}, d|n} (-1)^{(d-1)/2}.$$

Таким образом, формула для $r_2(n)$ и $r_4(n)$ возникает как следствие аналитической теории.

Можно обратить эту процедуру, непосредственно доказать арифметические формулы и вывести из них аналитические тождества; и здесь возникают некоторые различия между $r_2(n)$ и $r_4(n)$. Легко вывести (9.1.1) из теории гауссовых комплексных целых чисел, но вывод (9.1.2) и (9.1.3) связан со значительными сложностями. По этой причине возникает интересная задача поиска элементарной процедуры вывода (9.2.3) из (9.2.2), и Рамануджан нашел ее. Я повторяю ее здесь, поскольку, хотя она имеет очень малое отношение к теме моей лекции, она представляет собой очень характерный образец работы Рамануджана.

Легко проверяется, что

$$\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{4x^4}{1+x^4}+\ldots=$$
$$=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{5x^5}{1-x^5}+\ldots=\sum{}' mu_m,$$

где

$$u_m=\frac{x^m}{1-x^m}$$

и штрих обозначает пропуск слагаемых, кратных 4. Таким образом, нам нужно доказать, что

$$\left(\frac14+u_1-u_3+u_5-\ldots\right)^2=\frac{1}{16}+\frac12\sum{}' mu_m. \tag{9.2.4}$$

Рамануджан доказывает более общую формулу, что

$$S^2=T_1+T_2, \tag{9.2.5}$$

где

$$S=\frac14\operatorname{ctg}\frac12\theta+u_1\sin\theta+u_2\sin2\theta+\ldots,$$
$$T_1=\left(\frac14\operatorname{ctg}\frac12\theta\right)^2+u_1(1+u_1)\cos\theta+u_2(1+u_2)\cos2\theta+\ldots,$$
$$T_2=\frac12\{u_1(1-\cos\theta)+2u_2(1-\cos2\theta)+3u_3(1-\cos3\theta)+\ldots\}.$$

Она сводится к (9.2.4), когда $\theta=\frac12\pi$. В этом случае

$$S=\frac14+u_1-u_3+u_5-\ldots,$$

$$T_1 = \frac{1}{16} + \sum_1^\infty (-1)^m u_{2m}(1+u_{2m}) = \frac{1}{16} + \sum_1^\infty (-1)^m \frac{x^{2m}}{(1-x^{2m})^2} =$$

$$= \frac{1}{16} + \sum_1^\infty (-1)^m \sum_1^\infty n x^{2mn} = \frac{1}{16} - \sum_1^\infty \frac{nx^{2n}}{1+x^{2n}} =$$

$$= \frac{1}{16} - \sum_1^\infty \Big(\frac{nx^{2n}}{1-x^{2n}} - \frac{2nx^{4n}}{1-x^{4n}} \Big) = \frac{1}{16} - u_2 - 3u_6 - 5u_{10} - \dots$$

и

$$T_2 = \frac{1}{2}(u_1 + 3u_3 + 5u_5 + \dots) + 2u_2 + 6u_6 + 10u_{10} + \dots,$$

поэтому

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \sum{}' m u_m.$$

Чтобы доказать (9.2.5), запишем

$$S^2 = \Big(\frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta + \sum_1^\infty u_m \sin m\theta \Big)^2 =$$

$$= \Big(\frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta \Big)^2 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta \sum_1^\infty u_m \sin m\theta + \Big(\sum_1^\infty u_m \sin m\theta \Big)^2 =$$

$$= \Big(\frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta \Big)^2 + S_1 + S_2.$$

Выразим S_1 и S_2 в виде

$$S_1 = \sum_1^\infty \Big\{ \frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos(m-1)\theta + \frac{1}{2}\cos m\theta \Big\} u_m,$$

$$S_2 = \sum_1^\infty u_m \sin m\theta \sum_1^\infty u_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \sum_1^\infty \sum_1^\infty \{\cos(m-n)\theta - \cos(m+n)\theta\} u_m u_n$$

и представим слагаемое в $S_1 + S_2$ следующим образом:

$$S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^\infty C_k \cos k\theta.$$

(i) Вклад S_1 в C_0 равен $\frac{1}{2}\sum u_m$, а вклад S_2 равен $\frac{1}{2}\sum u_m^2$. Следовательно,

$$C_0 = \frac{1}{2}\sum_1^\infty u_m(1+u_m) = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{x^m}{(1-x^m)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^\infty\sum_1^\infty nx^{mn} = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{nx^n}{1-x^n} = \frac{1}{2}\sum_1^\infty nu_n.$$

(ii) Если $k>0$, тогда вклад S_1 в C_k равен

$$\frac{1}{2}u_k + \sum_{k+1}^\infty u_m = \frac{1}{2}u_k + \sum_{l=1}^\infty u_{k+l}.$$

Вклад S_2 равен

$$\frac{1}{2}\sum_{m-n=k} u_mu_n + \frac{1}{2}\sum_{n-m=k} u_mu_n - \frac{1}{2}\sum_{m+n=k} u_mu_n = \sum_{l=1}^\infty u_lu_{k+l} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1} u_lu_{k-l}.$$

Следовательно,

$$C_k = \frac{1}{2}u_k + \sum_{l=1}^\infty u_{k+l} + \sum_{l=1}^\infty u_lu_{k+l} - \frac{1}{2}\sum_{l=}^{k-1} u_lu_{k-l}.$$

Легко проверить, что

$$u_{k+l}(1+u_l) = u_k(u_l - u_{k+l}), \quad u_lu_{k-l} = u_k(1+u_l+u_{k-l}),$$

поэтому

$$C_k = u_k\Big\{\frac{1}{2}\sum_{l=1}^\infty (u_l - u_{k+l}) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1}(1+u_l+u_{k-l})\Big\} =$$

$$= u_k\Big\{\frac{1}{2}+u_1+u_2+\ldots+u_k - \frac{1}{2}(k-1) - (u_1+u_2+\ldots+u_{k-1})\Big\} = u_k\Big(1+u_k-\frac{1}{2}k\Big).$$

И в результате

$$S^2 = \Big(\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty nu_n + \sum_{k=1}^\infty u_k\Big(1+u_k-\frac{1}{2}k\Big)\cos k\theta =$$

$$= \Big(\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\Big)^2 + \sum_{m=1}^\infty u_m(1+u_m)\cos m\theta + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^\infty mu_m(1-\cos m\theta) = T_1+T_2.$$

Тождество эквивалентно

$$\left\{\zeta(u)-\frac{\eta_1 u}{\omega_1}\right\}^2-\wp(u)=\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^2\left\{-\frac{1}{24}+\sum_1^\infty\frac{q^{2m}}{(1-q^{2m})^2}\cos\frac{m\pi u}{\omega_1}\right\}$$

в общепринятых обозначениях теории эллиптических функций.

9.3. Якоби не предпринимал попыток вычисления $r_{2s}(n)$, когда $2s>8$, и первые результаты в этом направлении для $2s=10$ и $2s=12$ были получены Лиувиллем и Эйзенштейном. В этих случаях $r_{2s}(n)$ обычно не выражается как простая «функция делителей» числа n. К примеру, в обозначениях Глейшера (Glaisher)

$$r_{10}(n)=\frac{4}{5}\{E_4(n)+16E_4'(n)+8\chi_4(n)\},$$

где

$$E_4(n)=\sum_{d\text{ нечетно},\,d|n}(-1)^{(d-1)/2}d^4,\quad E_4'(n)=\sum_{d'\text{ нечетно},\,d|n}(-1)^{(d'-1)/2}d^4$$

(d' равно n/d, делитель n, «сопряженный» d), и

$$\chi_4(n)=\frac{1}{4}\sum_{a^2+b^2=n}(a+bi)^4$$

(суммирование происходит по гауссовым комплексным делителям n). Существуют аналогичные формулы для $2s=12,\,14,\,\ldots$; $r_{2s}(n)$ в каждом из этих случаев формула представляет собой сумму «функции делителей» и одной или нескольких вспомогательных функций. Сложность вспомогательных функций возрастает с увеличением s, и лишь простейшие из них, такие как $\chi_4(n)$, можно определить арифметически ясным способом. Большую часть из них можно выделить лишь как коэффициенты в разложении модулярных функций.

Мы обнаружим, однако, что всегда существует функция делителей, которая «доминирует» в значении $r_{2s}(n)$. Во всех случаях

$$r_{2s}(n)=\delta_{2s}(n)+e_{2s}(n),$$

где $\delta_{2s}(n)$ функция делителей и $e_{2s}(n)$ намного меньше, чем $\delta_{2s}(n)$ для больших n, поэтому

$$r_{2s}(n)\sim\delta_{2s}(n),$$

когда n стремится к бесконечности.

9.4. Я предлагаю подробно изучить здесь два частных случая $2s = 8$ и $2s = 24$. Анализ несколько проще, чем обычно, когда $2s$ кратно 8, но эти два случая являются достаточно типичными для общей теории. Для первого случая я собираюсь получить классическую формулу Якоби, а во втором случае — наиболее характерные из новых теорем, полученных Рамануджаном. Я не думаю, что ранее публиковалось какое-либо завершенное доказательство этих формул.

Я не собираюсь использовать методов Якоби и Рамануджана, а воспользуюсь более поздним «функционально-теоретическим» методом, полученным Морделлом и мною, в котором основы теории показаны намного четче. Однако я должен начать с нескольких общих замечаний о вкладе Рамануджана в решение этой задачи, которое изложено в двух больших работах в *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*[1].

Всегда сложно сказать, сколько Рамануджан позаимствовал от других исследователей, и наиболее сложно сделать это, когда он продолжил работы, начатые им до приезда в Англию, и когда он занимается, как в данном случае, каким-либо аспектом теории эллиптических функций. Нет никакой книги по эллиптическим функциям из тех, которые он мог бы увидеть в Индии, в которой бы что-либо говорилось об арифметических приложениях этой теории. Поэтому я полагаю, что Рамануджан переоткрыл формулу Якоби, что вполне согласуется с его дарованием.

В то время, когда он публиковал эти работы, Рамануджан уже изучил намного больше и знал все о работах Якоби и более поздних исследованиях. В частности, он прочел статьи Глейшера и рассматривал их содержимое как общеизвестные факты; и читатель, который прочитает его благодарности в начале статей, возможно, будет недооценивать его оригинальный вклад. Эти статьи во многом оригинальны, какого бы мнения мы не придерживались: они характеризуют творчество Рамануджана в его наивысшем расцвете. Статьи содержат множество замечательных теорем, которые неоспоримо являются новыми, и их следствия еще более замечательны, что позднее было подтверждено Морделлом, и общий уровень анализа поразительно высок. В частности, вторая статья содержит всю формальную теорию «сумм Рамануджана», которая является фундаментальной для моих текущих целей.

[1] №18 и 21 Сборника трудов.

Я должен начать с формул Рамануджана, хотя я и развиваю теорию способом, совершенно отличным от его собственного.

Суммы Рамануджана $c_q(n)$

9.5. Суммой Рамануджана называется

$$c_q(n) = \sum_{p(q)} e^{-2np\pi i/q},$$

где обозначение означает, что суммирование происходит по всем значениям p, меньшим и взаимно простым с q.[1] Ее также можно записать в виде

$$c_q(n) = \sum_{p(q)} \cos \frac{2np\pi}{q}$$

(форма, которая показывает, что сумма является вещественной) или же как

$$c_q(n) = \sum \rho_q^n,$$

где ρ_q является простым q-м корнем из 1.

Легко вычислить $c_q(n)$ в терминах функции Мебиуса $\mu(n)$. Эта функция определяется соотношениями

$$\mu(1) = 1, \tag{i}$$

$$\mu(n) = (-1)^\nu, \tag{ii}$$

если $n = p_1 p_2 \dots p_\nu$ является произведением ν различных простых множителей, и

$$\mu(n) = 0, \tag{iii}$$

если n содержит повторяющийся множитель[2]. Главными свойствами $\mu(n)$ являются (a) что

$$\sum_{d|q} \mu(d) = 0$$

[1] Или любая полная система вычетов, простых с q.

[2] Мы уже рассматривали $\mu(n)$ в лекциях II и IV. См. сноску на стр. 38.

для всех $q > 1$, и (b) что тождество

$$g(q) = \sum_{d|q} f(d) \tag{9.5.1}$$

и

$$f(q) = \sum_{d|q} \mu\Big(\frac{q}{d}\Big) g(d) \tag{9.5.2}$$

эквивалентны между собой. Последняя теорема обычно называется «формула обращения Мебиуса».

Рамануджан доказал, что

$$c_q(n) = \sum_{d|q,\, d|n} \mu\Big(\frac{q}{d}\Big) d \tag{9.5.3}$$

(суммирование происходит по всем общим делителям q и n). Чтобы доказать это, он отмечает, что

$$\eta_q(n) = \sum_{h=0}^{q-1} e^{-2nh\pi i/q}$$

равно q, если $q \mid n$, и 0 в противном случае. Но очевидно, что

$$\eta_q(n) = \sum_{d|q} c_d(n),$$

и отсюда, по формуле Мебиуса,

$$c_q(n) = \sum_{d|q} \mu\Big(\frac{q}{d}\Big) \eta_d(n),$$

что и составляет (9.5.3).

Существует другое доказательство, которое несколько длиннее, но основывается на принципах, которые будут полезны в дальнейшем. Будем говорить, что $f(q)$ *мультипликативная*, если

$$f(qq') = f(q)f(q'), \tag{9.5.4}$$

когда $(q, q') = 1$. В частности, это означает, что $f(1) = 1$. Очевидно, что если мы хотим доказать, что

$$f(q) = F(q), \tag{9.5.5}$$

и зная, что обе $f(q)$ и $F(q)$ являются мультипликативными, тогда достаточно доказать результат для случая, когда q является степенью простого числа.

Теперь, если $(q,\, q') = 1$, имеем

$$c_q(n)c_{q'}(n) = \sum_{p(q)} e^{-2np\pi i/q} \sum_{p'(q')} e^{-2np'\pi i/q'} = \sum_{p(q),\, p'(q')} e^{-2nP\pi i/qq'},$$

где

$$P = pq' + p'q$$

и P пробегает по диапазону $P(qq')$, когда p и p' пробегают $p(q)$ и $p'(q')$. Следовательно,

$$\sum_{p(q),\, p'(q')} e^{-2nP\pi i/qq'} = \sum_{P(qq')} e^{-2nP\pi i/qq'} = c_{qq'}(n)$$

и сумма Рамануджана является мультипликативной.

И вновь, если мы обозначим правую часть (9.5.3) через $C_q(n)$, то получим

$$C_q(n)C_{q'}(n) = \sum \mu\Big(\frac{q}{d}\Big)\Big(\frac{q'}{d'}\Big)dd' = \sum \mu\Big(\frac{qq'}{dd'}\Big)dd'. \tag{9.5.6}$$

Здесь $d \mid q$, $d \mid n$, $d' \mid q'$, $d' \mid n$, и эти соотношения эквивалентны

$$dd' | qq', \quad dd' | n$$

(поскольку q и q' взаимно простые). Следовательно, правая часть (9.5.6) равна $C_{qq'}(n)$ и $C_q(n)$ также является мультипликативной.

Таким образом, нам остается лишь доказать, что

$$c_{\varpi^k}(n) = C_{\varpi^k}(n),$$

когда ϖ является простым числом. Значения p в $p(\varpi^k)$ имеют вид

$$p = \varpi^{k-1}z + p_1,$$

где $z = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, \varpi - 1$ и p_1 пробегает $p_1(\varpi^{k-1})$. Следовательно,

$$c_{\varpi^k}(n) = \sum_{p_1(\varpi^{k-1})} e^{-2np_1\pi i/\varpi^k} \sum_{z=0}^{\varpi-1} e^{-2nz\pi i/\varpi}$$

и внутренняя сумма равна ϖ, когда $\varpi \mid n$, и 0 в противном случае. Следовательно,

$$c_{\varpi^k}(n) = \varpi \sum_{p_1(\varpi^{k-1})} e^{-2n_1 p_1 \pi i/\varpi^{k-1}} = \varpi c_{\varpi^{k-1}}(n_1), \tag{9.5.7}$$

если $\varpi \mid n$ и $n = \varpi n_1$, и $c_{\varpi^k}(n) = 0$ в противном случае.

Теперь

$$c_\varpi(n) = \sum_1^{\varpi-1} e^{-2np\pi i/\varpi},$$

поэтому

$$c_\varpi(n) = -1 \quad (\varpi \nmid n), \quad c_\varpi(n) = \varpi - 1 \quad (\varpi | n); \tag{9.5.8}$$

и мы теперь можем вычислить $c_{\varpi^k}(n)$ с помощью (9.5.7) для любого k. Получаем, что

$$c_{\varpi^2}(n) = 0 \quad (\varpi \nmid n), \quad -\varpi \quad (\varpi | n,\ \varpi^2 \nmid n), \quad \varpi(\varpi - 1) \quad (\varpi^2 | n), \tag{9.5.9}$$

и в общем случае

$$c_{\varpi^k}(n) = 0\ (\varpi^{k-1} \nmid n), \quad -\varpi^{k-1}\ (\varpi^{k-1} | n,\ \varpi^k \nmid n), \quad \varpi^{k-1}(\varpi - 1)\ (\varpi^k | n); \tag{9.5.10}$$

и мы можем проверить еще раз, что это также значение $C_{\varpi^k}(n)$. Таким образом $c_q(n) = C_q(n)$, когда $q = \varpi^k$, и, таким образом, для всех q.

Ряд $\sum q^{-s} c_q(n)$

9.6. Рамануджан просуммировал большое количество рядов вида $\sum a_q c_q(n)$. Простейшие из них имеют вид

$$U(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q(n)}{q^s}. \tag{9.6.1}$$

Существует множество интересных способов вычисления суммы этого ряда. Он является абсолютно сходящимся при $s > 1$, поскольку $|c_q(n)| \leqslant d(n)$ для всех q.

(i) Самый быстрый способ был найден Эстерманном. Запишем $c_q(n)$ в виде

$$c_q(n) = \sum_{lm=q,\ m|n} \mu(l) m$$

так, чтобы

$$\frac{c_q(n)}{q^s} = \sum_{lm=q,\, m|n} \mu(l) l^{-s} m^{1-s}.$$

Когда мы просуммируем относительно q, мы снимем ограничение на l, которое будет принимать все положительные целые значения, и поэтому

$$U(n) = \sum_{l,\, m|n} \mu(l) l^{-s} m^{1-s} = \sum_{m|n} m^{1-s} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l^s} = \frac{\sigma_{1-s}(n)}{\zeta(s)} = \frac{n^{1-s}\sigma_{s-1}(n)}{\zeta(s)}, \tag{9.6.2}$$

где $\sigma_\nu(n)$ является суммой ν-х степеней делителей n.

(ii) Доказательство Рамануджана было следующим. Предположим, что $F(x, y)$ — произвольная функция двух переменных x и y и что

$$D(n) = \sum_{d|n} F\Big(d, \frac{n}{d}\Big),$$

и определим $\eta_\nu(n)$, как в § 9.5, так, чтобы $\eta_\nu(n)$ принимало значение ν или 0 в зависимости от того, является ли ν делителем n. Тогда

$$D(n) = \sum_{\nu=1}^{t} \frac{\eta_\nu(n)}{\nu} F\Big(\nu, \frac{n}{\nu}\Big)$$

для любого значения t, не меньше, чем n, и поэтому

$$D(n) = \sum_{\nu=1}^{t} \frac{1}{\nu} F\Big(\nu, \frac{n}{\nu}\Big) \sum_{d|\nu} c_d(n).$$

Теперь $c_j(n)$ встречается в этом ряде, когда $j|\nu$ или $\nu = j\mu$, в этом случае $\mu \leqslant t/j$, и поэтому

$$D(n) = c_1(n) \sum_{1}^{t} \frac{1}{\mu} F\Big(\mu, \frac{n}{\mu}\Big) +$$

$$+ c_2(n) \sum_{1}^{t/2} \frac{1}{2\mu} F\Big(2\mu, \frac{n}{2\mu}\Big) + c_3(n) \sum_{1}^{t/3} \frac{1}{3\mu} F\Big(3\mu, \frac{n}{3\mu}\Big) + \ldots \tag{9.6.3}$$

Предположим, в частности, что $F(x, y) = x^{1-s}$. Тогда

$$D(n) = \sum_{d|n} d^{1-s} = \sigma_{1-s}(n)$$

и

$$\sigma_{1-s}(n) = \frac{c_1(n)}{1^s} \sum_1^t \mu^{-s} + \frac{c_2(n)}{2^s} \sum_1^{t/2} \mu^{-s} + \frac{c_3(n)}{3^s} \sum_1^{t/3} \mu^{-s} + \dots$$

Наконец, если $s > 1$ и мы устремим $t \to \infty$, то мы получим (9.6.2).

(iii) Третье доказательство по структуре схоже со вторым доказательством § 9.5. Мы начинаем с тождества

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{f(q)}{q^s} = \prod_{\varpi} \Big\{ 1 + \frac{f(\varpi)}{\varpi^s} + \frac{f(\varpi^2)}{\varpi^{2s}} + \dots \Big\} = \prod_{\varpi} \chi_{\varpi},$$

где $f(q)$ — произвольная мультипликативная функция и ϖ пробегает по всем простым числам. Это тождество сводится к «произведению Эйлера», когда $f(q) = 1$.

В этом случае

$$\chi_{\varpi} = 1 + \frac{c_{\varpi}(n)}{\varpi^s} + \frac{c_{\varpi^2}(n)}{\varpi^{2s}} + \dots,$$

и мы можем процитировать формулу (9.5.10). Предположим, что ϖ^a — наибольшая степень ϖ, которая делит n. Тогда

$$\chi_{\varpi} = 1 - \varpi^{-s},$$

если $a = 0$, и в общем случае

$$\chi_{\varpi} = 1 + \frac{\varpi - 1}{\varpi^s} + \frac{\varpi(\varpi - 1)}{\varpi^{2s}} + \dots + \frac{\varpi^{a-1}(\varpi - 1)}{\varpi^{as}} - \frac{\varpi^a}{\varpi^{(a+1)s}} =$$

$$= (1 - \varpi^{-s}) \frac{1 - \varpi^{(a+1)(1-s)}}{1 - \varpi^{1-s}}.$$

Следовательно,

$$\sum_q \frac{c_q(n)}{q^s} = \prod_{\varpi} (1 - \varpi^{-s}) \prod_{\varpi|n} \frac{1 - \varpi^{(a+1)(1-s)}}{1 - \varpi^{1-s}} = \frac{\sigma_{1-s}(n)}{\zeta(s)}$$

по обычной формуле для суммы степеней делителей n.

В частности, при $s = 2$ мы получим формулу

$$\sigma(n) = \tfrac{1}{6}\pi^2 n\Big\{1+\frac{(-1)^n}{2^2}+\frac{2\cos\frac{2}{3}n\pi}{3^2}+\frac{2\cos\frac{1}{2}n\pi}{4^2}+\frac{2\Big(\cos\frac{2}{5}n\pi+\cos\frac{4}{5}n\pi\Big)}{5^2}+\dots\Big\}$$

для суммы делителей n. Эта формула очень ярко показывает колебание $\sigma(n)$ относительно своего «среднего значения» $\frac{1}{6}\pi^2 n$.

Мы предположили, что $s > 1$, в этом случае наш ряд абсолютно сходящийся. Мы можем записать (9.6.2) в виде

$$\sum_q \frac{c_q(n)}{q^s} = \sum_{d|n} \frac{d}{d^s} \sum_m \frac{\mu(m)}{m^s}. \tag{9.6.4}$$

Тогда первый множитель справа является конечным и, следовательно, абсолютно сходящимся, ряд Дирихле и второй ряд Дирихле сходятся при $s \geqslant 1$; и, следовательно, по знаменитой теореме о перемножении рядов Дирихле, ряд в левой части является сходящимся и (9.6.2) выполняется при $s \geqslant 1$. Полагая $s = 1$, мы получим

$$c_1(n) + \frac{c_2(n)}{2} + \frac{c_3(n)}{3} + \dots = 0$$

(эта теорема имеет такую же глубину, как теорема о простых числах).

Рамануджан вычислил множество подобных сумм, среди которых

$$c_1(n)\log 1 + \frac{c_2(n)}{2}\log 2 + \frac{c_3(n)}{3}\log 3 + \dots = -d(n)$$

и

$$\pi\Big\{c_1(n) - \frac{c_3(n)}{3} + \frac{c_5(n)}{5} - \dots\Big\} = r_2(n)$$

являются наиболее яркими примерами.

Ряд $\sum \varepsilon_q q^{-s} c_q(n)$

9.7. Однако рядом, важным для нашей текущей цели, является не (9.6.1), а

$$V(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon_q \frac{c_q(n)}{q^s}, \tag{9.7.1}$$

где

$$\varepsilon_q = 1 \quad (q \equiv 1,\ 3), \quad 0 \quad (q \equiv 2), \quad 2^s \quad (q \equiv 0),$$

сравнение производится по модулю 4. Этот ряд можно просуммировать любым из методов § 9.6. Я выбираю первый, поскольку он будет короче. Определим $\sigma_\nu^*(n)$ в виде

$$\sigma_\nu^*(n) = \sigma_\nu(n) \quad (n \text{ нечетно}),$$
$$\sigma_\nu^*(n) = \sigma_\nu^e(n) - \sigma_\nu^o(n) \quad (n \text{ четно}),$$

$\sigma_\nu^e(n)$ и $\sigma_\nu^o(n)$ являются суммами ν-х степеней четных и нечетных делителей n, и докажем, что

$$V(n) = \frac{n^{1-s}}{(1-2^{1-s})\zeta(s)}\sigma_{s-1}^*(n).^1 \tag{9.7.2}$$

Имеем, к примеру,

$$V(n) = \sum_{q=1,\,3,\,\ldots} q^{-s}c_q(n) + 2^s \sum_{q=4,\,8,\,\ldots} q^{-s}c_q(n) = V_1(n) + V_2(n).$$

Здесь сначала

$$V_1(n) = \sum_{q=1,\,3,\,\ldots} (lm)^{-s} \sum_{lm=q,\,m|n} \mu(l)m =$$

$$= \sum_{lm=1,\,3,\,\ldots,\,m|n} \mu(l)l^{-s}m^{1-s} = \sigma_{1-s}^o(n) \sum_{l=1,\,3,\,\ldots} \frac{\mu(l)}{l^s} =$$

$$= \sigma_{1-s}^o(n) \prod_{\varpi>2} \left(1 - \frac{1}{\varpi^s}\right) = \frac{\sigma_{1-s}^o(n)}{(1-2^{-s})\zeta(s)}.$$

Далее,

$$V_2(n) = 2^s \sum_{q=4,\,8,\,\ldots} q^{-s} \sum_{lm=q,\,m|n} \mu(l)m = 2^s \sum_{lm=4,\,8,\,\ldots} \mu(l)l^{-s}m^{1-s}.$$

---

[1] В этом случае мы не имеем двух альтернативных форм как в (9.6.2), поскольку

$$n^{1-s}\sigma_{s-1}^*(n) \neq \sigma_{1-s}^*(n),$$

когда n — четное число.

Если $4|l$, тогда $\mu(l) = 0$. Следовательно, мы можем предположить, что либо (i) l является нечетным и $4|m$, либо (ii) $l = 2l_1$, где l_1 — нечетно и $2|m$. Слагаемые типа (i) дают

$$2^s \sum_{l=1,3,\ldots} \frac{\mu(l)}{l^s} \sum_{4|m,\, m|n} m^{1-s} = \frac{2^s \sigma^{ee}_{1-s}(n)}{(1-2^{-s})\zeta(s)},$$

где двойной индекс означает суммирование по дважды четным делителям, и слагаемые типа (ii) дают

$$-\sum_{l_1=1,3,\ldots} \frac{\mu(l_1)}{l_1^s} \sum_{2|m,\, m|n} m^{1-s} = -\frac{\sigma^{e}_{1-s}(n)}{(1-2^{-s})\zeta(s)}.$$

Собирая наши результаты, мы получаем

$$(1-2^{-s})\zeta(s)V(n) = \sigma^{o}_{1-s}(n) - \sigma^{e}_{1-s}(n) + 2^s \sigma^{ee}_{1-s}(n),$$

и нам осталось лишь проверить, что

$$\sigma^{o}_{1-s}(n) - \sigma^{e}_{1-s}(n) + 2^s \sigma^{ee}_{1-s}(n) = n^{1-s}\sigma^{*}_{s-1}(n). \tag{9.7.3}$$

Это очевидно, когда n нечетное число. Если $n = 2N$, где N нечетное число и δ пробегает делители N, тогда левая часть (9.7.3) равна

$$\sum \delta^{1-s} - \sum (2\delta)^{1-s} = (1-2^{1-s}) \sum \delta^{1-s} = (1-2^{1-s}) N^{1-s} \sum \delta^{s-1} =$$
$$= (2^{s-1}-1) n^{1-s} \sum \delta^{s-1} = n^{1-s} \Big\{ \sum (2\delta)^{s-1} - \sum \delta^{s-1} \Big\} = n^{1-s}\sigma^{*}_{s-1}(n).$$

Наконец, если $n = 2^\alpha N$, где $\alpha > 1$, тогда это выражение равно

$$\sum \delta^{1-s} - \{2^{1-s} + 4^{1-s} + \ldots + 2^{\alpha(1-s)}\} \sum \delta^{1-s} +$$
$$+ 2^s \{4^{1-s} + 8^{1-s} + \ldots + 2^{\alpha(1-s)}\} \sum \delta^{1-s} =$$
$$= \{1 + 2^{1-s} + 4^{1-s} + \ldots + 2^{(\alpha-1)(1-s)} - 2^{\alpha(1-s)}\} \sum \delta^{1-s} =$$
$$= N^{1-s} \{1 + 2^{1-s} + 4^{1-s} + \ldots + 2^{(\alpha-1)(1-s)} - 2^{\alpha(1-s)}\} \sum \delta^{s-1} =$$
$$= n^{1-s} \{2^{\alpha(s-1)} + 2^{(\alpha-1)(s-1)} + \ldots + 2^{s-1} - 1\} \sum \delta^{s-1} =$$
$$= n^{1-s} \{\sigma^{e}_{s-1}(n) - \sigma^{o}_{s-1}(n)\} = n^{1-s}\sigma^{*}_{s-1}(n).$$

Что и завершает доказательство (9.7.2).

Сингулярный ряд в задаче $2s$ квадратов

9.8. Теперь я должен рассказать об идеях, которые не были получены (по крайней мере в явном виде) в работе Рамануджана[1]. Основываясь на этих идеях, Литтлвуд и я начали нашу работу над задачей Варинга.

Легко получить асимптотическую формулу для поведения функции

$$f(s) = \vartheta^{2s}(x) = (1 + 2x + 2x^4 + \dots)^{2s},$$

где x радиально стремится к «рациональной точке» $e^{2p\pi i/q}$ на единичной окружности. Мы можем предположить, что $q = 1$, $p = 0$ или что $q > 1$, $0 < p < q$ и $(p, q) = 1$. Если

$$x = re^{2p\pi i/q}$$

и $r \to 1$, тогда

$$\vartheta(x) = 1 + 2\sum_1^\infty r^{n^2} e^{2n^2 p\pi i/q} = 1 + 2\sum_{j=1}^q \sum_{l=0}^\infty r^{(lq+j)^2} e^{2(lq+j)^2 p\pi i/q} =$$

$$= 1 + 2\sum_{j=1}^q e^{2j^2 p\pi i/q} \sum_{l=0}^\infty r^{(lq+j)^2}.$$

Если $r = e^{-\delta}$, так что $\delta \to 0$, тогда

$$\sum_{l=0}^\infty r^{(lq+j)^2} = \sum_{l=0}^\infty e^{-\delta(lq+j)^2} \sim \int_0^\infty e^{-\delta(xq+j)^2}\, dx \sim \int_0^\infty e^{-\delta x^2 q^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2q}\sqrt{\frac{\pi}{\delta}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2q}\Big(\log\frac{1}{r}\Big)^{-1/2},$$

и, следовательно,

$$\vartheta(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{q} S_{p,q}\Big(\log\frac{1}{r}\Big)^{-1/2}, \tag{9.8.1}$$

где

$$S_{p,q} = \sum_{j=1}^q e^{2j^2 p\pi i/q} \tag{9.8.2}$$

[1] За исключением нашей совместной работы о разбиениях.

— одна из «сумм Гаусса». Если $S_{p,q} = 0$, что происходит при $q \equiv 2 \pmod 4$, тогда (9.8.1) следует интерпретировать как

$$\vartheta(x) = o\Big\{\Big(\log\frac{1}{r}\Big)^{-1/2}\Big\}.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \pi^{-s}\Big(\frac{S_{p,q}}{q}\Big)^{2s}\Big(\log\frac{1}{r}\Big)^{-s}. \tag{9.8.3}$$

Теперь мы построим вспомогательные функции, которые имитируют поведение $f(x)$, когда x приближается к единичной окружности подобным образом. Известно, что если

$$F_s(x) = \sum_1^\infty n^{s-1}x^n,$$

тогда

$$F_s(x) - \Gamma(s)\Big(\log\frac{1}{x}\Big)^{-s}$$

является регулярной при $x = 1$. Тогда, если

$$f_{p,q}(x) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\Big(\frac{S_{p,q}}{q}\Big)^{2s}F_s(xe^{-2p\pi i/q}),$$

то

$$f_{p,q}(x) \sim \pi^s\Big(\frac{S_{p,q}}{q}\Big)^{2s}\Big(\log\frac{1}{r}\Big)^{-s} \sim f(x)$$

при x, стремящемся к $e^{2p\pi i/q}$. Таким образом, $f_{p,q}(x)$ «имитирует» $f(x)$ вблизи этой точки, и если мы запишем

$$\Theta_{2s}(x) = 1 + \sum_{p,q} f_{p,q}(x),$$

то мы можем ожидать, что $\Theta_{2s}(x)$ будет имитировать $f(x)$ вблизи *всех* рациональных точек $e^{2p\pi i/q}$. Это высказывание равносильно тому, что $\Theta_{2s}(x)$ имитирует $f(x)$ очень последовательно, настолько последовательно, что должно быть очень близкое соотношение между коэффициентами этих двух функций. Если это так, то появится способ с любой степенью точности приближенного определения $r_{2s}(n)$.

Теперь

$$\Theta_{2s}(x) = 1 + \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{p,\,q} \Big(\frac{S_{p,\,q}}{q}\Big)^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{-2np\pi i/q} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{2s}(n) x^n,$$

где

$$\rho_{2s}(n) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} n^{s-1} \sum_{p,\,q} \Big(\frac{S_{p,\,q}}{q}\Big)^{2s} e^{-2np\pi i/q}.$$

Мы можем записать это в виде

$$\rho_{2s}(n) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} n^{s-1} \sum_{q=1}^{\infty} A_q(n), \tag{9.8.4}$$

где $A_1(n) = 1$ и

$$A_q(n) = q^{-2s} \sum_{p(q)} S_{p,\,q}^{2s} e^{-2np\pi i/q}, \tag{9.8.5}$$

когда $q > 1$. Нам следует ожидать довольно близкого соотношения между $r_{2s}(n)$ и $\rho_{2s}(n)$. Это всего лишь ожидание, поскольку наш анализ является совершенно «эвристическим»; но очевидно, что это ожидание стоит исследования.

Назовем (9.8.4) *сингулярным рядом*. Наша конструкция является типичным примером «сингулярных рядов» в общей задаче Варинга.

Суммирование сингулярных рядов, когда $2s \equiv 0 \pmod 8$

9.9. Сингулярный ряд можно просуммировать при всех s. Анализ является наиболее простым при $2s \equiv 0 \pmod 8$, и в дальнейшем я буду это предполагать.

Гауссова сумма $S_{p,\,q}$ (или просто S_q, если мы не производим явную ссылку на p) может быть вычислена для всех p, q по формуле

$$S_{p,\,qq'} = S_{pq',\,q} S_{pq,\,q'}, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = 0,$$
$$S_{2^{2\mu}} = 2^{\mu}(1 + i^p), \quad S_{2^{2\mu+1}} = 2^{\mu+1} e^{p\pi i/2},$$
$$S_{\varpi} = \Big(\frac{p}{\varpi}\Big) i^{(\varpi-1)^2/2} \sqrt{\varpi}, \quad S_{\varpi^{2\mu}} = \varpi^{\mu}, \quad S_{\varpi^{2\mu+1}} = \varpi^{\mu} S_{\varpi}.$$

Здесь q и q' — взаимно простые и ϖ является нечетным простым числом. Формула для 8-й степени имеет намного более простой вид, и мы получаем, что

$$S_{p,\,q}^{2s} = \varepsilon_q q^s,$$

когда $2s \equiv 0 \pmod 8$, ε_q — символ из § 9.7. Следовательно,

$$A_q = \varepsilon_q q^{-s} \sum_{p(q)} e^{-2np\pi i/q} = \varepsilon_q q^{-s} c_q(n),$$

и в обозначениях § 9.7

$$\rho_{2s}(n) = \frac{\pi^s n^{s-1}}{\Gamma(s)} V(n). \tag{9.9.1}$$

Таким образом, этот ряд является (за исключением внешнего модуля) рядом Рамануджана (9.7.1), и поэтому

$$\rho_{2s}(n) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)(1-2^{-s})\zeta(s)} \sigma_{s-1}^*(n). \tag{9.9.2}$$

В частности, если $2s = 8$, тогда

$$(1-2^{-s})\zeta(s) = \frac{\pi^4}{96},$$
$$\rho_s(n) = 16\sigma_3^*(n). \tag{9.9.3}$$

Если $2s = 24$, тогда

$$(1-2^{-12})\zeta(12) = (1-2^{-12})2^{11}\pi^{12}\frac{B_6}{12!}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}$$

и

$$\rho_{24}(n) = \frac{16}{691}\sigma_{11}^*(n). \tag{9.9.4}$$

Модулярные функции

9.10. У нас имеется довольно сильное основание, чтобы ожидать обнаружения достаточно близкого сходства между $r_{2s}(n)$ и $\rho_{2s}(n)$, и в дальнейшем анализе получаем даже больше, чем нужно, для подтверждения наших ожиданий, сходство оказывается чрезвычайно близким.

Действительно, когда $2s \leqslant 8$, две функции являются тождественными, в частности,

$$r_8(n) = \rho_8(n).$$

Доказательство этого зависит от аргументов несколько отличающегося характера, впервые примененных к этой задаче Морделлом.

9.11. Нам потребуются элементы теории *модулярных групп* и функции, связанные с ними. Модулярная группа Γ имеет два вида. В однородном виде она определена как группа подстановок

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2, \tag{9.11.1}$$

где a, b, c, d — целые числа и

$$ad - bc = 1. \tag{9.11.2}$$

В неоднородном виде запишем

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \tag{9.11.3}$$

и группа определяется подстановками

$$\tau' = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}.$$

Мы будем использовать любой из символов

$$S, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right)$$

для обозначения подстановок (9.11.1) или (9.11.3). Γ порождается повторным применением двух подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\tau' = \tau + 1, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}. \tag{9.11.4}$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что

$$\Im(\tau) > 0, \tag{9.11.5}$$

поэтому

$$|x| = |e^{\pi i \tau}| < 1.^1 \tag{9.11.6}$$

Если $\tau = u + iv$, $\tau' = u' + iv'$, тогда

$$v' = \frac{(ad - bc)v}{(a + bu)^2 + b^2 v^2} > 0,$$

поэтому одна точка в верхней полуплоскости переходит в другую, и лишь такие точки будут относиться к делу.

Мы назовем область D, определенную через

$$-\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}, \quad u^2 + v^2 > 1,$$

фундаментальной областью Γ. Каждая подстановка из Γ переводит D в криволинейный треугольник, стороны которого являются дугами окружностей с углами $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, 0\right)$. Эти треугольники покрывают верхнюю полуплоскость без перекрываний.

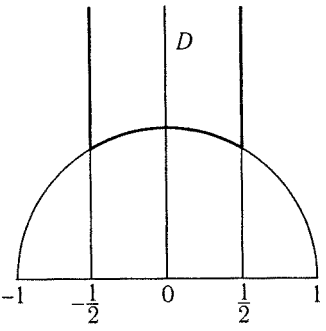


Рис. 3

Фундаментальной функцией, связанной с модулярной группой, является «абсолютный инвариант» Клейна $J(\tau)$, который определяется следующим образом. Запишем

$$g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4 \left\{1 + 240\left(\frac{1^3 x^2}{1 - x^2} + \frac{2^3 x^4}{1 - x^4} + \dots\right)\right\},$$

$$g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{216}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6 \left\{1 - 504\left(\frac{1^5 x^2}{1 - x^2} + \frac{2^5 x^4}{1 - x^4} + \dots\right)\right\}$$

(это обычные инварианты теории Вейерштрасса),

$$\Delta = \Delta(\omega_1, \omega_2) = g_2^3 - 27 g_3^2 = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} x^2 \{(1 - x^2)(1 - x^4)\dots\}^{24}$$

[1] Я использую x вместо обычного q, как в лекции VIII, поскольку q потребуется для других целей.

и

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{\Delta}.$$

Тогда $J(\tau)$ является функцией одной переменной τ, инвариантной относительно перестановок из Γ. Она принимает любое значение всего лишь один раз в D (когда на границу D наложены соответствующие условия) и конформно отображает D на всю комплексную плоскость (считаем, что она ограничена точками 0, 1 и ∞).

Мы назовем функцию, которая, подобно $J(\tau)$, инвариантна относительно Γ, *модулярным инвариантом*: чаще используется фраза «модулярная функция». Функция

$$J = J(\tau)$$

играет для модулярных инвариантов роль переменной z в обычной теории однозначных функций $f(z)$. Тем самым модулярный инвариант с соответствующим образом ограниченными особенностями является однозначной функцией J. В частности, *если модулярный инвариант является регулярным и ограниченным в D, тогда* он является однозначной функцией переменной J, ограниченной во всей плоскости J, и, соответственно, *он является константой.*

Функции, связанные с подгруппой Γ_3

9.12. Сейчас мы рассмотрим функции, которые не являются модулярными инвариантами в полном смысле, который мы только что определили, но которые являются инвариантными или «почти» инвариантными для подстановок из определенных подгрупп Γ.

Легко проверить, что подстановки Γ, удовлетворяющие условиям сравнимости[1]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod 2,$$

образуют группу, являющуюся подгруппой Γ, которую мы назовем Γ_3. Γ_3 порождается с помощью

$$\tau' = \tau + 2, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}. \tag{9.12.1}$$

[1] Либо a и d нечетны, а b и c четны, либо наоборот.

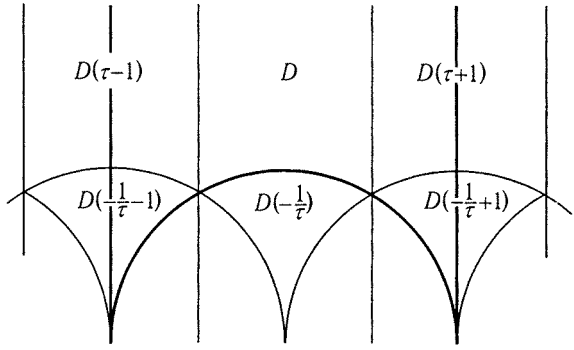


Рис. 4

Она имеет «фундаментальную область» D_3, определенную неравенствами

$$-1 < u < 1, \quad u^2 + v^2 > 1,$$

и подстановки из Γ_3 переводят D_3 в систему треугольников, все углы которых равны 0, которые полностью заполняют полуплоскость[1].

Существует главный инвариант $J_3(\tau)$ подгруппы Γ_3, который связан с Γ_3, как $J(t)$ с Γ (но его выражение нам не потребуется). Однозначная функция, инвариантная относительно Γ_3, является однозначной функцией J_3 и трехзначной функцией J. Наконец, *функция, инвариантная относительно* Γ_3, *регулярная и ограниченная в* D_3, *является константой.*

Доказательство того, что $r_8(n) = \rho_8(n)$

9.13. Функции

$$\vartheta^8 = \vartheta^8(x) = \vartheta^8(0, \tau) = (1 + 2x + 2x^4 + \ldots)^8$$

[1] D_3 можно приближенно описать как область, образованную объединением трех областей, конгруэнтных D (т. е. преобразований D подстановками из Γ). Более точно, она образована из D и половин каждой из четырех областей

$$D(\tau+1), \quad D(\tau-1), \quad D\Big(-\frac{1}{\tau}+1\Big), \quad D\Big(-\frac{1}{\tau}-1\Big)$$

(преобразование D подстановкой $\tau' = \tau + 1$, и т. д.), на рис. 4 D_3 отмечено более толстыми линиями.

и

$$\Theta_8 = \Theta_8(x) = 1 + \sum_1^\infty \rho_8(n) x^n,$$

где $x = e^{\pi i \tau}$, являются однозначными функциями τ. Если мы можем доказать, что

(A) $\vartheta^{-8}\Theta_8$ *инвариантна относительно* Γ_3,

(B) $\vartheta^{-8}\Theta_8$ *регулярна и ограничена в* D_3,

тогда из общей теоремы §9.12 будет следовать, что $\vartheta^{-8}\Theta_8$ является константой, которая, очевидно, равна 1, и отсюда будет следовать, что

$$r_8(n) = \rho_8(n) = 16\sigma_3^*(n).$$

Доказательство (A)

9.14. Достаточно доказать, что $\vartheta^{-8}\Theta_8$ инвариантна относительно двух подстановок

$$S_1(\tau + 2), \quad S_2\Big(-\frac{1}{\tau}\Big),$$

которые порождают Γ_3. Мы можем показать, в достаточно общем случае, что $\vartheta^{-2s}\Theta_{2s}$ является инвариантной[1].

В первую очередь,

$$\vartheta^{2s}(0, \tau + 2) = \vartheta^{2s}(0, \tau), \tag{9.14.1}$$

$$\vartheta^{2s}\Big(0, -\frac{1}{\tau}\Big) = \tau^2 \vartheta^{2s}(0, \tau), \tag{9.14.2}$$

используя известные формулы для линейного преобразования ϑ-функций[2]. Остается определить поведение Θ_{2s}. Очевидно, что Θ_{2s} инвариантно относительно S_1, поскольку x инвариантен относительно S_1

[1] Мы предполагаем, что $2s \equiv 0 \pmod 8$, но доказательство является практически таким же и в остальных случаях.

[2] Нам потребуется полная таблица для функций

$$\vartheta_2(0, \tau) = 2x^{1/4} + 2x^{9/4} + 2x^{25/4} + \dots,$$
$$\vartheta_3(0, \tau) = 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots,$$
$$\vartheta_4(0, \tau) = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \dots,$$

(и поэтому $\vartheta^{-2s}\Theta_{2s}$ будет инвариантным). Мы также получим это в качестве побочного результата из дальнейшего анализа.

Функция $F_s(x)$ из § 9.8 является элементарной. В действительности, если $x = e^{-y}$ так, что $y = -\pi i\tau$,

$$F_s(x) = \sum n^{s-1}x^n = \sum n^{s-1}e^{-ny} = \Big(\frac{d}{dy}\Big)^{s-2}\sum ne^{-ny} =$$

$$= \Big(\frac{d}{dy}\Big)^{s-2}\frac{e^{-y}}{(1-e^{-y})^2} = \Big(\frac{d}{dy}\Big)^{s-2}\frac{1}{4}\operatorname{cosech}^2\frac{1}{2}y = \Big(\frac{d}{dy}\Big)^{s-2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(y+2n\pi i)^2} =$$

$$= \Gamma(s)\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(y+2n\pi i)^s} = \frac{\Gamma(s)}{\pi^s}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n-\tau)^s}.$$

Также

$$xe^{-2p\pi i/q} = e^{\pi i(\tau-(2p/q))},$$

и поэтому

$$F_s(xe^{-2p\pi i/q}) = \frac{\Gamma(s)}{\pi^s}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\{2n-\tau+(2p/q)\}^s},$$

$$f_{p,\,q}(x) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\Big(\frac{S_{p,\,q}}{q}\Big)^{2s}F_s(xe^{-2p\pi i/q}) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\frac{\varepsilon_q}{q^s}F_s(xe^{-2p\pi i/q}) =$$

$$= \varepsilon_q\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\{2(nq+p)-q\tau\}^s}.$$

Следовательно,

$$\Theta_{2s}(x) = 1 + \sum_{p,\,q} f_{p,\,q}(x) = 1 + \sum_{p,\,q,\,n}\frac{\varepsilon_q}{\{2(nq+p)-q\tau\}^s}, \qquad (9.14.3)$$

которые равны

$$\vartheta_2(0,\,\tau+1) = \sqrt{i}\vartheta_2(0,\,\tau), \quad \vartheta_3(0,\,\tau+1) = \vartheta_3(0,\,\tau), \quad \vartheta_4(0,\,\tau+1) = \vartheta_4(0,\,\tau),$$

$$\vartheta_2\Big(0,\,-\frac{1}{\tau}\Big) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\vartheta_4(0,\,\tau), \quad \vartheta_3\Big(0,\,-\frac{1}{\tau}\Big) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\vartheta_3(0,\,\tau), \quad \vartheta_4\Big(0,\,-\frac{1}{\tau}\Big) = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{i}}\vartheta_2(0,\,\tau).$$

Здесь $\sqrt{i} = e^{\pi i/2}$, и у числа $\sqrt{\tau}$ вещественная и мнимая части положительны. Обозначение предложены Таннери и Молком, и $\vartheta_3(0,\,\tau) = \vartheta(0,\,\tau)$.

где диапазон суммирования определяется как

$$q = 1, 2, 3, \ldots; \quad 0 < p < q, \ (p, q) = 1; \quad -\infty < n < \infty$$

(за исключением того, что $p = 0$, когда $q = 1$).

Мы можем записать (9.14.3) в виде

$$\Theta_{2s} = 1 + \sum_{p,\,q} \frac{\varepsilon_q}{(2p - q\tau)^s}, \tag{9.14.4}$$

где $q = 1, 2, \ldots$ и p пробегает все значения (положительные или отрицательные), взаимно простые с q, и получаем

$$\Theta_{2s} = 1 + \sum_{q=1,\,3,\,\ldots} \frac{1}{(2p - q\tau)^s} + \sum_{q=4,\,8,\,\ldots} \frac{2^s}{(2p - q\tau)^s} =$$

$$= 1 + \sum_{q=1,\,3,\,\ldots} \frac{1}{(2p - q\tau)^s} + \sum_{q=2,\,4,\,\ldots} \frac{1}{(p - q\tau)^s} = 1 + \sum_{p,\,q} \frac{1}{(p - q\tau)^s}, \tag{9.14.5}$$

где теперь $q = 1, 2, \ldots$ и p пробегает все значения, взаимно простые с q и имеющие противоположную q четность.

Теперь нам нужно убрать ограничения, что p взаимно просто с q. Мы можем добиться этого, умножив обе части (9.14.5) на

$$\eta(s) = (1 - 2^{-s})\zeta(s) = 1 + 3^{-s} + 5^{-s} + \ldots$$

Тем самым мы получим[1]

$$\eta(s)\Theta_{2s} = \eta(s) + \sum_{p,\,q} \frac{1}{(p - q\tau)^s}, \tag{9.14.6}$$

где $q = 1, 2, 3, \ldots$ и p пробегает все значения противоположной четности с q. Мы также можем записать это выражение в любой из следующих форм:

$$\eta(s)\Theta_{2s} = -\eta(s) + \sum_{p,\,q} \frac{1}{(p - q\tau)^s} \quad (q = 1, 2, \ldots; \ p + q \equiv 1), \tag{9.14.7}$$

$$\eta(s)\Theta_{2s} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(p - q\tau)^s} \quad (p + q \equiv 1). \tag{9.14.8}$$

[1] Пара (p, q) противоположной четности — это одна из форм (P, Q), $(3P, 3Q)$, ..., где P и Q взаимно простые и имеют противоположную четность.

Здесь сравнение выполняется по модулю 2, и q в (9.14.8) пробегает по всем целым числам.

Если мы запишем

$$\eta(s)\Theta_{2s} = \chi(\tau),$$

тогда сразу из любой из форм (9.14.5)–(9.14.8) следует, что

$$\chi(\tau + 2) = \chi(\tau).$$

Как я указывал раньше, это очевидно с самого начала (но является полезной проверкой нашего анализа).

Воспользуемся (9.14.8) для исследования действия подстановки S_2. Она дает

$$\chi\Big(-\frac{1}{\tau}\Big) = \frac{1}{2}\tau^s \sum_{p+q\equiv 1} \frac{1}{(p\tau+q)^s} = \frac{1}{2}\tau^s \sum_{p+q\equiv 1} \frac{1}{(p-q\tau)^s} = \tau^s\chi(\tau),$$

при замене p, q на $-q$, p.

Таким образом, $\chi(\tau)$ изменяется под действием S_1 и S_2 точно так же, как ϑ^{2s}; и $\vartheta^{-2s}\Theta_{2s}$ *инвариантно относительно* S_1 *и* S_2 *и, следовательно, относительно* Γ_3.

Тем самым мы доказали (A). Более обще мы доказали инвариантность $\vartheta^{-2s}\Theta_{2s}$, когда $2s \equiv 0 \pmod 8$.

Доказательство (B)

9.15. Функции ϑ_8 и Θ_8 определены степенными рядами по переменной $x = e^{\pi i\tau}$, сходящимися в окружности $|x| < 1$ или в полуплоскости $x > 0$. Также

$$\vartheta(x) = \prod_1^\infty \{(1-x^{2n})(1+x^{2n-1})^2\}$$

не имеет нулей в окружности. Следовательно, $\vartheta^{-8}\Theta_8$ регулярно при $|x| < 1$ или $v > 0$. Она ограничена в любой замкнутой области D_3, из которой исключены две точки, в которых D_3 граничит с вещественной осью; поэтому она ограничена в D_3, если ограничена в окрестности двух точек $\tau = \pm 1$. Очевидно, что нам нужно рассмотреть лишь точку $\tau = 1$.

Пусть

$$\tau = 1 - \frac{1}{T}, \quad T = \frac{1}{1-\tau}, \tag{9.15.1}$$

и предположим, что $\tau \to 1$ вне D_3, поэтому $0 < u < 1$ и $u^2 + v^2 > 1$. Если $T = U + iV$, тогда

$$U = \frac{1-u}{(1-u)^2 + v^2}, \quad V = \frac{v}{(1-u)^2 + v^2},$$

поэтому $0 < U < 1$ и $V \to \infty$. Следовательно, $T \to \infty$ внутри D_3 и

$$X = e^{\pi i T} \to 0.$$

Теперь

$$\vartheta^8(x) = \vartheta_3^8(0, \tau) = \vartheta_3^8\Big(0, 1 - \frac{1}{T}\Big) = T^4 \vartheta_2^8(0, T) = T^4(2X^{1/4}|2X^{9/4}| \dots)^8,$$

поэтому

$$\vartheta^8 \sim 256 T^4 X^2, \tag{9.15.2}$$

когда $T \to \infty$ и $X \to 0$. Нам потребуется подобная формула для Θ_8.

Из (9.14.8) получаем

$$\frac{\pi^4}{96}\Theta_8 = \chi(\tau) - \chi\Big(1 - \frac{1}{T}\Big) = \frac{1}{2}T^4 \sum \frac{1}{\{q + (p+q)T\}^4} \quad (p + q \equiv 1)$$

$$= \frac{1}{2}T^4 \sum \frac{1}{(Q + PT)^4}, \tag{9.15.3}$$

где Q пробегает все целые числа и P пробегает все нечетные целые числа. Если

$$|P|T = \zeta, \quad \xi = e^{\pi i \zeta} = X^{|P|},$$

тогда

$$\sum_Q \frac{1}{(Q+PT)^4} = \sum_Q \frac{1}{(Q+\zeta)^4} = \frac{1}{6}\Big(\frac{d}{d\zeta}\Big)^2 \sum \frac{1}{(Q+\zeta)^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\Big(\frac{d}{d\zeta}\Big)^2 \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi\zeta = -\frac{1}{6}\Big(\frac{d}{d\zeta}\Big)^2 \frac{4\pi^2 e^{2\pi i\zeta}}{(1 - e^{2\pi i\zeta})^2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi^2\Big(\frac{d}{d\zeta}\Big)^2 (e^{2\pi i\zeta} + 2e^{4\pi i\zeta} + 3e^{6\pi i\zeta} + \dots) =$$

$$= \frac{8}{3}\pi^4 (e^{2\pi i\zeta} + 2^3 e^{4\pi i\zeta} + 3^3 e^{6\pi i\zeta} + \dots) = \frac{8}{3}\pi^4 (X^{2|P|} + 2^3 X^{4|P|} + 3^3 X^{6|P|} + \dots).$$

Нам нужно просуммировать это выражение относительно P, но нам нужны лишь наименьшие степени X, и X^2 возникает лишь при $P = \pm 1$. Следовательно, из (9.15.3) получаем

$$\frac{\pi^4}{96}\Theta_8 \sim \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{8}{3}\pi^4 T^4 X^2$$

или

$$\Theta_8 \sim 256 T^4 X^2. \tag{9.15.4}$$

Наконец, (9.15.2) и (9.15.4) показывают, что $\vartheta^{-8}\Theta_8$ ограничено при $\tau \to 1$ и, следовательно, ограничено в D_3.

Следовательно, $\vartheta^{-8}\Theta_8$ является константой, которая должна равняться 1, и, соответственно, $r_8(n) = \rho_8(n)$.

24 квадрата

9.16. Мы доказали в § 9.14, что $\vartheta^{-2s}\Theta_{2s}$ инвариантна относительно Γ_3, когда $2s \equiv 0 \pmod 8$, и это верно, в частности, когда $2s = 24$. Если $\vartheta^{-24}\Theta_{24}$ будет ограничена в D_3, то из этого будет следовать, что $\vartheta^{24} = \Theta_{24}$ и $r_{24}(n) = \rho_{24}(n)$, но это не верно. Правильная формула, которая впервые была получена Рамануджаном и к доказательству которой я далее перейду, имеет вид

$$\vartheta^{24}(x) = \Theta_{24}(x) - \frac{33152}{691}g(-x) - \frac{65536}{691}g(x^2), \tag{9.16.1}$$

где

$$g(x) = x\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots\}^{24}, \tag{9.16.2}$$

поэтому

$$g(x^2) = x^2\{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots\}^{24} = h^{24}(\tau)$$

в обозначениях Таннери и Молка. Последняя функция является, за исключением коэффициента однородности, дискриминантом $\Delta(\omega_1, \omega_2)$.

Нам потребуются формулы линейного преобразования $h(\tau)$. Они имеют вид

$$h(\tau + 1) = e^{\pi i/12}h(\tau), \tag{9.16.3}$$

$$h\left(-\frac{1}{\tau}\right) = e^{-\pi i/4}\sqrt{\tau}\,h(\tau). \tag{9.16.4}$$

Мы также воспользуемся еще одной формулой, а именно

$$h^2\Big(\frac{\tau+1}{2}\Big) = e^{\pi i/12}h(\tau)\vartheta_3(0,\,\tau). \tag{9.16.5}$$

Она принадлежит теории *квадратичных* преобразований, но является простым следствием формул произведения для $h(\tau)$ и $\vartheta_3(0,\,\tau)$.

Три функции

$$\vartheta^{-24}\Theta_{24}, \quad \vartheta^{-24}g(-x), \quad \vartheta^{-24}g(x^2) \tag{9.16.6}$$

— все инвариантны относительно Γ_3. Мы уже доказали инвариантность первой. Инвариантность третьей следует из формул

$$g(x^2) = h^{24}(\tau), \quad h^{24}(\tau+2) = h^{24}(\tau), \quad h^{24}\Big(-\frac{1}{\tau}\Big) = \tau^{12}h^{24}(\tau).$$

Наконец,

$$g(-x) = h^{24}\Big(\frac{\tau+1}{2}\Big) = -h^{12}(\tau)\vartheta_3^{12}(0,\,\tau),$$

по формуле (9.16.5), и инвариантность второй функции из (9.16.6) следует из формул (9.14.2) и (9.16.4).

Следовательно,

$$\vartheta^{-24}\Theta_{24}^* = \vartheta^{-24}\{\Theta_{24} + \alpha g(-x) + \beta g(x^2)\}$$

будет инвариантным для любых α и β. Докажем, что можно выбрать такие α и β, чтобы $\vartheta^{-24}\Theta_{24}^*$ была ограниченной в D_3. Для этого мы воспользуемся подстановкой (9.15.1) из § 9.15 и изучим поведение всех рассматриваемых функций при $T \to \infty$.

(i) Во-первых, по формуле (9.15.2),

$$\vartheta^{24}\Big(0,\,1-\frac{1}{T}\Big) \sim 2^{24}T^{12}X^6. \tag{9.16.7}$$

(ii) Во-вторых,

$$\begin{aligned} g(-x) = -h^{12}(\tau)\vartheta^{12}(0,\,\tau) &= -h^{12}\Big(1-\frac{1}{T}\Big)\vartheta_3^{12}\Big(0,\,1-\frac{1}{T}\Big) = \\ &= h^{12}\Big(-\frac{1}{T}\Big)\vartheta_4^{12}\Big(0,\,-\frac{1}{T}\Big) = \Big(\frac{T}{i}\Big)^{12}h^{12}(T)\vartheta_2^{12}(0,\,T) = \\ &= T^{12}X\{(1-X^2)(1-X^4)\dots\}^{12}(2X^{1/4}+2X^{9/4}+\dots)^{12}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$g(-x) = 2^{12}T^{12}\{X^4 + O(X^6)\}. \tag{9.16.8}$$

(iii) В-третьих,

$$g(x^2) = h^{24}(\tau) = h^{24}\Big(1 - \frac{1}{T}\Big) = h^{24}\Big(-\frac{1}{T}\Big) = T^{12}h^{24}(T) =$$
$$= T^{12}X^2\{(1-X^2)(1-X^4)\dots\}^{24},$$

$$g(x^2) = T^{12}\{X^2 - 24X^4 + O(X^6)\}. \tag{9.16.9}$$

(iv) Наконец, нам нужно определить поведение Θ_{24}, что можно проделать с помощью вычислений, подобных вычислениям § 9.15. Имеем

$$\eta(12)\Theta_{24} = \frac{1}{2}T^{12}\sum_Q\sum_P \frac{1}{(Q+PT)^{12}},$$

$$\sum_Q \frac{1}{(Q+PT)^{12}} = \sum_Q \frac{1}{(Q+\zeta)^{12}} = \frac{1}{11!}\Big(\frac{d}{d\zeta}\Big)^{10}\sum_Q \frac{1}{(Q+\zeta)^2} =$$
$$= \frac{(2\pi)^{12}}{11!}(e^{2\pi i\zeta} + 2^{11}e^{4\pi i\zeta} + \dots) = \frac{(2\pi)^{12}}{11!}(X^{2|P|} + 2^{11}X^{4|P|} + \dots).$$

И снова лишь слагаемые с $P = \pm 1$ имеют значение, поскольку $P = \pm 3$ соответствует $O(X^6)$. Следовательно, получаем

$$\Theta_{24} = \frac{(2\pi)^{12}}{11!\eta(12)}T^{12}\{X^2 + 2^{11}X^4 + O(X^6)\} = \frac{2^{14}}{691}T^{12}\{X^2 + 2^{11}X^4 + O(X^6)\} \tag{9.16.10}$$

при подстановке значения $\eta(12)$.

Нам нужно выбрать α и β так, чтобы

$$\frac{2^{14}}{691}\{X^2 + 2^{11}X^4 + O(X^6)\} + \alpha 2^{12}\{X^4 + O(X^6)\} + \beta\{X^2 - 24X^4 + O(X^6)\} = O(X^6).$$

Затем из формул (9.16.7), (9.16.8), (9.16.9) и (9.16.10) будет следовать, что $\vartheta^{-24}\Theta_{24}^*$ ограничена. Приравнивая коэффициенты, мы находим значение

$$\alpha = -\frac{33152}{691}, \quad \beta = -\frac{65536}{691},$$

и отсюда следует (9.16.1).

Функция $\tau(n)$

9.17. Определим[1] $\tau(n)$ как коэффициент при x^n в

$$g(x) = x\{(1-x)(1-x^2)\dots\}^{24} = \sum_1^\infty \tau(n)x^n.$$

Затем, с учетом § 9.9,

$$\Theta_{24} = 1 + \sum_1^\infty \rho_{24}(n)x^n = 1 + \frac{16}{691}\sum_1^\infty \sigma_{11}^*(n)x^n.$$

Также

$$g(-x) = \sum_1^\infty (-1)^n \tau(n)x^n$$

и

$$g(x^2) = \sum_1^\infty \tau\Big(\frac{1}{2}n\Big)x^n,$$

если мы условимся, что $\tau(y)$ равна 0, когда y не равен целому числу. Следовательно, мы, наконец, получим формулу Рамануджана

$$r_{24}(n) = \frac{16}{691}\sigma_{11}^*(n) + e_{24}(n), \tag{9.17.1}$$

где

$$e_{24}(n) = \frac{128}{691}\Big\{(-1)^{n-1}259\tau(n) - 512\tau\Big(\frac{1}{2}n\Big)\Big\}. \tag{9.17.2}$$

9.18. Мы определили функцию $\tau(n)$ лишь в виде коэффициента, и, естественно, возникает вопрос, существует ли какое-нибудь сравнительно простое «арифметическое» определение, но ни одного такого определения не удалось обнаружить. В следующей лекции я собираюсь обсудить некоторые из наиболее примечательных свойств этой функции. Однако я должен доказать здесь некоторое утверждение о порядке $\tau(n)$, поскольку мне нужно доказать мое утверждение в § 9.3, что $r_{24}(n)$ «мажорируется» функцией $\rho_{24}(n)$.

[1] Я сохраняю обозначения Рамануджана. Совпадения τ в $\tau(n)$ и τ в $e^{\pi i\tau}$ несколько неудачно, но вряд ли послужит причиной недоразумения.

Из формулы Якоби, которую я приводил несколько раз ранее, сразу следует, что

$$\sum \tau(n)x^n = x\{(1-x)(1-x^2)\dots\}^{24} = x(1-3x+5x^3-7x^6+\dots)^8,$$

и показатели степеней в ряде являются треугольными числами. Далее, $(1-3x+\dots)^8$ мажорируется рядом

$$\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{n(n+1)/2}\Big\}^8,$$

который имеет порядок $(1-x)^{-8}$, когда $x \to 1$.[1] Следовательно,

$$|\tau(n)|x^n < \sum |\tau(n)|x^n < A(1-x)^{-8},$$

где A является константой при всех n и x. Примем $x = 1-n^{-1}$, когда x^n имеет порядок e^{-1}, мы получаем, что

$$\tau(n) = O(n^8). \tag{9.18.1}$$

С другой стороны,

$$\frac{16}{691}\sigma_{11}^*(n) = \rho_{24}(n) = \frac{\pi^{12}n^{11}}{11!}\sum_{q=1}^{\infty}\varepsilon_q\frac{c_q(n)}{q^{12}},$$

и этот ряд больше, чем[2]

$$1-\frac{3}{3^{12}}-\frac{2^{12}\cdot 4}{4^{12}}-\frac{5}{5^{12}}-\frac{7}{7^{12}}-\frac{2^{12}\cdot 8}{8^{12}}-\dots > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\sigma_{11}^*(n)$ больше, чем константа, кратная n^{11}, и

$$r_{24}(n) = \frac{16}{691}\sigma_{11}^*(n)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big\}$$

в основном зависит от своего первого слагаемого.

---

[1] Т.е. порядка $(\sum nx^{n^2/2})^8$ или $\Big(\int_0^{\infty} te^{-yt^2/2}\,dt\Big)^8$, где $e^{-y} = x$. Эти величины имеют порядок y^{-8} или $(1-x)^{-8}$.

[2] Используя грубое неравенство $|c_q(n)| \leqslant n$.

Порядок $\tau(n)$ в действительности намного меньше, чем величина, показанная формулой (9.18.1). Рамануджан показал более изощренным методом, что

$$\tau(n) = O(n^7), \tag{9.18.2}$$

и я показал позднее теоретико-числовым методом, что

$$\tau(n) = O(n^6). \tag{9.18.3}$$

Я докажу еще лучший результат, принадлежащий Ренкину, в лекции X. Весьма вероятно предположение (которое Рамануджан выдвинул в качестве гипотезы)

$$\tau(n) = O(n^{11/2+\varepsilon})$$

для любого положительного ε. Но эти вопросы мы обсудим в более позднее время.

9.19. В заключение я повторю, что результаты, которые мы доказали, типичны для общей задачи $2s$ квадратов. Мы всегда можем выразить $e_{2s}(n)$ в виде суммы чисел, определенных Рамануджаном и Морделлом, в виде слагаемых, определенных как модулярные коэффициенты, и каждый из этих коэффициентов приводит к возникновению ряда задач, подобных тем, которые возникли из коэффициента $\tau(n)$. В некоторых случаях удается сравнительно просто определить их в арифметических терминах. Во всех случаях число представлений мажорируется функцией делителей $\rho_{2s}(n)$.

Комментарии к лекции IX

§ 9.1. Подробное изложение истории классических теорем, связанных с представлением чисел двумя или четырьмя квадратами, см. в Диксон, *История*, ii, гл. vi и viii.

Результаты Якоби, связанные с 2, 4, 6 и 8 квадратами приведены Смитом на стр. 307 в его *Обзоре теории чисел* (*Собрание сочинений*, i, 38–304). Они неявно содержатся в § 40–42 и 65–66 книги *Fundamenta nova*, Лиувилль приводит формулу для 10 и 12 квадратов в *Journal de math*, (2), 11 (1866), 1–8 и 9 (1864), 296–298.

Гаусс в своей *Disquisitiones arithmeticae*, § 182, приводит теорему, эквивалентную (9.1.1).

Глэйшер, *Proc. London Math Soc.* (2), 5 (1907), 479–490 (480), приводит систематическую таблицу формул для $r_{2s}(n)$, вплоть до $2s = 18$. Он получил

эти формулы в нескольких работах, опубликованных в томах 36–39 журнала *Quarterly Journal of Math.* Формулы для 14 и 18 квадратов содержат функции, определенные лишь как коэффициенты в некоторых модулярных функциях, а не «арифметические». Рамануджан в 18-й работе своего *Сборника трудов* продолжил таблицу Глэйшера вплоть до $2s = 24$, и привел общее тождество для $\vartheta^{2s}(x)$, которое затем было доказано Морделлом (в первой работе, упомянутой в комментарии к § 9.4).

Болайгуин (Boulyguine) привел общую формулу для $r_{2s}(n)$, в которой каждая из встречающихся функций имеет, в некотором смысле, арифметическое определение. Таким образом формула для $r_{2s}(n)$ содержит функции типа

$$\sum \phi(x_1, x_2, \ldots, x_t),$$

где ϕ представляет собой полином, t принимает одно из значений $2s - 8$, $2s - 16$, ..., и суммирование происходит по всем решениям уравнения $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_t^2 = n$. Ссылки на работу Болайгуина приводятся в *Истории* Диксона, ii, 317, и в работах Успенского, отмеченных ниже.

Успенский разработал элементарные методы, которые, похоже, были использованы Лиувиллем в ряде работ, опубликованных в *Докладах Академии Наук СССР* и других русских периодических изданиях. Ссылки можно найти в его более поздней работе в *Trans Amer. Math. Soc.*, 30 (1928), 385–404. Он рассмотрел в своем анализе случаи вплоть до 12 квадратов и утверждает, что его методы позволяют ему доказать общую формулу Болайгуина. Их также можно применить ко многим другим задачам, связанным с представлениями квадратичными формами.

Х. Бессель (*Диссертация*, Кенигсберг, 1929) независимо разработал лиувиллевы методы и привел формулу вплоть до $2s = 16$.

Я не рассматривал в этой лекции нечетные значения k, но, возможно, полезно будет добавить краткое замечание об этом случае. Функции $r_3(n)$, $r_5(n)$ и $r_7(n)$ могут быть выражены в виде конечных сумм, содержащих символы квадратичной взаимности. Таким образом, $r_3(n)$ было представлено в этом виде Дирихле, а выражения для $r_5(n)$ и $r_7(n)$ были получены Эйзенштейном, Смитом и Минковским. При $k = 3$, как давно было показано Гауссом, задача почти совпадает с задачей нахождения числа классов бинарных квадратичных форм с определителем $-n$. Похоже, что эти результаты не разрабатывались столь же систематическим образом, как для четного k, и невозможно привести для них общего утверждения, хотя многие формулы можно найти в главах VII и IX второго тома *Истории* Диксона и в главе X книги Бахмана *Die Arithmetik von quadratischen Formen* (I Abtheilung).

Имеется два совершенно различных решения для зада 5 и 7 квадратов, «арифметическое» решение Минковского и Смита и «функционально-теоретическое» решение Харди и Морделла. Бахман приводит изложение первого,

а Диксон в *Studies in the theory of numbers*, гл. XIII — второго. Ссылки на работу Харди и Морделла приведены в комментарии к § 9.4.

Формулы приведены в общем виде при нечетном k в терминах *примитивных* представлений (в которых $x_1, x_2, \ldots, x_k$ не имеет общего множителя). Простейшая формула получена Дирихле и Эйзенштейном: число примитивных представлений нечетного числа n тремя квадратами равно

$$24 \sum_{s \leqslant \frac{1}{2}n} \left(\frac{s}{n}\right) \quad (n \equiv 1), \quad 8 \sum_{s \leqslant \frac{1}{2}n} \left(\frac{s}{n}\right) \quad (n \equiv 3).$$

Здесь $\left(\frac{s}{n}\right)$ — обобщение Якоби символа Лежандра, и сравнение берется по модулю 4. Формулы Эйзенштейна для 5 и 7 квадратов доказаны Бахманом. Ссылки см. Диксон *История*, ii, 263 и 305.

§ 9.2. Формулы (9.2.2) и (9.2.3) встречаются в посмертной работе Гаусса. Ссылки см. в Диксон *История*, ii, 283.

Доказательство (9.1.1) с помощью гауссовых целых чисел приведено в Харди и Райт, 240–242, а доказательство (9.1.2) и (9.1.3) с помощью интегральных кватернионов — в Диксон *Algebren und ihre Zahlentheorie*, гл. IX (см., в частности, 181–182, satz 22). Ландау в *Vorlesungen*, i, 110–113, приводит элементарный вывод формул (9.1.2) и (9.1.3) из (9.1.1).

Доказательство Рамануджана формулы (9.2.3) приведено в 18 статье *Сборника трудов*, это формула (17) на стр. 139. Доказательство воспроизведено в Харди и Райт, 311–314. Похоже, что Рамануджан часто пользовался подобными аргументами, Ватсон (**10**) указывает, что известные формулы

$$\mathrm{cn}^2 u + \mathrm{sn}^2 u = 1, \quad \mathrm{dn}^2 u + k^2 \mathrm{sn}^2 u = 1$$

приводятся в записных книжках в виде тождеств между q-рядами для дальнейшего доказательства элементарными вычислениями. Формула (18) на стр. 139 Сборника трудов может быть представлена в знакомом виде

$$\wp'(u) = 6\wp^2(u) - \frac{1}{2}g_2.$$

Таким образом, Рамануджан вывел дифференциальное уравнение для $\wp(u)$ с помощью прямых алгебраических методов из ее выражения в виде тригонометрического ряда.

§ 9.3. Формула для $r_{10}(n)$ получена Лиувиллем: см. комментарий к § 9.1. Может случиться для особых n, что $e_{2s}(n) = 0$. Таким образом,

$$e_{10}(n) = \frac{32}{5}\chi_4(n) = 0,$$

если n не является суммой двух квадратов, и $e_{12}(n) = 0$, если n четно. Эти результаты, принадлежащие Лиувиллю, были переоткрыты Глейшером.

Для того, чтобы $e_{2s}(n) = 0$ для всех n, необходимо и достаточно, чтобы $2s \leqslant 8$. В этих случаях лишь $r_{2s}(n)$ является «функцией делителей», представленной в виде «сингулярного ряда» из §9.8. «Причины» такого поведения были показаны в новом свете в недавней работе Зигеля, *Annals of Math.*, (2), 36 (1935), 527–606.

Теория представлений n в специальном виде

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 \tag{1}$$

может быть обобщена на общие определенные квадратичные формы k переменных. Существует некоторое количество общих форм с заданным определителем, каждое содержит некоторое количество классов. Если мы выберем по одному представителю каждого класса заданного типа и определим $N(n)$ как общее количество представлений n в виде либо тех, либо других представителей, тогда $N(n)$ является суммой сингулярного ряда подобно рядам из §9.8.

Если дискриминант равен 1, тогда (1) является представителем класса главного типа; для того чтобы существовал только один такой класс необходимо и достаточно, чтобы $k \leqslant 8$. В этом случае суммой сингулярного ряда является лишь $r_k(n)$.

Я следую обозначениям Рамануджана, за исключением множителей 2. Он пишет

$$\vartheta^{2s} = 1 + 2\sum r_{2s}(n)x^n,$$

поэтому его r_{2s}, δ_{2s} и e_{2s} равны половине моих.

§9.4. Работы Морделла и моя содержатся в

Морделл, *Quaterlly Journal of Math.*, 48 (1917), 93–104 и *Trans. Camb. Phill. Soc.*, 22 (1919), 361–373;

Харди, *Proc. Nat. Acad. of Sciences*, 4 (1918), 189–193; *Trans. Amer. Math. Soc.*, 21 (1920), 255–284.

§9.5. «Сумма Рамануджана» встречается в ранних работах, и (9.5.3), похоже, принадлежит Клуйверу (Kluyver), см. *Сборник трудов*, 343; но Рамануджан был первым, кто понял важность этой суммы и систематически ее использовал. Доказательство (9.5.3), приведенное в этом параграфе, взято из *Сборника трудов*, 180 и из Харди (7).

Формулу обращения Мебиуса см., к примеру, в Харди и Райт, 234–237 или Ландау, *Handbuch*, 577–582.

§9.6. Три способа суммирования (9.6.1) принадлежат Истерману *Proc. London Math. Soc.* (2), 34 (1932), 194-195; Рамануджан, *Сборник трудов*, 180–185 и Харди (7). Рамануджан и Харди доказали множество других формул такого же типа.

Формулу для $\sigma_{1-s}(n)$ см., к примеру, в Харди и Райт, 238.

Теорема о перемножении рядов Дирихле, на которую я ссылаюсь почти в конце параграфа, доказана в Ландау, *Handbuch*, 671–673 и на стр. 63–64 трактата Харди и Рисса.

§ 9.8. Рамануджан строит «сингулярный ряд»: таким образом ряды (11.11)–(11.41) работы 21 *Сборника трудов* — это сингулярные ряды, связанные с этой задачей. Но его подход к ним значительно отличается, он определяет «функцию делителей» $\delta_{2s}(n)$ в виде аппроксимации к $r_{2s}(n)$ независимо, а затем вычисляет ее в виде сингулярного ряда. Здесь сначала возникает сингулярный ряд, и $\delta_{2s}(n)$ является его суммой.

Фраза «сингулярные ряды» по-разному использовалась разными авторами. Так, Литтлвуд и я иногда называли суммы $A_q(n)$ без внешнего множителя сингулярными рядами.

§ 9.9. Формула для $S_{p,\,q}$ приведена в Бахмане, *Analytische Zahlenteorie*, гл. vii.

Если k (здесь $2s$) является нечётным числом, тогда в $S^k_{p,\,q}$ входит символ Лежандра или Якоби, который исчезает при четных k. Это является причиной появления символов Лежандра или Якоби в формулах для $r_3(n)$, $r_5(n)$, ...

§ 9.11. Стандартным трактатом по эллиптическим модулярным функциям является книга Клейна–Фрике (Klein–Fricke), *Teorie der elliptischen Modulfunktionen*, 2 тома, Лейбциг, 1890–1892. Это очень большая и подробная книга. Книга Виванти *Fonctions polyedriques et modulaires* (перевод на французский А. Кахеном (A. Cahen), Париж, 1910) — это более элементарная книга, предназначена для того, чтобы «permettre au lecteur d'aborder sans difficultes les leccons classiques de MM. Klein et Fricke».

Гурвиц привел отдельное изложение теории в двух работах в *Math. Annalen*, 18 (1881), 528–592 и 58 (1904), 343–360. Они содержат доказательство теорем, приведенных в этой главе.

Ясное изложение элементарной геометрии модулярных групп приведено в книге Копсена *Theory of functions of a complex variable*, гл. xv.

Доктор Хейлбронн показал мне следующее простое и прямое доказательство теоремы, процитированной в конце этого параграфа. Предположим, что $f(\tau)$ — регулярна и ограничена для $\Im(\tau) > 0$ и что

$$f(\tau+1) = f(\tau), \quad f\Big(-\frac{1}{\tau}\Big) = f(\tau).$$

Тогда $g(x) = g(e^{\pi i \tau}) = f(\tau)$ не может иметь существенной особенности в начале координат (поскольку тогда она будет принимать произвольно большие значения вблизи начала координат) и не может иметь полюса (поскольку тогда она будет стремиться к бесконечности), поэтому она регулярна в начале

координат. Следовательно, мы можем предположить (вычитая при необходимости константу), что $f(\tau) \to 0$, когда $\Im(\tau) \to \infty$.

Далее, $|f(\tau)|$ достигает верхней границы M в D в точке на границе D (а не на бесконечности), поэтому существует конечное τ_0 на границе D, для которого $|f(\tau_0)| = M$. Если $f(\tau)$ не является константой, тогда должна существовать τ_1 вблизи τ_0, для которой $|f(\tau_1)| > |f(\tau_0)| = M$. Но существует τ_2 в D, для которой $f(\tau_2) = f(\tau_1)$, и поэтому $|f(\tau_2)| > M$. Противоречие.

§ 9.14–9.15. Доказательство следует второй работе Харди, процитированной в комментарии к § 9.4.

§ 9.17. (9.17.2) — это формула (148) на стр. 159 *Сборника трудов*, в знаке формулы (7) таблицы VI имеется ошибка: похоже, что Рамануджан на мгновение забыл, что $g(-x)$ начинается с $-x$, а не с x. В любом случае, как я отмечал в комментарии к § 9.3, его $r_{24}(n)$ и $e_{24}(n)$ равны половине моих.

§ 9.18. Доказательство Рамануджана формулы (9.18.2) можно найти (как и частный случай более общей теоремы) в *Сборнике трудов*, 146–148 и 153 или 160, а доказательство Харди формулы (9.18.3), которое будет воспроизведено в несколько измененном виде в следующей лекции (§ 10.8), взято из Харди (**9**).

Лекция X
Функция Раманудджана $\tau(n)$

10.1. Я доказал в лекции IX, что

$$r_{24}(n) = \frac{16}{691}\sigma_{11}^*(n) + \frac{128}{691}\Big\{(-1)^{n-1}259\tau(n) - 512\tau\Big(\frac{1}{2}n\Big)\Big\}, \qquad (10.1.1)$$

где $\sigma_{11}^*(n)$ является простой «функцией делителей» числа n и $\tau(n)$ определяется формулой

$$g(x) = x\{(1-x)(1-x^2)\dots\}^{24} = \sum_1^\infty \tau(n)x^n. \qquad (10.1.2)$$

Я посвящаю эту лекцию более тщательному исследованию некоторых свойств $\tau(n)$, которые чрезвычайно интересны и по-прежнему недостаточно хорошо поняты. Может показаться, что мы блуждаем в одном из математических захолустий, но происхождение $\tau(n)$ как коэффициента настолько фундаментальной функции заставляет нас относиться к нему с уважением.

Мультипликативное свойство $\tau(n)$

10.2. Коэффициенты многих модулярных разложений имеют простой арифметический смысл, так, $r_s(n)$ является коэффициентом в

$$\vartheta^s(x) = (1 + 2x + 2x^4 + \dots)^s.$$

Но $\tau(n)$ не имеет столь очевидного объяснения[1], и ее арифметические свойства по-прежнему малопонятны.

[1] Тождество Якоби показывает, что

$$\sum_1^\infty \tau(n)x^n = x(1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + \dots)^8.$$

Рамануджан предположил, что

$$\tau(nn') = \tau(n)\tau(n'), \tag{10.2.1}$$

если $(n, n') = 1$, т. е. что $\tau(n)$ *является мультипликативной*, и Морделл (Mordell) доказал это утверждение несколько позже. Доказательство Морделла очень поучительно и достаточно просто, чтобы привести его здесь. Оно основано на тождестве

$$\sum_1^\infty \tau(pn)x^n = \tau(p)\sum_1^\infty \tau(n)x^n - p^{11}\sum_1^\infty \tau(n)x^{pn}, \tag{10.2.2}$$

где p — простое число.

Запишем, как обычно,

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} x^2\{(1-x^2)(1-x^4)\dots\}^{24}, \tag{10.2.3}$$

где $x = e^{\pi i\tau}$, $\tau = \omega_2/\omega_1$. Тогда $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ является инвариантом при подстановках

$$S_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad S_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

в которых ω_1, ω_2 заменяется, соответственно, на $\omega_1, \omega_1+\omega_2$ и на $-\omega_2, \omega_1$. Сначала докажем, что

$$P = \Delta(\omega_1, p\omega_2) + \sum_{\kappa=0}^{p-1}\Delta(p\omega_1, \kappa\omega_1+\omega_2) = u_0 + \sum_{\kappa=0}^{p-1} v_\kappa \tag{10.2.4}$$

инвариантно относительно S_1 и S_2 и поэтому относительно всех подстановок из модулярной группы Γ.

Во-первых, S_1 оставляет неизменным u_0 и переставляет v_κ, поэтому P является инвариантом относительно S_1.

Следовательно,

$$\tau(n) = \sum(-1)^{n_1+n_2+\dots+n_8}(2n_1+1)(2n_2+1)\dots(2n_8+1),$$

суммирование происходит по всем представлениям числа $n-1$ в виде суммы

$$\sum_{i=1}^8 \frac{1}{2}n_i(n_i+1) = \sum_{i=1}^8 t_i$$

восьми треугольных чисел t_i, но эта интерпретация не проясняет ситуацию.

Затем, S_2 превращает P в

$$\Delta(-\omega_2,\, p\omega_1) + \Delta(-p\omega_2,\, \omega_1) + \sum_{\kappa=1}^{p-1} \Delta(-p\omega_2,\, \omega_1 - \kappa\omega_2) =$$

$$= \Delta(p\omega_1,\, \omega_2) + \Delta(\omega_1,\, p\omega_2) + \sum_{\kappa=1}^{p-1} \Delta(-p\omega_2,\, \omega_1 - \kappa\omega_2),$$

и, чтобы доказать, что P является инвариантом, достаточно показать, что

$$\Delta(-p\omega_2,\, \omega_1 - \kappa\omega_2) = \Delta(p\omega_1,\, \kappa'\omega_1 + \omega_2), \tag{10.2.5}$$

где κ' пробегает по значениям $1, 2, \ldots, p-1$ вместе с κ или по остаткам по модулю p.

Примем

$$a = -\kappa, \quad b = p$$

и определим c и d так, чтобы

$$ad - bc = -\kappa d - pc = 1.$$

Тогда $\kappa' = d$ пробегает по нужному набору остатков. Также

$$-ap\omega_2 + b(\omega_1 - k\omega_2) = p\omega_1, \quad -cp\omega_2 + d(\omega_1 - \kappa\omega_2) = \kappa'\omega_1 + \omega_2,$$

и поэтому

$$\Delta(-p\omega_2,\, \omega_1 - \kappa\omega_2) = \Delta(p\omega_1,\, \kappa'\omega_1 + \omega_2),$$

т. е. (10.2.5).

Следовательно, P является инвариантом относительно Γ, и поэтому

$$Q = \frac{P}{\Delta(\omega_1,\, \omega_2)} \tag{10.2.6}$$

также является инвариантом

Теперь

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} \sum_{1}^{\infty} \tau(n) x^{2n},\ \Delta(\omega_1, p\omega_2) = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} \sum_{1}^{\infty} \tau(n) x^{2pn} \tag{10.2.7}$$

и

$$\sum_{\kappa=0}^{p-1}\Delta(p\omega_1,\,\kappa\omega_1+\omega_2)=\left(\frac{\pi}{p\omega_1}\right)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^{2n/p}\sum_{\kappa=0}^{p-1}e^{2n\kappa\pi i/p}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{p\omega_1}\right)^{12}p\sum_{n=1}^{\infty}\tau(pn)x^{2n},\quad(10.2.8)$$

поскольку сумма относительно κ дает p, если $p|n$, и 0 в противном случае. Следовательно, разложение P по степеням x начинается с

$$\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12}p^{-11}\tau(p)x^2,$$

а разложение $\Delta(\omega_1,\,\omega_2)$ начинается с

$$\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12}x^2.$$

Следовательно, $Q-P/\Delta$ ограничено в D и поэтому является константой, отсюда

$$P=p^{-11}\tau(p)\Delta.\qquad(10.2.9)$$

Наконец, подставляя (10.2.7)–(10.2.9) в (10.2.4), получаем (10.2.2), с x^2 вместо x.

Теперь мы можем доказать (10.2.1). Достаточно доказать, что

$$\tau(p^\lambda n)=\tau(p^\lambda)\tau(n)\qquad(10.2.10)$$

для всех простых λ, p и $(n,\,p)=1$. Это очевидно при $\lambda=0$. Если приравнять коэффициенты при x^n в (10.2.2), то получим

$$\tau(pn)=\tau(p)\tau(n),$$

т. е. (10.2.10) при $\lambda=1$. Если приравнять коэффициенты при $x^{p^{\lambda-1}n}$, где $\lambda>1$, мы получим

$$\tau(p^\lambda n)=\tau(p)\tau(p^{\lambda-1}n)-p^{11}\tau(p^{\lambda-2}n)\qquad(10.2.11)$$

и, в частности,

$$\tau(p^\lambda)=\tau(p)\tau(p^{\lambda-1})-p^{11}\tau(p^{\lambda-2}).\qquad(10.2.12)$$

Следовательно, если

$$u_\lambda = \tau(np^\lambda) - \tau(n)\tau(p^\lambda),$$

то имеем

$$u_\lambda = \tau(p)u_{\lambda-1} - p^{11}u_{\lambda-2}.$$

Но $u_\lambda = 0$, когда $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, и поэтому $u_\lambda = 0$ для всех λ.

Функция $F(s) = \sum \frac{\tau(n)}{n^s}$

10.3. Из (10.2.1) мы можем вывести замечательную формулу для ряда Дирихле:

$$F(s) = \sum_1^\infty \frac{\tau(n)}{n^s}. \tag{10.3.1}$$

Я доказал в § 9.18, что

$$\tau(n) = O(n^8),$$

поэтому ряд (10.3.1) абсолютно сходящийся при $\sigma = \Re(s) > 9$. В дальнейшем мы увидим, что верно намного более сильное утверждение, но этого несовершенного результата достаточно, чтобы показать, что последующие преобразования верны при достаточно больших σ.

Поскольку $\tau(n)$ мультипликативна, имеем

$$F(s) = \prod_p \chi_p, \tag{10.3.2}$$

где

$$\chi_p = 1 + \frac{\tau(p)}{p^s} + \frac{\tau(p^2)}{p^{2s}} + \dots \tag{10.3.3}$$

Мы можем вычислить $\tau(p^\lambda)$ в терминах $\tau(p)$ по формуле (10.2.11) и, тем самым, определить χ_p.

Запишем

$$\cos\theta_p = \frac{1}{2}p^{-11/2}\tau(p), \tag{10.3.4}$$

$$a_\lambda = p^{-11\lambda/2}\tau(p^\lambda). \tag{10.3.5}$$

Тогда из (10.2.11) получим

$$a_\lambda - 2\cos\theta_p a_{\lambda-1} + a_{\lambda-2} = 0.$$

Но

$$a_0 = 1 = \frac{\sin\theta_p}{\sin\theta_p}, \quad a_1 = 2\cos\theta_p = \frac{\sin 2\theta_p}{\sin\theta_p},$$

и по индукции получаем

$$a_\lambda = \frac{\sin(\lambda+1)\theta_p}{\sin\theta_p}$$

и

$$\tau(p^\lambda) = p^{11\lambda/2}\frac{\sin(\lambda+1)\theta_p}{\sin\theta_p}. \tag{10.3.6}$$

Следовательно,

$$\chi_p = \frac{1}{\sin\theta_p}\sum_{\lambda=0}^{\infty} p^{(11/2-s)\lambda}\sin(\lambda+1)\theta_p =$$

$$= \frac{1}{1-2p^{11/2-s}\cos\theta_p + p^{11-2s}} = \frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s}} \tag{10.3.7}$$

и

$$F(s) = \prod_p \chi_p = \prod_p \frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s}}. \tag{10.3.8}$$

Это аналог формулы произведения Эйлера для $\zeta(s)$. Ряды и произведения абсолютно сходящиеся при достаточно больших σ.

Из (10.2.1) и (10.3.6) следует, что

$$\tau(n) = n^{11/2}\prod\frac{\sin(\lambda+1)\theta_p}{\sin\theta_p}, \tag{10.3.9}$$

если $n = \prod p^\lambda$.

Функция $F(s)$ также удовлетворяет функциональному уравнению того же типа, что и $\zeta(s)$. Удобнее отложить доказательство этого утверждения до § 10.9.

Свойства сравнимости $\tau(n)$

10.4. Результаты § 10.2 позволяют нам доказать несколько любопытных арифметических свойств $\tau(n)$. Они несколько напоминают свойства $p(n)$, о которых я говорил в предыдущей лекции, но они, естественно, более многочисленны, поскольку $\tau(n)$ — мультипликативная функция.

Предположим, что p — простое число и что

$$\tau(p) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{10.4.1}$$

Тогда из (10.2.12) и (10.2.10) следует

$$\tau(pn) \equiv 0 \pmod{p} \tag{10.4.2}$$

для всех n. Рамануджан составил таблицу значений $\tau(n)$ до $n = 30$, и его таблица показывает, что (10.4.1) истинна для

$$p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 23, \tag{10.4.3}$$

поэтому эти простые числа обладают свойством (10.4.2).

Два последних простых числа из этого ряда открывают дальнейшие свойства $\tau(n)$, которые не зависят от свойства мультипликативности. Мы можем записать $g(x)$ в виде

$$g(x) = \sum \tau(n)x^n = x\prod(1-x^n)^{21}\prod(1-x^n)^3.$$

Теперь

$$(1-x^n)^7 \equiv 1 - x^{7n} \pmod{7},$$
$$(1-x^n)^{21} = 1 - 3x^{7n} + 3x^{14n} - x^{21n} \pmod{7}$$

и

$$\prod(1-x^n)^{21} = \sum c_\mu x^\mu,$$

c_μ делится на 7 всякий раз, когда μ не делится. Также

$$\prod(1-x^n)^3 = \sum(-1)^\nu(2\nu+1)x^{\nu(\nu+1)/2}$$

по тождеству Якоби. Следовательно,

$$\sum\tau(n)x^n = \sum\sum(-1)^\nu(2\nu+1)c_\mu x^{\nu(\nu+1)/2+\mu+1}$$

и

$$\tau(n) = \sum (-1)^{\nu}(2\nu+1)c_{\mu},$$

суммирование происходит по всем μ и ν, для которых

$$n = \frac{1}{2}\nu(\nu+1) + \mu + 1.$$

Теперь

$$\frac{1}{2}\nu(\nu+1) \equiv 0,\ 1,\ 3 \text{ или } 6 \pmod 7,$$

поэтому

$$n \equiv \mu,\ \mu+1,\ \mu+2 \text{ или } \mu+4 \pmod 7.$$

Если $n \equiv 3$, 5 или 6, то μ не кратно 7, и поэтому c_{μ} кратно 7.

$$\tau(7m+k) \equiv 7 \pmod 7$$

при $k = 3$, 5, 6, а также при $k = 0$.

Аналогично мы можем доказать (используя тождество Эйлера вместо тождества Якоби), что

$$\tau(23m+k) \equiv 0 \pmod{23},$$

когда k — произвольный квадратичный невычет числа 23.

10.5. Сравнения § 10.4 выполняются при всех n из определенных арифметических прогрессий. Также существуют сравнения, выполняющиеся при «почти всех» n. Например,

$$\tau(n) \equiv 0 \pmod 5 \tag{10.5.1}$$

при почти всех n (в смысле § 3.4).

Докажем сначала, что

$$\tau(n) \equiv n\sigma(n) \pmod 5, \tag{10.5.2}$$

где $\sigma(n)$ равна сумме всех делителей числа n при всех n. Доказательство основано на двух тождествах теории модулярных функций, а именно

$$Q^3 - R^2 = 1728g(x) \tag{10.5.3}$$

и

$$Q - P^2 = 288 \sum \frac{n^2x^n}{(1-x^n)^2}, \tag{10.5.4}$$

где

$$P = 1 - 24\Big(\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \dots\Big), \tag{10.5.5}$$

$$Q = 1 + 240\Big(\frac{x}{1-x} + \frac{2^3x^2}{1-x^2} + \frac{3^3x^3}{1-x^3} + \dots\Big), \tag{10.5.6}$$

$$R = 1 - 504\Big(\frac{x}{1-x} + \frac{2^5x^2}{1-x^2} + \frac{3^5x^3}{1-x^3} + \dots\Big). \tag{10.5.7}$$

Тождество (10.5.3) известно, но я не видел тождества (10.5.4) нигде, за исключением работы Рамануджана.

Мы можем вывести (10.5.4) из (9.2.5). Имеем

$$\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2\theta} - \frac{\theta}{24} - \frac{\theta^3}{1440} - \dots,$$

$$\Big(\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta\Big)^2 = \frac{1}{4\theta^2} - \frac{1}{24} + \frac{\theta^2}{960} + \dots,$$

$$u_1\sin\theta + u_2\sin 2\theta + \dots = -\frac{P-1}{24}\theta - \frac{Q-1}{1440}\theta^3 + \dots,$$

$$u_1(1+u_1)\cos\theta + u_2(1+u_2)\cos 2\theta + \dots =$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \dots - \frac{1}{2}\Big\{\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2^2x^2}{(1-x^2)^2} + \dots\Big\}\theta^2 + \dots,$$

$$\frac{1}{2}\{u_1(1-\cos\theta) + 2u_2(1-\cos 2\theta) + \dots\} = \frac{Q-1}{960}\theta^2 + \dots,$$

$$\Big(\frac{1}{2\theta} - \frac{P}{24}\theta - \frac{Q}{1440}\theta^3 - \dots\Big)^2 = \frac{1}{4\theta^2} - \frac{1}{24} + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \dots +$$

$$+ \Big[\frac{Q}{960} - \frac{1}{2}\Big\{\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2^2x^2}{(1-x^2)^2} + \dots\Big\}\Big]\theta^2 + \dots;$$

и (10.5.4) получается после приравнивания коэффициентов при θ^2.[1]

[1] Приравнивание свободных членов приводит к формуле

$$P = 1 - 24\Big\{\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \dots\Big\},$$

которая легко проверяется непосредственно.

Теперь легко доказать (10.5.2). При $n^5 \equiv n \pmod 5$ при всех n, и поэтому

$$R \equiv 21P \equiv P \pmod 5,$$

в то время как

$$Q \equiv 1 \pmod 5.$$

Следовательно,

$$1728 \sum \tau(n)x^n = Q^3 - R^2 = Q - P^2 \pmod 5.$$

Но

$$Q - P^2 = 288 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2 x^\nu}{(1-x^\nu)^2} = 288 \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu\nu^2 x^{\mu\nu} = 288 \sum_{1}^{\infty} n\sigma(n)x^n,$$

поэтому

$$\tau(n) \equiv 6\tau(n) \equiv n\sigma(n) \pmod 5.$$

Чтобы доказать (10.5.1), достаточно доказать, что

$$\sigma(n) \equiv 0 \pmod 5 \tag{10.5.8}$$

при почти всех n.

10.6. Сравнение (10.5.8) представляет собой частный случай более общей теоремы

$$\sigma(n) \equiv 0 \pmod k \tag{10.6.1}$$

при всех k и почти всех n.[1] Мы можем просто предположить, что k — простое число.

Обозначим простое число общего вида через p, а простое число вида $km - 1$ через ϖ и запишем

$$n = \prod_{p \neq \varpi} p^a \prod_{\varpi} \varpi^\alpha.$$

Тогда

$$\sigma(n) = \prod_{p+\varpi} \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \prod_{\varpi} \frac{\varpi^{\alpha+1} - 1}{\varpi - 1}.$$

[1] И еще более обще, $\sigma_s(n) \equiv 0 \pmod k$ для всех нечетных s, всех k и почти всех n.

Если α — нечетное число, то

$$\frac{\varpi^{\alpha+1}-1}{\varpi-1}=(\varpi+1)\frac{\varpi^{\alpha+1}-1}{\varpi^2-1}=0 \pmod{k},$$

поскольку $\varpi+1\equiv 0 \pmod{k}$, а второй множитель является целым числом. Следовательно, сравнение (10.6.1) истинно, за исключением случаев, когда все простые числа особого вида ϖ входят в n с нечетным показателем α. Следовательно, достаточно доказать, что α *нечетное число, хотя бы для одного значения* ϖ *при почти всех значениях* n.

Определим b_n по правилу

$$b_n=1 \quad \text{(если все } \alpha \text{ четные)},$$
$$b_n=0 \quad \text{(иначе)};$$

и нам нужно доказать, что

$$B(n)=\sum_{n\leqslant x} b_n = o(x). \tag{10.6.2}$$

Фактически мы можем доказать больше, а именно, что

$$B(x)\sim \frac{Cx}{(\log x)^{1-\kappa}}, \tag{10.6.3}$$

где $\kappa=1/(k-1)$ и C зависит только от k. Доказательство очень похоже на доказательство Ландау, процитированное в § 4.5 – 4.6.

Пусть

$$F(s)=\sum \frac{b_n}{n^s}.$$

Тогда

$$F(s)=\prod_{p\neq\varpi}\Big(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\Big)\prod_{\varpi}\Big(1+\frac{1}{\varpi^{2s}}+\frac{1}{\varpi^{4s}}+\dots\Big)=$$
$$=\prod_{p\neq\varpi}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{\varpi}\frac{1}{(1-\varpi^{-s})(1+\varpi^{-s})}=\frac{\zeta(s)}{\prod(1+\varpi^{-s})}$$

при $\sigma=\Re(s)>1$. Следовательно,

$$\log F(s)=\log\zeta(s)-G(s),$$

где

$$G(s) = \sum \log(1 + \varpi^{-s}) = \sum \varpi^{-s} + R(s)$$

и $R(s)$ регулярна при $\sigma > \frac{1}{2}$.

Я должен принять без доказательства некоторые факты из стандартной теории простых чисел в арифметической прогрессии. Функция $\sum p^{-s}$ ведет себя в обычной теории простых чисел «достаточно похоже» на $\log \zeta(s)$, и $\sum \varpi^{-s}$ ведет себя в теории простых чисел в арифметической прогрессии достаточно похоже на $\kappa \log \zeta(s)$. Следовательно, $\log F(s)$ ведет себя достаточно похоже на $(1 - \kappa) \log \zeta(s)$ и $F(s)$ достаточно похоже на $\{\zeta(s)\}^{1-\kappa}$. Фактически

$$F(s) = \{\zeta(s)\}^{1-\kappa} H(s),$$

где $H(s)$ — регулярная функция в $s = 1$ и ведет себя не слишком плохо при больших s, вещественная часть которых близка к 1.[1]

Если принять все это без доказательства, то дорога к (10.6.3) будет расчищена, поскольку нам нужно лишь повторить доказательство Ландау со сравнительно незначительными изменениями, и мы видели, что (10.6.1) является следствием. Здесь k произвольно, но переход к (10.5.1) зависит от частных свойств числа 5.

Существуют похожие сравнения для других модулей, из которых наиболее примечательным является 691. Рамануджан доказал

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}, \tag{10.6.4}$$

и Ватсон вывел[2], что (в соответствии с предположением Рамануджана) $\tau(n)$ делится на 691 при почти всех n.

---

[1] В действительности, когда $k = 5$,

$$F(s) = \{\zeta(s)\}^{3/2} \Big\{ \frac{L_2(s) L_3(s)}{L_4(s)} \Big\}^{1/2} h(s),$$

где $h(s)$ — регулярная функция при $\sigma > \frac{1}{2}$ и $L_2(s)$, $L_3(s)$, $L_4(s)$ — три L-функции Дирихле, связанные с характерами

$$(1, i, -i, -1), \quad (1, -i, i, -1), \quad (1, -1, -1, 1).$$

[2] Используя теорему, на которую я ссылался в ссылке 1 на стр. 237.

Заметим, что (10.6.4) при *нечетных* n следует из (10.1.1). В этом случае

$$16\tau(n) \equiv -128\,259\tau(n) = 16\sigma_{11}(n) - 691r_{24}(n) \equiv 16\sigma_{11}(n) \pmod{691}.$$

Порядок $\tau(n)$

10.7. Вернемся к задаче определения порядка $\tau(n)$, на которую я сослался в конце лекции IX. Это наиболее фундаментальная из нерешенных задач, связанных с этой функцией.

Рамануджан предположил, что

$$\tau(p) \leqslant 2p^{11/2} \tag{10.7.1}$$

для всех простых чисел p, или, что то же самое, что все углы θ_p из § 10.3 являются вещественными. Я назову это утверждение «гипотезой Рамануджана». Если гипотеза истинна, то

$$|\tau(n)| = n^{11/2}\prod_{p|n}\Big|\frac{\sin(\lambda+1)\theta_p}{\sin\theta_p}\Big| \leqslant n^{11/2}\prod_{p|n}(\lambda+1) = n^{11/2}d(n), \tag{10.7.2}$$

и поэтому

$$\tau(n) = O(n^{11/2+\varepsilon}) \tag{10.7.3}$$

для всех положительных ε. Легко доказать в другом направлении, что (i)

$$\tau(n) \geqslant n^{11/2} \tag{10.7.4}$$

для бесконечного количества чисел n, поэтому $\frac{11}{2}$ из (10.7.3) не может быть заменено никаким меньшим числом, и (ii) истинность (10.7.3) для всех положительных n влечет истинность гипотезы Рамануджана[1].

Мы видели в § 9.18, что

$$\tau(n) = O(n^8). \tag{10.7.5}$$

[1] В случае (i) возьмем $n = p^\lambda$ и заметим, что

$$\Big|\frac{\sin(\lambda+1)\theta_p}{\sin\theta_p}\Big| \geqslant 1$$

для бесконечного количества чисел λ. В случае (ii) возьмем то же n и предположим, что θ_p комплексное число. Тогда $\theta_p = k\pi \pm i\eta_p$, где η_p — положительное число

Рамануджан приводит более сложное доказательство оценки

$$\tau(n) = O(n^7), \tag{10.7.6}$$

и это максимум того, что можно доказать «элементарными» методами. Я доказал в 1918 с помощью метода, использованного Литтлвудом и мной при работе над задачей Варинга, что

$$\tau(n) = O(n^6). \tag{10.7.7}$$

Клустерман доказал в 1927, что при всех положительных ε

$$\tau(n) = O(n^{47/8+\varepsilon}), \tag{10.7.8}$$

Давенпорт (Davenport) и Салье (Salié) доказали независимо друг от друга в 1933, что

$$\tau(n) = O(n^{35/6+\varepsilon}), \tag{10.7.9}$$

и наконец Ранкин доказал в 1939, что

$$\tau(n) = O(n^{29/5}), \tag{10.7.10}$$

— наилучший результат, известный в настоящее время. Показатели здесь (не учитывая ε) меньше 6 на $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ соответственно.

Доказательство оценки $\tau(n) = O(n^6)$

10.8. Я докажу (10.7.7), показав, что

$$g(z) = z\{(1-z)(1-z^2)\dots\}^{24} = O\Big\{\frac{1}{(1-r)^6}\Big\} \tag{10.8.1}$$

(поскольку $\cos\theta_p$ имеет вещественное значение) и

$$\Big|\frac{\sin(\lambda+1)\theta_p}{\sin\theta_p}\Big| = \frac{\operatorname{sh}(\lambda+1)\eta_p}{\operatorname{sh}\eta_p}$$

больше константы, кратной $e^{\lambda\eta_p}$ или n^δ, где

$$\delta = \frac{\eta_p}{\log p}.$$

равномерно по θ. Здесь $z = re^{i\theta}$ и $0 < r < 1$. На время предположим, что это верно, и получим

$$r(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{g(z)}{z^{n+1}}\, dz,$$

где C — окружность $r = e^{-1/n}$. На этой окружности $|z^{-n}| = e$, и поэтому

$$\tau(n) = O\Big\{ \max_{r=e^{-1/n}} |g(re^{i\theta})| \Big\} = O(n^6),$$

поэтому (10.7.7) является следствием (10.8.1).

Разделим C рассечением Фарея[1] (Farey) порядка

$$\nu = \big[\sqrt{n}\big] + 1$$

на дуге $\xi_{p,\,q}$. Достаточно доказать, что (10.8.1) верно на $\xi_{p,\,q}$ равномерно по p и q.

Если $z = x^2 = e^{2\pi i\tau}$, то

$$f(z) = h^{24}(\tau)$$

в обозначениях Таннери и Молка, и

$$h^{24}(T) = (a + b\tau)^{12} h^{24}(\tau), \tag{10.8.2}$$

если

$$T = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}$$

— произвольная подстановка модулярной группы Г. Положим

$$a = p, \quad b = -q, \quad c = \frac{1 + pp'}{q}, \quad d = -p',$$

где p' определяется сравнением

$$1 + pp' \equiv 0 \pmod{q}.$$

Запишем

$$\theta = \frac{2p\pi}{q} + \phi, \quad \tau = \frac{p}{q} + \frac{i\zeta}{q}.$$

[1] См. § 8.10.

Тогда

$$z = e^{2\pi i\tau} = \exp\Big(-\frac{2\pi\zeta}{q} + \frac{2p\pi i}{q}\Big) \tag{10.8.3}$$

и

$$-\frac{2\pi\zeta}{q} + \frac{2p\pi i}{q} = -\frac{1}{n} + i\theta,$$

поэтому

$$\zeta = \frac{q}{2\pi}\Big(\frac{1}{n} - i\phi\Big). \tag{10.8.4}$$

Также

$$T = \frac{c + d\tau}{a + b\tau} = \frac{d}{b} - \frac{1}{b(a + b\tau)} = \frac{p'}{q} + \frac{1}{q(p - q\tau)} = \frac{p'}{q} + \frac{i}{q\zeta}$$

и

$$Z = e^{2\pi iT} = \exp\Big(-\frac{2\pi}{q\zeta} + \frac{2p'\pi i}{q}\Big). \tag{10.8.5}$$

Наконец, (10.8.2), сформулированная в терминах $g(z)$ и $g(Z)$, имеет вид

$$g(Z) = \zeta^{12} g(z). \tag{10.8.6}$$

Теперь

$$|Z| = e^{-2\pi\Im(T)} = \exp\Big\{-2\pi\Re\Big(\frac{1}{q\zeta}\Big)\Big\} = \exp\Big\{-\frac{4\pi^2 n^{-1}}{q^2(n^{-2} + \phi^2)}\Big\}. \tag{10.8.7}$$

Также

$$|\phi| < \frac{2\pi}{q\nu}, \quad q^2\phi^2 < \frac{4\pi^2}{\nu^2} < \frac{4\pi^2}{n}$$

на $\xi_{p,\,q}$ и $q^2 n^{-2} < \nu^2 n^{-2} < 2n^{-1}$. Следовательно, существуют константы $A > 0$ и $\delta < 1$ такие, что

$$|Z| < e^{-A} = \delta$$

на $\xi_{p,\,q}$ и

$$|g(Z)| \leqslant |Z| \sum_1^\infty |\tau(n)|\,|Z|^{n-1} < B|Z|, \tag{10.8.8}$$

где B — другая константа.

Из (10.8.4), (10.8.6), (10.8.7) и (10.8.8) следует, что

$$|g(z)| = |\zeta|^{-12}|g(Z)| < B|\zeta|^{-12}|Z| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{B}{\{q^2(n^{-2}+\phi^2)\}^6}\exp\Big\{-\frac{4\pi^2 n^{-1}}{q^2(n^{-2}+\phi^2)}\Big\} = Bn^6\mu^6 e^{-4\pi^2\mu},$$

где

$$\mu = \frac{n^{-1}}{q^2(n^{-2}+\phi^2)}.$$

Поскольку $\mu^6 e^{-4\pi^2\mu}$ ограничено при положительных μ, то, следовательно,

$$g(z) = O(n^6) = O\{(1-r)^{-6}\}$$

равномерно по p и q. Тем самым истинность (10.8.1) доказана сначала на окружности $r = e^{-1/n}$, а затем, по принципу максимального модуля, в общем случае[1].

Тем самым мы доказали (10.7.7), а в действительности немного больше. Имеем

$$\sum \tau^2(m) r^{2m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2\, d\theta = O\{(1-r)^{-12}\}$$

и *a fortiori*[2]

$$\sum_1^n \tau^2(m) r^{2m} = O\{(1-r)^{-12}\} = O(n^{12}).$$

Также

$$r^{2m} = e^{-2m/n} \geqslant e^{-2},$$

если $m \leqslant n$, поэтому

$$\sum_1^n \tau^2(m) = O(n^{12}). \tag{10.8.9}$$

Это утверждение включает в себя (10.7.7) и показывает, что $\tau(n)$ имеет порядок $O(n^{11/2})$ «в среднем квадратичном».

---

[1] Достаточно, чтобы формула (10.8.1) была верна на $r = e^{-1/n}$.

[2] Лат. — тем более.

Дальнейшие свойства $F(s) = \sum \frac{\tau(n)}{n^s}$

10.9. Доказательство Ранкина формулы (10.7.10) основано на функциональном уравнении, которому удовлетворяет функция

$$f(s) = \sum \frac{\tau^2(n)}{n^s}. \tag{10.9.1}$$

Более простая функция $F(s)$ из § 10.3 также удовлетворяет функциональному уравнению, и нам удобно исследовать это свойство здесь.

Мы видели в § 10.3, что

$$F(s) = \sum \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}} \tag{10.9.2}$$

при достаточно больших σ. Из формулы (10.8.9) и неравенства Коши следует, что

$$\sum_1^n |\tau(\nu)| = O(n^{11/2})$$

и что ряд и произведение абсолютно сходятся при $\sigma > \frac{13}{2}$. Абсцисса неабсолютной сходимости зависит от порядка функции суммы

$$T(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau(n). \tag{10.9.3}$$

Теперь

$$\Gamma(s)F(s) = \int_0^\infty y^{s-1} g(e^{-y})\, dy,$$

где $g(x)$ — это функция (10.1.2), при $\sigma > \frac{13}{2}$.[1] Но[2]

$$g(e^{-y}) = \left(\frac{2\pi}{y}\right)^{12} g(e^{-4\pi^2/y})$$

[1] Когда

$$\sum |\tau(n)| \int_0^\infty y^{\sigma-1} e^{-ny}\, dy = \Gamma(\sigma) \sum \frac{|\tau(n)|}{n^\sigma} < \infty.$$

[2] Это частный случай $q = 1$, $p = 0$ формулы (10.8.6).

экспоненциально стремится к нулю как при $y \to 0$, так и при $y \to \infty$, поэтому интеграл является сходящимся при всех s, и $F(s)$ — целая функция переменной s. Также

$$\Gamma(s)F(s) = (2\pi)^{12} \int_0^\infty y^{s-13} g(e^{-4\pi^2/y})\, dy =$$

$$= (2\pi)^{2s-12} \int_0^\infty z^{11-s} g(e^{-z})\, dz = (2\pi)^{2s-12}\Gamma(12-s)F(12-s),$$

поэтому $F(s)$ удовлетворяет

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)F(s) = (2\pi)^{s-12}\Gamma(12-s)F(12-s). \tag{10.9.4}$$

Поведение $F(s)$ «тривиально» в полуплоскости абсолютной сходимости, в частности, она не имеет нулей с вещественной частью больше $\frac{13}{2}$. Функциональное уравнение тогда определяет ее поведение при $\sigma < \frac{11}{2}$. Она имеет «тривиальные» нули при $s = 0, -1, -2, \ldots$, но не имеет других нулей, чья вещественная часть меньше $\frac{11}{2}$.

«Критическая полоса», соответствующая полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, для $\zeta(s)$ имеет вид $\frac{11}{2} \leqslant \sigma \leqslant \frac{13}{2}$, и существуют задачи, связанные с ее поведением на этой полосе, соответствующие всем известным проблемам с $\zeta(s)$. Было показано, к примеру, что на прямых $\sigma = \frac{11}{2}$ и $\sigma = \frac{13}{2}$ эта функция не имеет нулей, и она имеет бесконечное количество нулей на прямой $\sigma = 6$. «Гипотеза Римана» для $F(s)$ заключается в том, что все нули, за исключением «тривиальных» нулей, лежат на прямой $\sigma = 6$.

Существует другая производящая функция, которая может оказаться полезной при изучении $\tau(n)$, а именно

$$\mathfrak{F}(s) = \sum_1^\infty \tau(n) e^{-s\sqrt{n}}. \tag{10.9.5}$$

Легко доказать, что

$$\mathfrak{F}(s) = (2\pi)^{23/2}\Gamma\Big(\frac{25}{2}\Big) s \sum_1^\infty \frac{\tau(n)}{(s^2+4n\pi^2)^{23/2}}, \tag{10.9.6}$$

но свойства $\mathfrak{F}(s)$ не так интересны, как свойства $F(s)$.

Свойства $f(s) = \sum \dfrac{\tau^2(n)}{n^s}$

10.10. Теперь нам нужно изучить соответствующие свойства функции $f(s)$, определенной формулой (10.9.1), и мы начнем с нахождения интегрального представления функции $f(s)$, верного при $\sigma > 12$, а именно

$$2(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta(s-22)f(s) = \iint\limits_D y^{s-1}|\Delta(\tau)|^2\xi(s,\,x,\,y)\,dx\,dy. \quad (10.10.1)$$

Здесь

$$\tau = x+iy, \quad y>0, \quad \Delta(\tau) = e^{2\pi i\tau}\{(1-e^{2\pi i\tau})(1-e^{4\pi i\tau})\dots\}^{24},^{1}$$

$$\xi(s) = \xi(s,\,x,\,y) = \sum\sum{}' \frac{1}{|m\tau+n|^{2s-22}}, \quad (10.10.2)$$

где штрих имеет обычный смысл, и D — фундаментальная область

$$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad |x+iy| \geqslant 1$$

модулярной группы.

Из (10.8.9) следует, что ряд для $f(s)$ является абсолютно сходящимся при $\sigma > 12$. Из

$$\Delta(\tau) = \sum_1^\infty \tau(n)e^{2n\pi ix-2n\pi y}$$

следует, по теореме Парсеваля, что

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} |\Delta(\tau)|^2\,dx = \sum_1^\infty \tau^2(n)e^{-4n\pi y}.$$

[1] Поэтому $\Delta(\tau) = g(e^{2\pi i\tau})$ в обозначениях § 10.1.

Далее, если мы предположим, что $\sigma > 12$, то получим

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)f(s) = \sum_1^\infty \tau^2(n) \int_0^\infty y^{s-1}e^{-4n\pi y}\,dy =$$

$$= \int_0^\infty y^{s-1}\Big(\sum_1^\infty \tau^2(n)e^{-4n\pi y}\Big)\,dy = \int_0^\infty y^{s-1}\,dy \int_{-1/2}^{1/2} |\Delta(\tau)|^2\,dx =$$

$$= \iint_S y^{s-1}|\Delta(\tau)|^2\,dx\,dy, \quad (10.10.3)$$

где S — это полоса

$$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad y > 0.$$

Поскольку

$$\Delta(\tau) = O(e^{-2\pi y})$$

при больших y и

$$\Delta(\tau) = O(y^{-6})$$

при малых y,[1] равномерно по x, интеграл

$$\iint_S y^{\sigma-1}|\Delta(\tau)|^2\,dx\,dy$$

сходится при $\sigma > 12$, и это подтверждает справедливость преобразования.

10.11. Назовем модулярную подстановку

$$\tau = T(\tau') = \frac{-c + a\tau'}{d - b\tau'} \quad (10.11.1)$$

или T, подстановкой T_S, если она переводит точки τ' фундаментальной области D в точки τ треугольника D_T, лежащего в S. Поскольку a, b, c, d и $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ задают одну и ту же подстановку, мы можем предположить, что

$$b \leqslant 0, \quad d > 0 \quad \text{если} \quad b = 0, \quad (b, d) = 1. \quad (10.11.2)$$

Любая подстановка T преобразует D в треугольник, лежащий на полосе

$$n - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant n + \frac{1}{2},$$

[1] Согласно (10.8:1).

и тогда

$$\tau = T(\tau') - n$$

является постановкой T_S, поэтому существует T_S, соответствующая любой паре $(b,\ d)$, которая удовлетворяет (10.11.1). Далее, если $(b,\ d)$ — такая пара и $(a_0,\ c_0)$ — пара, которая совместно с $(b,\ d)$ порождает T_S, то общее решение уравнения

$$ad - bc = 1$$

имеет вид

$$a = a_0 + nb, \quad c = c_0 + nd,$$

и тогда

$$T(\tau') = \frac{-c_0 + a_0\tau'}{d - b\tau'} - n$$

задает D_T вне S, за исключением случая, когда $n = 0$. Следовательно, существует только одна T_S, соответствующая произвольной паре $(b,\ d)$, удовлетворяющей (10.11.2).

Теперь

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)f(s) = \sum_{T_S} \iint\limits_{D_T} y^{s-1}|\Delta(\tau)|^2\, dx\, dy. \tag{10.11.3}$$

Если (10.11.1) — подстановка T_S, которая переводит D в D_T, то элементарные вычисления показывают, что

$$y = \frac{y'}{|d - b\tau'|^2}, \quad \left|\frac{d\tau}{d\tau'}\right| = \frac{1}{|d - b\tau'|^2}, \quad dx\, dy = \left|\frac{d\tau}{d\tau'}\right|^2 dx'\, dy' = \frac{dx'\, dy'}{|d - b\tau'|^4}.$$

Также

$$\Delta(\tau) = (d - b\tau')^{12}\Delta(\tau').$$

Следовательно, подставляя (10.11.1) в (10.11.3), записывая m вместо $-b$ и n вместо d и опуская штрихи, мы получим

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)f(s) = \sum_{T_S} \iint\limits_{D} \frac{y^{s-1}}{|d - b\tau|^{2s-22}}|\Delta(\tau)|^2\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{D} y^{s-1}|\Delta(\tau)|^2 F(s,\ \tau)\, dx\, dy, \tag{10.11.4}$$

где

$$F(s,\tau)=\sum\frac{1}{|m\tau+n|^{2s-22}} \tag{10.11.5}$$

и суммирование определяется условиями

$$0\leqslant m<\infty,\quad -\infty<n<\infty,\quad (m,n)=1,\quad n=1,\text{ если } m=0. \tag{10.11.6}$$

Наконец, мы умножаем обе части (10.11.4) на

$$2\zeta(2s-22)=2\sum_1^\infty\frac{1}{k^{2s-22}}=\sum_k{}'\frac{1}{|k|^{2s-22}},$$

где штрих означает исключение значения $k=0$. Очевидно, что

$$2\zeta(2s-22)F(s,\tau)=\sum\sum{}'\frac{1}{|m\tau+n|^{2s-22}}=\xi(s),$$

где штрих означает исключение пары $m=0$, $n=0$, и тем самым мы получаем (10.10.1).

10.12. Теперь нам потребуются некоторые свойства функции

$$K(w)=\sum\sum{}'\exp\Big(-\frac{\pi w}{y}|m\tau+n|^2\Big), \tag{10.12.1}$$

где $w>0$. Наиболее существенным является функциональное уравнение

$$1+K(w)=\frac{1}{w}\Big\{1+K\Big(\frac{1}{w}\Big)\Big\}. \tag{10.12.2}$$

Это простое следствие формулы суммирования Пуассона для функций двух переменных, а именно

$$\sum\sum\phi(m,n)=\sum\sum\iint\phi(\xi,\eta)e^{2\pi i(m\xi+n\eta)}\,d\xi\,d\eta, \tag{10.12.3}$$

где все суммирования и интегрирования происходят от $-\infty$ до ∞. В этом случае

$$1+K(w)=\sum\sum\phi(m,n),$$

где

$$\phi(\xi,\eta)=\exp\Big\{-\frac{\pi w}{y}|\xi(x+iy)+\eta|^2\Big\}.$$

Если мы подставим это значение ϕ в (10.12.3) и воспользуемся формулой

$$\iint e^{-\alpha\xi^2-2\beta\xi\eta-\gamma\eta^2+2\pi i(m\xi+n\eta)}\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}\exp\Big\{-\frac{\pi^2}{\alpha\gamma-\beta^2}(\alpha n^2-2\beta nm+\gamma n^2)\Big\},$$

где α, γ и $\alpha\gamma-\beta^2$ положительные, то мы получим (10.12.2).

Нам также понадобится верхняя оценка для $K(w)$ при больших w. Она имеет вид

$$K(w) = O(ye^{-\pi w/(2y)}) \tag{10.12.4}$$

и выполняется равномерно при $w>1$ и $\tau = x+iy$ в D.

Имеем

$$K(w) = \sum\sum{}' \exp\Big(-\frac{\pi w}{y}\{(mx+n)^2+m^2y^2\}\Big).$$

Случай $m=0$, $n=0$ исключается. Также $y \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$, поскольку τ лежит в D.

(i) Слагаемые $m=0$, $n\neq 0$ определяют

$$2\sum_1^\infty e^{-n^2\pi w/y} = 2(e^{-\pi w/y}+e^{-4\pi w/y}+\dots) < \frac{2e^{-\pi w/y}}{1-e^{-\pi w/y}},$$

т. е. $O(y/w)$ при малых w/y и $O(e^{-\pi w/y})$ при больших w/y, и поэтому

$$O\Big\{\Big(1+\frac{y}{w}\Big)e^{-\pi w/y}\Big\} = O(ye^{-\pi w/(2y)})$$

в любом случае.

(ii) Остаются слагаемые, для которых $m\neq 0$. Если мы зафиксируем m, то существует не более одного n, для которого

$$|mx+n| < \frac{1}{2}.$$

Эти m и n определяют оценку $O(e^{-m^2\pi yw})$, и суммирование относительно m затем определяет оценку

$$O(e^{-\pi wy}) = O(ye^{\pi w/(2y)}).^1$$

---

[1] $y>\frac{1}{2}$ и $y>\frac{1}{4}y^{-1}$.

Другие n порождают две последовательности, численные значения которых превышают $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, и поэтому (для фиксированных m) мы получим

$$O\{(e^{-\pi w/(2y)} + e^{-9\pi w/(4y)} + \ldots)e^{-m^2\pi wy}\},$$

которая, как и в (i), равна

$$O\{ye^{-\pi w/(2y)} \cdot e^{-m^2\pi wy}\}.$$

Наконец, суммируя относительно m, мы получим

$$O\{ye^{-\pi w/(2y)} \cdot e^{-\pi wy}\} = O(ye^{-\pi w/(2y)}).$$

Это завершает доказательство (10.12.4).

Если y — фиксированное значение, то

$$K(w) = O(e^{-Aw}) \tag{10.12.5}$$

при больших w и положительных A.

10.13. Теперь мы можем определить основные аналитические свойства $\xi(s)$. Она определена формулой (10.10.2), когда $\sigma > 12$. Также

$$\Big(\frac{y}{\pi}\Big)^{s-1} \frac{\Gamma(s-11)}{|m\tau+n|^{2s-22}} = \int_0^\infty w^{s-12} \exp\Big(-\frac{\pi w}{y}|m\tau+n|^2\Big)\, dw$$

при $\sigma > 11$, и поэтому

$$\Big(\frac{y}{\pi}\Big)^{s-1} \Gamma(s-11)\xi(s) = \int_0^\infty w^{s-12} \sum\sum{}' \exp\Big(-\frac{\pi w}{y}|m\tau+n|^2\Big)\, dw =$$

$$= \int_0^\infty w^{s-12} K(w)\, dw, \tag{10.13.1}$$

если допустимо суммирование под знаком интеграла. Это так при условии

$$\int_0^\infty w^{\sigma-12} K(w)\, dw < \infty.$$

Этот интеграл является сходящимся в бесконечности при любых σ благодаря (10.12.5). Вблизи начала координат

$$K(w) = -1 + \frac{1}{w} + \frac{1}{w}K\Big(\frac{1}{w}\Big)$$

ведет себя подобно w^{-1} и интеграл является сходящимся при $\sigma > 12$. Таким образом, (10.13.1) верно при всех таких σ. Также

$$\Big(\frac{y}{\pi}\Big)^{s-11}\Gamma(s-11)\xi(s) = \int\limits_1^\infty w^{s-12}K(w)dw + \int\limits_0^1 w^{s-12}\Big\{-1+\frac{1}{w}+\frac{1}{w}\Big(\frac{1}{w}\Big)\Big\}\,dw =$$

$$= \int\limits_1^\infty w^{s-12}K(w)\,dw - \frac{1}{s-11} + \frac{1}{s-12} + \int\limits_1^\infty w^{11-s}K(w)\,dw =$$

$$= \frac{1}{(s-11)(s-12)} + \int\limits_1^\infty (w^{s-12} + w^{11-s})K(w)\,dw. \quad (10.13.2)$$

Интеграл здесь является целой функцией переменной s, согласно (10.12.5), для любого τ из D, и правая часть не меняется при подстановке $23-s$ вместо s. Таким образом, $\xi(s)$ регулярна во всей плоскости за исключением простого полюса в $s = 12$, и

$$\Big(\frac{y}{\pi}\Big)^{s-11}\Gamma(s-11)\xi(s) = \Big(\frac{y}{\pi}\Big)^{12-s}\Gamma(12-s)\xi(23-s). \quad (10.13.3)$$

10.14. Мы выведем свойства $f(s)$ из свойств $\xi(s)$. Из (10.10.1) и (10.13.2) следует, что

$$2(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\Gamma(s-11)\zeta(2s-22)f(s) =$$

$$= \pi^{s-11}\iint\limits_D y^{10}|\Delta(\tau)|^2\Big\{\Gamma(s-11)\Big(\frac{y}{\pi}\Big)^{s-1}\xi(s)\Big\}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\pi^{s-11}}{(s-11)(s-12)}\iint\limits_D y^{10}|\Delta(\tau)|^2\,dx\,dy +$$

$$+ \pi^{s-11}\iint\limits_D y^{10}|\Delta(\tau)|^2\,dx\,dy\int\limits_1^\infty (w^{s-12} + w^{11-s})K(w)\,dw. \quad (10.14.1)$$

Теперь для любого вещественного c и τ из D интеграл

$$\int_1^\infty w^c K(w)\,dw$$

мажорируется, согласно (10.12.4), величиной, кратной

$$y\int_1^\infty w^c e^{-\pi w/(2y)}\,dw.$$

Если $c \geqslant 0$, мы заменим нижний предел 1 на 0, если $c < 0$, мы опустим w^c и произведем то же изменение пределов интегрирования. В любом случае интеграл меньше

$$Ay^\gamma,$$

где A и γ зависят только от c.[1] Следовательно, тройной интеграл в (10.14.1) мажорируется величиной

$$A\pi^{\sigma-12}\iint_D y^\delta|\Delta(\tau)|^2\,dx\,dy,$$

где A и δ зависят только от σ, и этот интеграл является сходящимся при всех σ, поскольку

$$\Delta(\tau) = O(e^{-2\pi y})$$

при больших y.

Следовательно, тройной интеграл является абсолютно и равномерно сходящимся на любой ограниченной области значений s и представляет собой целую функцию переменной s, и что

$$2(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\Gamma(s-11)\zeta(2s-22)f(s)$$

регулярна при всех s, за исключением простых полюсов в точках $s = 11$ и $s = 12$. Следовательно, $f(s)$ — мероморфная функция переменной s, регулярная, за исключением

[1] $\gamma = c+2$, если $c \geqslant 0$, $\quad \gamma = 2$, если $c < 0$.

(i) простого полюса в точке $s = 12$ с вычетом

$$\alpha = 12\frac{(4\pi)^{11}}{\Gamma(12)} \iint\limits_D y^{10}|\Delta(\tau)|^2\, dx\, dy, \tag{10.14.2}$$

(ii) полюсов, соответствующих комплексным нулям $\zeta(2s-22)$, которые все лежат слева от $\sigma = 12$.[1]

Наконец, из (10.14.1) следует, что

$$(2\pi)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-11)\zeta(2s-22)f(s) = \\ = (2\pi)^{2s-46}\Gamma(23-s)\Gamma(12-s)\zeta(24-2s)f(23-s), \tag{10.14.3}$$

т. е. что

$$\phi(s) = \phi(23-s), \tag{10.14.4}$$

где

$$\phi(s) = (2\pi)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-11)\zeta(2s-22)f(s). \tag{10.14.5}$$

Также из этих свойств $f(s)$ и широко известной теоремы Икехары (Ikehara) следует, что

$$\tau^2(1) + \tau^2(2) + \ldots + \tau^2(n) \sim \frac{1}{12}\alpha n^{12}. \tag{10.14.6}$$

Это новая теорема, но Ранкин показал, что можно получить намного больше, используя теорему Ландау.

10.15. Теорема Ландау[2] имеет следующий вид. *Предположим, что*

(1) $$c_n \geqslant 0,$$

(2) $$Z(s) = \sum \frac{c_n}{n^s}$$

абсолютно сходящийся при $\sigma > 1$,

(3) $Z(s)$ *регулярна на всей плоскости за исключением простого полюса в* $s = 1$ *с вычетом* β,

(4) $$Z(s) = O(e^{\gamma|t|})$$

при больших $|t|$ *и некоторых* $\gamma = \gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ *на любой полосе* $\sigma_1 \leqslant \sigma < \sigma_2$,

[1] «Тривиальные» нули дзета-функции взаимно сокращаются с полюсами $\Gamma(s-11)$.

[2] Приводится частный случай, достаточный для наших целей.

(5) $$\Gamma(s)\Gamma(s+11)Z(s) = \Gamma(1-s)\Gamma(12-s)\sum e_n(An)^s$$

— *последний ряд, абсолютно сходящийся при* $\sigma < 0$,

(6) $$\sum_{n\leqslant x} n|e_n| = O(x).$$

Тогда

$$C(x) = \sum_{e_n\leqslant x} c_n = \beta x + O(x^{3/5}). \tag{10.15.1}$$

Покажем, что

$$Z(s) = \zeta(2s)f(s+11) = \sum \frac{c_n}{n^s} \tag{10.15.2}$$

удовлетворяет этим условиям.

(i) Поскольку

$$Z(s) = \sum \frac{1}{n^{2s}} \sum \frac{\tau^2(n)}{n^{s+11}}, \tag{10.15.3}$$

имеем

$$c_n = \sum_{\mu\nu^2=n} \mu^{-11}\tau^2(\mu) \geqslant 0. \tag{10.15.4}$$

(ii) Оба ряда в (10.15.3) являются абсолютно сходящимися при $\sigma>1$,[1] и поэтому тем же свойством обладает произведение рядов.

(iii) Мы доказали, что $Z(s)$ удовлетворяет условию (3) § 10.14. Значение β —

$$\beta = \frac{1}{6}\pi^2\alpha.$$

(iv) Из (10.14.1) очевидно, что $Z(s)$ удовлетворяет (4).

(v) Функциональное уравнение (10.14.3) может быть записано в виде

$$\Gamma(s)\Gamma(s+11)Z(s) = (2\pi)^{4s-2}\Gamma(1-s)\Gamma(12-s)Z(1-s) = \\ = \Gamma(1-s)\Gamma(12-s)\sum e_n(16\pi^4 n)^s,$$

где

$$e_n = \frac{c_n}{4\pi^2 n}.$$

Ряд является абсолютно сходящимся при $\sigma < 0$.

[1] Второй согласно (10.8.9).

(vi) Осталось проверить условие (6), т. е. что

$$C(x) = \sum_{n \leqslant x} c_n = O(x).$$

Теперь

$$\sum_{\mu \leqslant x} \mu^{-11} \tau^2(\mu) = O(x),$$

согласно (10.8.9) и частичному суммированию, и, в соответствии с (10.15.4),

$$C(x) = \sum_{\mu\nu^2 \leqslant x} \mu^{-11} \tau^2(\mu) =$$

$$= \sum_{\mu \leqslant x} \mu^{-11} \tau^2(\mu) + \sum_{\mu \leqslant x/4} \mu^{-11} \tau^2(\mu) + \sum_{\mu \leqslant x/9} \mu^{-11} \tau^2(\mu) + \ldots =$$

$$= O(x) + O(x/4) + O(x/9) + \ldots = O(x).$$

Следовательно, $Z(s)$ удовлетворяет условиям (1)–(6) и формула (10.15.1) истинна.

Однако в действительности мы воспользуемся не формулой (10.15.1), а формулой

$$D(x) = \sum_{n \leqslant x} n^{11} c_n = \frac{1}{12} \beta x^{12} + O(x^{12-3/5}). \tag{10.15.5}$$

Она следует из (10.15.1) после частичного суммирования. Фактически, если $[x] = \xi$, то имеем

$$D(x) = 1^{11} C(1) \sum_{2}^{\xi} \nu^{11} \{C(\nu) - C(\nu - 1)\} =$$

$$= \xi^{11} C(\xi) - \sum_{1}^{\xi - 1} \{(\nu + 1)^{11} - \nu^{11}\} C(\nu) =$$

$$= \{x^{11} + O(x^{10})\}\{\beta x + O(x^{3/5})\} - \sum_{1}^{\xi - 1} \{11\nu^{10} + O(\nu^9)\}\{\beta\nu + O(\nu^{3/5})\} =$$

$$= \beta x^{12} \left(1 - \frac{11}{12}\right) + O(x^{12-3/5}) - \frac{1}{12} \beta x^{12} + O(x^{12-3/5}).$$

10.16. Теперь легко доказать, что

$$\tau^2(1)+\tau^2(2)+\ldots+\tau^2(n)=\frac{1}{12}\alpha n^{12}+O(n^{12-3/5}), \qquad (10.16.1)$$

и получить теорему Ранкина (10.7.10).

Из (10.15.3) следует, что

$$\sum\frac{\tau^2(n)}{n^s}=\frac{Z(s-11)}{\zeta(2s-22)}=\sum\frac{n^{11}c_n}{n^s}\sum\frac{n^{22}\mu(n)}{n^{2s}},$$

$$\tau^2(n)=\sum_{kl^2=n}k^{11}c_kl^{22}\mu(l),$$

$$\sum_{n\leqslant x}\tau^2(n)=\sum_{kl^2\leqslant x}k^{11}c_kl^{22}\mu(l)=\sum_{l\leqslant x^{1/2}}l^{22}\mu(l)\sum_{k\leqslant x/l^2}k^{11}c_k=$$

$$=\sum_{l\leqslant x^{1/2}}l^{22}\mu(l)D\Big(\frac{x}{l^2}\Big)=\sum_{l\leqslant x^{1/2}}l^{22}\mu(l)\Big\{\frac{\pi^2\alpha}{72}\Big(\frac{x}{l^2}\Big)^{12}+O\Big(\frac{x}{l^2}\Big)^{12-3/5}\Big\}$$

согласно (10.15.5). Здесь основное слагаемое определяет оценку

$$\frac{\pi^2\alpha}{72}x^{12}\sum_{l\leqslant x^{1/2}}\frac{\mu(l)}{l^2}=\frac{\pi^2\alpha}{72}x^{12}\Big\{\frac{1}{\zeta(2)}+O(x^{-1/2})\Big\}=\frac{1}{12}\alpha x^{12}+O(x^{12-1/2})$$

и слагаемое погрешности определяет оценку

$$O(x^{12-3/5})\sum_{l\leqslant x^{1/2}}l^{-6/5}=O(x^{12-3/5}).$$

Следовательно, мы получаем (10.16.1).

Наконец, заменяя n на $n-1$ в (10.16.1) и вычитая, мы получим, что

$$\tau^2(n)=O(n^{11})+O(n^{12-3/5})=O(n^{12-3/5}),\quad \tau(n)=O(n^{6-1/5}),$$

т. е. (10.7.10)

Функция суммы $T(n)$

10.17. Существует другой набор задач, связанный с «функцией суммы»

$$T(n) = \sum_{n\leqslant x}{}' \tau(n) \tag{10.17.1}$$

значений $\tau(n)$. Штрих над $\sum$ означает, как обычно, что когда x — целое число, то последнее слагаемое $\tau(x)$ нужно заменить на $\frac{1}{2}\tau(x)$.

Я могу объяснить эти задачи наилучшим способом, сформулировав их аналоги для более знакомой арифметической функции. Если $r(n) = r_2(n)$ — количество представлений числа n в виде суммы двух квадратов, тогда функция суммы

$$R(x) = \sum_{n\leqslant x}{}' r(n) \tag{10.17.2}$$

определяет количество точек решетки внутри окружности

$$u^2 + v^2 \leqslant x$$

с условием, что мы считаем $\frac{1}{2}$ вместо 1 для точки решетки на периметре окружности. Известно, что

$$R(x) = \pi x + P(x), \tag{10.17.3}$$

где

$$P(x) = O(x^{1/2}),$$

но истинный порядок $P(x)$ по-прежнему не определен. Серпинский доказал в 1906, что

$$P(x) = O(x^{1/2}),$$

и этот результат был улучшен ван дер Корпутом и дальнейшими исследователями. В другом направлении Ландау и я доказали, что

$$P(x) \neq O(x^{1/2}).$$

Другая задача заключается в определении «формулы тождества» для $P(x)$. В 1905 Вороной сформулировал, что

$$P(x) = x^{1/2} \sum_{1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{1/2}} J_1\{2\pi(nx)^{1/2}\}, \tag{10.17.4}$$

где J_1 — функция Бесселя порядка 1. Я доказал это утверждение в 1915, и с тех пор были опубликованы многие другие доказательства.

Существуют аналогичные задачи «порядка» и «тождества» для $T(x)$. Естественно, они менее важны, и любой результат о порядке функции суммы будет неточным, поскольку мы не знаем истинного порядка самой $\tau(n)$. Лучшее, что мы можем доказать в настоящее время, это

$$T(x) = O(x^{59/10}). \tag{10.17.5}$$

Если гипотеза Рамануджана истинна, то

$$T(x) = O(x^{35/6+\varepsilon}). \tag{10.17.6}$$

Разумеется, неверно, что

$$T(x) = o(x^{25/4}). \tag{10.17.7}$$

В этом случае задача тождества, возможно, более интересна. Тождество имеет вид

$$T(x) = x^6 \sum_1^\infty \frac{\tau(n)}{n^6} J_{12}\{4\pi(nx)^{1/2}\}. \tag{10.17.8}$$

Вильтон (Wilton) доказал, что

$$T_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n\leqslant x} (x-n)^\alpha \tau(n) = x^{6+\alpha/2} \sum_1^\infty \frac{\tau(n)}{n^{6+\alpha/2}} J_{12+\alpha}\{4\pi(nx)^{1/2}\} \tag{10.17.9}$$

при $\alpha > 0$, и я доказал недавно, что этот результат по-прежнему справедлив при $\alpha = 0$.

Комментарии к лекции X

§ 10.1–3. Рамануджан в статье 18 *Сборника трудов* рассматривает функцию $\psi_\alpha(n)$, определенную формулой

$$x\{(1-x^{24/\alpha})(1-x^{48/\alpha})\dots\}^\alpha = \sum \psi_\alpha(n) x^n,$$

где $\alpha|24$. $\psi_\alpha(n) = \tau(n)$, когда $\alpha = 24$.

Когда α равно 1 или 3, $\psi_\alpha(n)$ определяется тождествами Эйлера и Якоби. Когда $\alpha = 12$, $\psi_\alpha(n)$ кратно $e_{12}(n)$ из § 9.3. Она равна 0 при четных n и

может быть определена при нечетных n как сумма по представлениям числа n в виде суммы 4 квадратов. Формулу можно найти в статье Глэйшера, на которую я сослался в § 9.1.

Рамануджан предположил, что $\psi_\alpha(n)$ мультипликативна во всех случаях, поэтому $\sum n^{-s}\psi_\alpha(n)$ имеет представление в виде произведения, аналогичное (10.3.8), и он вывел формулы для $\psi_\alpha(n)$ при α, равном 2, 4, 6 и 8. Все эти предположения были подтверждены в статье Морделла (**2**). Морделл утверждает, что мультипликативность $\psi_{12}(n)$ была доказана ранее Глэйшером, но, похоже, что это неверно, см. Глэйшер *Quarterly Journal of Math* 37 (1906), 36–38.

Ранкин в неопубликованной работе получил элементарные доказательства мультипликативности $\psi_{12}(n)$ и $\psi_{16}(n)$. Эти функции, в сущности, совпадают с функциями Глэйшера $\Omega(n)$ и $\Theta(n)$.

§ 10.4. Все свойства, обсуждаемые в § 10.4–6, были сформулированы Рамануджаном в рукописи «Свойства $p(n)$ и $\tau(n)$», которой теперь владеет профессор Ватсон, (см. также статью 28 *Сборника трудов*). Эта рукопись никогда не публиковалась в полном виде, но статья 30 *Сборника трудов*, в сущности, представляет собой выдержку из этой рукописи, и Ватсон в работах (**23**, **24**) описал и доказал намного больше свойств этих функций.

Доказательства в § 10.4 были получены Морделлом в (**1**), но также имеются в рукописи Рамануджана, разумеется, Рамануджан подразумевал мультипликативность $\tau(n)$.

§ 10.5–6. Доказательства здесь частично взяты из моих старых заметок по рукописи Рамануджана и частично из статьи Ватсона (**23**). Ватсон детально разработал доказательство, набросок которого приведен в § 10.6.

Если мы заменим x на q^2, то P, Q, R имеют вид

$$\frac{12\eta_1\omega_1}{\pi^2}, \quad \frac{12g_2\omega_1^4}{\pi^4}, \quad \frac{216g_2\omega_1^6}{\pi^6}$$

в обычных обозначениях теории эллиптических функций, и (10.5.3) эквивалентно

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

См. § 9.11

§ 10.7–8. См. Харди (**9**), Хеке (Hecke), *Hamburg math. Abhandlungen*, 5, (1927), 199–224, Клустерман (Kloosterman), *ibid.* 337–352, Салье (Salié) *Math. Zeitschrift* 36 (1932), 263–278, Давенпорт (Davenport) *Journal für Math.* 169 (1933), 158–176, Ранкин (**2**). Давенпорт явно не упоминает о $\tau(n)$, но (10.7.9), после работы Клустермана, является непосредственным следствием доказанного им.

Все, что он доказал о порядке $\tau(n)$, имеет аналог для коэффициентов c_n разложения

$$\sum_1^\infty c_n e^{2n\pi i\tau/N}$$

произвольной модулярной формы «уровня» N и размерности $-k$, которая обнуляется во всех рациональных точках, соответствующих точкам перегиба на вещественной оси на модулярной фигуре. Здесь «обнуление» означает «имеет предел, равный 0, при приближении вдоль перпендикуляра к оси». Специальная функция $g(e^{2\pi i\tau})$ уровня 1 и веса -12. Общие идеи теории таких модулярных функций были заложены Хеке, который доказал результат для общих модулярных форм, который соответствует (10.7.7).

Доказательство (10.7.7) в Харди (**9**) организованно другим образом, и рассечение Фарея явно не упоминается.

Я показал, что существуют константы A и B такие, что

$$An^{12} < \tau^2(1) + \tau^2(2) + \ldots + \tau^2(n) < Bn^{12}.$$

Этот результат теперь превзойден теоремами Ранкина (10.14.6) и (10.16.1).

§ 10.9. Функциональное уравнение (10.9.4) должно быть известно Рамануджану, но я не могу найти явной формулировки ни в *Сборнике трудов*, ни в записных книжках. Впервые оно было сформулировано в печати в работе Вильтона (**1**), который доказал его как частный случай функционального уравнения для

$$F(s,\, p,\, q) = \sum \frac{\tau(n)}{n^s} e^{2np\pi i/q}.$$

Вильтон в (**1**) доказал, что $F(s)$ имеет бесконечное количество нулей на $\sigma = 6$, и Ранкин в (**1**) — что она не имеет нулей на $\sigma = \frac{13}{2}$ или $\sigma = \frac{11}{2}$.

§ 10.10–16. Это доказательство приводится Ранкиным в (**2**), в которое внесены некоторые небольшие упрощения. Его доказательство соответствующих теорем для функций уровня N является более сложным.

§ 10.12. Формулу Пуассона см., к примеру, в Бохнер (Bochner), *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, 33–38 и 203–208, или Титчмарш (Titchmarsh) *Fourier integrals*, 60–68. Здесь рассматривается простейший случай.

§ 10.14. Теорема Икехары в виде, подходящем для наших приложений, формулируется следующим образом: *если* $a_n \geqslant 0$ *и* $\sum a_n n^{-s}$ *сходится при* $\sigma > 1$ *и представляет собой функцию, регулярную при* $\sigma \geqslant 1$, *за исключением простого полюса с вычетом* C *в точке* $s = 1$, *тогда*

$$\sum_{n \leqslant x} a_n \sim Cx.$$

Теорема (на которую мы уже ссылались в § 2.8) полностью базируется на идеях Винера. Существует простое доказательство теоремы в достаточно общей форме в работе Бохнера в *Math. Zeitschrift*, 37 (1933), 1–9.

§ 10.15. См. Ландау *Göttinger Nachrichten* (1915), 209–243.

§ 10.17. На задачу об «окружности» мы уже ссылались в лекции V (§ 5.1 и комментарий к этому параграфу).

Мое первое тождество (10.17.4) находится в работе в *Quarterly Journal of Math.*, 48 (1915), 263–283. С тех пор было получено множество доказательств, ссылки см. в Харди и Ландау, *Proc. Royal Soc.* (A), 105 (1923), 244–258. Возможно, наилучшее доказательство опубликовано в *Vorlesungen*, ii, 221–232.

Из теорем о $T(x)$, сформулированных в конце параграфа, (10.17.5) принадлежит Ранкину, теоремы (10.17.6), (10.17.7) и (10.17.8) — мои собственные. Теорему (10.17.5) см. в Ранкин (**3**), теорему (10.17.9) см. в Вильтон (**1**) и (10.17.8) — в Харди (**10**). Доказательства теорем (10.17.6) и (10.17.7) не были опубликованы. Мое собственное доказательство формулы (10.17.7) основано на тождестве (10.9.6).

Лекция XI

Определенные интегралы

11.1. В этой лекции я предлагаю обсудить некоторые теоремы Рамануджана, которые не привлекали большого внимания, которые, как я говорил в моей первой лекции, «неизбежно менее впечатляющи», чем большая часть его работ, но которые по-прежнему очень интересны и заслуживают тщательного анализа.

Рамануджан занимался в течение большей части последнего года перед приездом в Англию общими формулами из теории определенных интегралов. Затем он получил исследовательскую стипендию в Мадрасе и представил три квартальных отчета о прогрессе своих исследований в университет. Из этих отчетов взята большая часть формул, приводимых мной в этой лекции. Я обязан знанием содержания этих отчетов профессору Ватсону, который включил их в свою копию записных книжек Рамануджана, но большую часть формул, процитированных мной, мне показал сам Рамануджан.

11.2. Моя лекция основана на следующих формулах:

(A)
$$\int_0^\infty x^{s-1}\{\phi(0)-x\phi(1)+x^2\phi(2)-\dots\}\,dx=\frac{\pi}{\sin s\pi}\phi(-s).$$

(B)
$$\int_0^\infty x^{s-1}\Big\{\lambda(0)-\frac{x}{1!}\lambda(1)+\frac{x^2}{2!}\lambda(2)-\dots\Big\}\,dx=\Gamma(s)\lambda(-s).$$

(C)
$$\phi(0)+\phi(1)+\phi(2)+\dots=\int_0^\infty\phi(x)\,dx+\int_0^\infty\frac{\phi(0)-x\phi(1)+x^2\phi(2)-\dots}{x\{\pi^2+(\log x)^2\}}\,dx.$$

(D1)
$$\int_0^\infty\Big\{\lambda(0)-\frac{x}{1!}\lambda(1)+\frac{x^2}{2!}\lambda(2)-\dots\Big\}\cos yx\,dx=\lambda(-1)-\lambda(-3)y^2+\lambda(-5)y^4-\dots$$

(D2)

$$\int_0^\infty \left\{\lambda(0)-\frac{x}{1!}\lambda(1)+\frac{x^2}{2!}\lambda(2)-\dots\right\}\sin yx\,dx=\lambda(-2)y-\lambda(-4)y^3+\lambda(-6)y^5-\dots$$

(E)

$$\int_0^\infty \left\{\lambda(0)-\frac{x}{1!}\lambda(1)+\dots\right\}\left\{\mu(0)-\frac{x}{1!}\mu(1)+\dots\right\}dx =$$

$$= \lambda(-1)\mu(0)-\lambda(-2)\mu(1)+\dots$$

(F) Если

(F1)
$$\int_0^\infty F(\alpha x)G(\beta x)\,dx = \frac{1}{\alpha+\beta}$$

и

(F2)
$$f(s)=\int_0^\infty F(x)x^{s-1}\,dx, \quad g(s)=\int_0^\infty G(x)x^{s-1}\,dx,$$

тогда

(F3)
$$f(s)g(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi}.$$

И если

(F4)
$$\int_0^\infty A(x)\frac{1}{2}\{F(yxi)+F(-yxi)\}\,dx = B(y),$$

то

(F5)
$$\int_0^\infty B(x)\frac{1}{2}\{G(yxi)+G(-yxi)\}\,dx = \frac{1}{2}\pi A(y).$$

Я собираюсь сказать кое-что поочередно о каждой из этих формул, но я должен начать с некоторых общих замечаний о подходе Рамануджана к ним. У него не было настоящих доказательств ни одной из этих

формул, и здесь я использую фразу «действительное доказательство» в не вполне обычном смысле, в смысле, который я должен объяснить.

Вполне разумно считать, что мы теперь приближенно знаем условия истинности большинства аналитических формул. Мы можем сказать, к примеру, что формула, подобная (A), истинна при определенных ϕ и определенных s и что условия, которые мы накладываем на ϕ и s, являются «естественными» условиями, они возникают не из-за слабости нашего анализа, а представляют собой общие ограничения, в общем соответствующие фактическому положению дел. Наши теоремы не покрывают все случаи, в которых формула является истинной, и, возможно, будет интересным и полезным приложение усилий для их обобщения, но условия, при которых мы доказали их, станут недостаточными при обобщении каким-либо достаточно радикальным способом.

Математик может привести формулу и рассуждения для обоснования ее истинности, которые могут оказаться недостаточными в изначальном виде, в данном случае он не может сказать, что он «доказал» ее. Но часто происходит, что его метод, после переформулировки и развития современным математиком, приводит к доказательству, верному при «естественных» условиях, и в этом случае мы можем справедливо заявлять, что он «действительно» доказал теорему. Таким образом, Эйлер «действительно» доказал большие части современного анализа, и существует огромное множество теорем, которые Рамануджан «действительно» доказал, но он не доказал «действительно» ни одной из процитированных мной формул. Для него невозможно было сделать это, поскольку «естественные» условия включают идеи, о которых он ничего не знал в 1914 и которые он вряд ли усвоил до своей смерти. Он так же не имел, как говорил Литтлвуд, никакой строго определенной концепции доказательства: «Если возникало значительное количество подтверждающих аргументов и общее объединение свидетельств и интуиции убеждали его, он обрывал на этом рассуждения». В этом случае любое «действительное» доказательство неизбежно оказывалось вне его понимания и «значительные количества подтверждающих аргументов», приводимые в его записных книжках и отчетах, являются недостаточными в этом случае, хотя мы находим их весьма любопытными и интересными.

Формулы (A) и (B)

11.3. Первые две формулы наиболее важны, и я собираюсь обсудить их более подробно, чем остальные. Раманудженом они особенно нравились, и он использовал их в качестве одного из своих наиболее часто встречающихся инструментов исследований. Они являются вариантами друг друга, (A) переходит в (B), если положить

$$\phi(u) = \frac{\lambda(u)}{\Gamma(1+u)},$$

и мы можем считать (A) стандартной формой формулы, хотя в некоторых случаях (B) окажется более удобной.

Легко привести примеры истинности и ложности (A). Так,

$$\phi(u) = 1, \quad \phi(u) = \frac{1}{\Gamma(1+u)}$$

порождает формулы

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin s\pi}, \quad \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx = \frac{\pi}{\sin s\pi\,\Gamma(1-s)} = \Gamma(s),$$

истинные при $0 < s < 1$ и $s > 0$ соответственно. С другой стороны, формула, очевидно, ложна при

$$\phi(u) = \sin \pi u,$$

интеграл в этом случае тождественно равен нулю. Эта формула является «интерполяционной формулой», которая определяет $\phi(-s)$ в терминах $\phi(0)$, $\phi(1)$, ... Если она доказана для всех $\phi(u)$ из некоторого класса, тогда любая $\phi(u)$ из этого класса тождественно равна нулю, если она обращается в нуль во всех неотрицательных целых значениях u. Существует широко известная теорема Карлсона, которая гласит, что если (i) $\phi(u)$ регулярная функция и

$$|\phi(u)| < Ce^{A|u|},$$

где $A < \pi$, в правой полуплоскости комплексных значений u, и (ii) $\phi(0) = \phi(1) = \ldots = 0$, то $\phi(u)$ тождественно равна нулю, и естественно предположить, что (A) должна быть истинной для всех таких $\phi(u)$

и подходящих s. Мы можем также ожидать, что лучшими методами для обсуждения этой формулы будут те, с которыми нас познакомили Карлсон (Carlson) и другие и чей источник мы находим у Меллина (Mellin).

Доказательство (A)

11.4. В дальнейшем положим

$$u = v + iw.$$

Обозначим полуплоскость $v \geqslant -\delta$, где $\delta > 0$, через $H(\delta)$. На время положим

$$0 < \delta < 1.$$

Если $\phi(u)$ — регулярная функция и

$$|\phi(u)| < Ce^{Pv+A|w|} \tag{11.4.1}$$

на всей $H(\delta)$, то будем говорить, что $\phi(u)$ принадлежит классу $\mathscr{R}(A, P, \delta)$ или просто $\mathscr{R}$. По большей части мы будем изучать функции, для которых

$$A < \pi. \tag{11.4.2}$$

Предположим теперь, что $\phi(u)$ принадлежит $\mathscr{R}(A, P, \delta)$ при $A < \pi$, $0 < \delta < 1$, что $0 < c < \delta$ и что

$$0 < x < e^{-P}. \tag{11.4.3}$$

Тогда простым применением теоремы Коши получим

$$\Phi(x) = \phi(0) - x\phi(1) + x^2\phi(2) - \ \ldots \ = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi u}\phi(-u)x^{-u}\,du. \tag{11.4.4}$$

Ряд обычно расходится при $x > e^{-P}$, но подынтегральное выражение мажорируется для всех положительных x величиной, кратной

$$e^{-(\pi-A)|w|}e^{-Pc}x^{-c},$$

и интеграл равномерно сходится на любом интервале $0 < x_0 \leqslant x2002 \leqslant X$, и, следовательно, $\Phi(x)$ — регулярная функция, и представляется интегралом при всех положительных x.[1]

Мы можем теперь вывести (A) с помощью широко известной формулы обращения Меллина. Она выражается уравнениями

$$f(u) = \int_0^\infty F(x)x^{u-1}\,dx, \quad F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(u)x^{-u}\,du,$$

и формула (A) получается, если взять

$$f(u) = \frac{\pi}{\sin u\pi}\phi(-u), \quad F(x) = \Phi(x).$$

Мы можем проверить справедливость использования формулы Меллина различными способами, обращаясь при желании к какой-нибудь известной общей теореме, но гораздо интереснее дать прямое доказательство, следуя по пути, по которому изначально шел сам Меллин.

Предположим, что $s = \sigma + it$ и

$$0 < \sigma < \delta,$$

и выберем c_1 и c_2 так, чтобы

$$0 < c_1 < \sigma < c_2 < \delta.$$

Тогда формула (11.4.4) верна и при $c = c_1$, и при $c = c_2$.

Теперь

$$\int_0^1 \Phi(x)x^{s-1}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 x^{s-1}\,dx \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi u}\phi(-u)x^{-u}du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi u}\phi(-u)\,du \int_0^1 x^{s-u-1}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi u}\frac{\phi(-u)}{s-u}\,du,$$

[1] Если $x = re^{i\theta}$, то $|x^{-c-iw}| = r^{-c}e^{\theta w}$, и $\Phi(x)$ регулярна при $|\theta| < \pi - A$, но мы не будем использовать это.

поскольку $\Re(s-u)=\sigma-c_1>0$. При обращении не возникает никаких трудностей, поскольку двойной интеграл является абсолютно сходящимся. Аналогично,

$$\int_1^\infty \Phi(x)x^{s-1}\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi u}\phi(-u)\,du\int_1^\infty x^{s-u-1}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi u}\frac{\phi(-u)}{s-u}\,du,$$

поскольку теперь $\Re(s-u)=\sigma-c_2<0$. Объединяя эти уравнения, получаем

$$\int_0^\infty \Phi(x)x^{s-1}\,dx=\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}-\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\Big)\frac{\pi}{\sin\pi u}\frac{\phi(-u)}{s-u}\,du=\frac{\pi}{\sin\pi u}\phi(-s),$$

по теореме Коши.

11.5. Тем самым мы доказали (A) для $\phi(u)$ из $\mathscr{R}$ и для $0<\sigma<\delta$, в частности $0<s<\delta$. Очевидно, что если $\phi(u)=O(e^{A|u|})$, то $\phi(u)$ принадлежит $\mathscr{R}$ с $P=A$, поэтому наш класс функций $\phi(u)$ включает класс Карлсона. Следовательно, доказательство (A) является дополнительно доказательством теоремы Карлсона.

Мы можем также свести вторую часть доказательства к применению теоремы Фурье. Если мы положим $x=e^{-\xi}$, $u=c+iw$ в (11.4.4), то она принимает вид

$$\Phi(e^{-\xi})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\sin\pi(c+iw)}\phi(-c-iw)e^{\xi(c+iw)}\,dw,$$

и, по теореме Фурье, получаем

$$\frac{\pi\phi(-c-iw)}{\sin\pi(c+iw)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi(c+iw)}\Phi(e^{-\xi})\,d\xi=\int_0^\infty x^{c+iw-1}\Phi(x)\,dx.$$

Такая редукция преобразования «Меллина» к преобразованию «Фурье», разумеется, всегда возможна, поскольку преобразования являются формальными вариантами друг друга.

Я добавлю замечание, которое применимо не только здесь, но и зачастую в остальной части лекции. Я предположил, что $A < \pi$, благодаря чему все встречающиеся интегралы являются абсолютно сходящимися, с довольно большим запасом прочности. Во многих наиболее интересных примерах A будет равно π и последний интеграл может не быть абсолютно сходящимся, в этом случае потребуется более изощренное доказательство, не сводящееся к простому мажорированию. Гипотеза $A < \pi$ здесь и далее является грубой гипотезой, но в любом случае она является «естественной», поскольку формулы обычно неверны при $A > \pi$, и я не стану уделять время более тщательному анализу.

Эвристический вывод (A) и (B)

11.6. Формулы (A) и (B) связаны очень интересным способом с «интерполяционной формулой Ньютона».

Широко известно, что

$$e^x \sum_0^\infty (-1)^n \frac{a_n}{n!} x^n = \sum_0^\infty \frac{\Delta^n a_0}{n!} x^n,$$

где

$$\Delta a_0 = a_0 - a_1, \quad \Delta^2 a_0 = a_0 - 2a_1 + a_2, \quad \dots$$

Следовательно, если $s > 0$ и ряд

$$\Lambda(x) = \lambda(0) - \frac{\lambda(1)}{1!} x + \frac{\lambda(2)}{2!} x^2 - \dots$$

является сходящимся при всех x, имеем

$$\int_0^\infty \Lambda(x) x^{s-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \sum_0^\infty \frac{\Delta^n \lambda(0)}{n!} x^n\, dx,$$

и почленное интегрирование дает

$$\sum_0^\infty \frac{\Delta^n \lambda(0)}{n!} \int_0^\infty e^{-x} x^{s+n-1} dx = \Gamma(s) \Big\{ \lambda(0) + \frac{s}{1!} \Delta\lambda(0) + \frac{s(s+1)}{2!} \Delta^2 \lambda(0) + \dots \Big\}.$$

Наконец, формула Ньютона имеет вид

$$\lambda(-s) = \lambda(0) + \frac{s}{1!}\Delta\lambda(0) + \frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\Delta^2\lambda(0) + \ldots \tag{11.6.1}$$

Справедливость почленного интегрирования всегда может быть подтверждена, когда результирующий ряд сходится. Следовательно, мы можем доказать (B) при предположениях, что (i) s положительно, (ii) $\Lambda(x)$ — целая функция и (iii) формула Ньютона выполняется для $\lambda(-s)$. Если выполнены условия (i) и (ii), то (B) эквивалентна формуле Ньютона.

Существует соответствующее преобразование (A), основанное на преобразовании Эйлера

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad y = \frac{x}{1+x}.$$

Удобно предполагать, что $\phi(0) = 0$. Тогда, записывая b_n вместо $\phi(n)$, имеем формальное равенство

$$b_1 x - b_2 x^2 + b_3 x^3 - \ldots = b_1 \cdot y + \Delta b_1 \cdot y^2 + \Delta^2 b_1 \cdot y^3 + \ldots,$$

$$\int_0^\infty \Phi(x) x^{s-1}\,dx = -\int_0^\infty x^{s-1} \sum_0^\infty \Delta^n b_1 \Big(\frac{x}{1+x}\Big)^{n+1} dx =$$

$$= -\sum_0^\infty \Delta^n b_1 \int_0^\infty \frac{x^{s+n}}{(1+x)^{n+1}}\,dx = -\Gamma(-s)\sum_0^\infty \Delta^n b_1 \frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(n+1)} =$$

$$= \frac{\pi}{\sin s\pi}\Big\{b_1 + (s+1)\Delta b_1 + \frac{(s+1)(s+2)}{2!}\Delta^2 b_1 + \ldots\Big\}.$$

Таким образом, (A) также может быть сведена к формуле Ньютона[1].

Доказательство Рамануджана

11.7. Рамануджан фактически предполагает, что

$$\lambda(u) = \chi(e^{-au}), \tag{11.7.1}$$

[1] (11.6.1) с $\phi(u+1)$ вместо $\lambda(u)$ и $s+1$ вместо s.

где a — положительное число и $\chi(z)$ регулярна в начале координат. Тогда

$$\Lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \chi(e^{-an}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi^r(0)}{r!} e^{-arn} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi^r(0)}{r!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n e^{-arn} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi^r(0)}{r!} e^{-xe^{-ar}}$$

и

$$\int_0^{\infty} \Lambda(x) x^{s-1}\, dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi^r(0)}{r!} \int_0^{\infty} e^{-xe^{-ar}} x^{s-1}\, dx =$$

$$= \Gamma(s) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi^r(0)}{r!} e^{ars} = \Gamma(s)\chi(e^{as}) = \Gamma(s)\lambda(-s)$$

при $s > 0$. Инверсия справедлива, если (i) $\chi(z)$ регулярна при $|z| \leqslant 1$ и (ii) s достаточно мало. Тогда

$$\sum \frac{|\chi^r(0)|}{r!} Z^r$$

является сходящимся при некотором $Z > 1$,

$$\sum \frac{|\chi^r(0)|}{r!} \sum \frac{1}{n!} x^n e^{-arn} = \sum \frac{|\chi^r(0)|}{r!} e^{xe^{-ar}}$$

является сходящимся и

$$\sum \frac{|\chi^r(0)|}{r!} \int_0^{\infty} e^{-xe^{-ar}} x^{s-1}\, dx = \Gamma(s) \sum \frac{|\chi^r(0)|}{r!} e^{ars}$$

является сходящимся для достаточно малых положительных s. При этих условиях анализ Рамануджана является верным. Но условие на $\lambda(u)$, которое требует, чтобы $\lambda(n)$ имела вид

$$c_0 + c_1 e^{-an} + c_2 e^{-2an} + \ldots$$

при больших n, является чрезвычайно жестким, и хотя его можно немного обобщить, оно исключает практически все примеры Рамануджана.

Поучительно изучение случая, в котором аргумент, подобный аргументу Рамануджана, приводит к очевидно ложному результату. Предположим, что в (11.7.1) $a = -b$ — отрицательное число. Тогда, повторив вычисления Рамануджана, мы получим

$$\Lambda(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi^r(0)}{r!} e^{-xe^{br}} \tag{11.7.2}$$

и, предположительно, можем завершить доказательство так же, как и раньше. Но (11.7.2) обычно ложно, поскольку $\Lambda(x)$ регулярна в начале координат, а ряд в правой части представляет собой функцию от x, которая регулярна в правой полуплоскости, и мнимая ось является ее особой прямой. Таким образом, предположения

$$\chi(u) = e^{-cu} \quad (c > 0), \quad b = \log 2, \quad \lambda(u) = e^{-c2^u}$$

приводят к равенству

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} e^{-c2^n} = \sum_0^{\infty} (-1)^r \frac{c^r}{r!} e^{-x2^r},$$

которое, очевидно, является ложным.

Примеры и приложения

11.8. Я приведу несколько частных случаев, полученных Рамануджаном.

(i) Если $0 < s < \min(\alpha, \beta)$, то

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} F(\alpha, \beta, \gamma, -x)\, dx = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(s)\Gamma(\alpha - s)\Gamma(\beta - s)}{\Gamma(\gamma - s)}.$$

Здесь $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гипергеометрическая функция, определенная при $0 < x < 1$ обычным степенным рядом и при $x > 1$ с помощью аналитического продолжения.

(ii) Если $0 < s < 1$, то

$$\int_0^\infty x^{s-1}(1^{-a} - 2^{-a}x + 3^{-a}x^2 - \dots)\,dx = \frac{\pi}{\sin s\pi}(1-s)^{-a}.$$

(iii) Если $0 < q < 1$, $s > 1$ и $0 < a < q^{s-1}$, то

$$\int_0^\infty x^{s-1}\frac{(1+aqx)(1+aq^2x)\dots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\dots}\,dx = \frac{\pi}{\sin s\pi}\prod_1^\infty \frac{(1-q^{m-s})(1-aq^m)}{(1-q^m)(1-aq^{m-s})}.$$

(iv) Если $0 < s < \frac{1}{2}$, то

$$\int_0^\infty x^{s-1}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n!\zeta(2n+2)}\,dx = \frac{\Gamma(s)}{\zeta(2-2s)}.$$

Разумеется, (i) и (ii) — прямые следствия уже доказанного. Чтобы доказать (iii), воспользуемся разложением

$$\Phi(x) = \frac{(1+aqx)(1+aq^2x)\dots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\dots} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(1-aq)(1-aq^2)\dots(1-aq^n)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}x^n,$$

которое легко выводится из функционального уравнения

$$(1+aqx)\Phi(qx) = (1+x)\Phi(x),$$

которому удовлетворяет функция $\Phi(x)$. Здесь

$$\phi(u) = \prod_{m=1}^\infty \frac{(1-aq^m)(1-q^{m+u})}{(1-q^m)(1-aq^{m+u})}.$$

Наконец, формула (iv) была независимо получена М. Рисом (M. Riesz) и использовалась им для определения очень любопытного необходимого и достаточного условия для истинности гипотезы Рамануджана. По этой гипотезе, формула истинна при $0 < s < \frac{3}{4}$. Альтернативная форма функции $\Phi(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \sum_1^\infty \frac{\mu(m)}{m}e^{-x/m^2},$$

где $\mu(m)$ — функция Мёбиуса.

11.9. Мы можем пользоваться формулами Рамануджана для получения многих разложений, обычно выводимых из рядов Лагранжа и Бурмана (Burmann). Возьмем два примера, приводимых самим Рамануджаном.

(i) Известная в учебниках задача разложения e^{-ax} по степеням xe^{bx}. Рамануджан рассуждает следующим образом. Если $y = xe^{bx}$ и

$$e^{-ax} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\lambda(n)}{n!} y^n,$$

то, согласно (B)

$$\Gamma(s)\lambda(-s) = \int_0^\infty y^{s-1} e^{-ax}\, dy = \int_0^\infty x^{s-1}(1+bx)e^{-(a-sb)x}\, dx = \Gamma(s)a(a-sb)^{-s-1},$$

поэтому

$$\lambda(n) = a(a+nb)^{n-1}.$$

В доказательстве, разумеется, требуется, чтобы a и b были положительными[1].

(ii) Хорошо известно, что корни трехчленных уравнений можно представить в виде разложений в гипергеометрические ряды. Рамануджан получает разложение для любой степени x^r корня уравнения

$$aqx^p + x^q = 1$$

следующим образом. Если

$$x^r = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \lambda(n)}{n!} a^n,$$

то, согласно (B),

$$\Gamma(s)\lambda(-s) = \int_0^\infty a^{s-1} x^r\, da = \int_0^1 x^r \Big(\frac{1-x^q}{qx^p}\Big)^{s-1} d\Big(\frac{1-x^q}{qx^p}\Big).$$

[1] Когда функция

$$\frac{a(a+bu)^{u-1}}{\Gamma(1+u)}$$

не вполне удовлетворяет условиям § 11.4 («A» равно π).

Вычисляя интеграл, он получает разложение

$$x^r = 1 - \frac{r}{1!}a + \frac{r(r+2p-q)}{2!}a^2 - \frac{r(r+3p-q)(r+3p-2q)}{3!}a^3 + \dots$$

Я не знаю, является ли эта формула новой, и не пытался определить условия, при которых этот анализ является верным.

Формула (C)

11.10. Формулу (C) можно считать формулой остаточного члена в «формуле суммирования Эйлера–Маклорена». Поскольку

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x\{\pi^2 + (\log x)^2\}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dy}{\pi^2 + y^2} = 1,$$

мы можем умножить $\phi(0)$ в двух местах, где она встречается, на любой постоянный множитель. Удобнее записывать эту формулу в виде

$$\tfrac{1}{2}\phi(0)+\phi(1)+\phi(2)+\dots-\int_0^\infty \phi(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}\phi(0) - x\phi(1) + x^2\phi(2) - \dots}{x\{\pi^2 + (\log x)^2\}}\,dx$$

или, заменяя $\phi(u)$ на $y^u\phi(u)$, в виде

$$R(y) = \int_0^\infty \frac{\Phi_1(-yx)}{x\{\pi^2 + (\log x)^2\}}\,dx, \tag{11.10.1}$$

где теперь

$$\Phi_1(x) = \tfrac{1}{2}\phi(0) + \sum_1^\infty \phi(n)x^n,^1 \tag{11.10.2}$$

и

$$R(y) = \Phi_1(y) - \int_0^\infty y^x\phi(x)\,dx. \tag{11.10.3}$$

[1] $\Phi_1(x) = \Phi(-x) - \frac{1}{2}\phi(0)$ в обозначениях §11.4.

Наиболее известные формулы для $R(y)$ — это формула Пуассона, а именно

$$R(y) = 2\sum_{1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} y^x \phi(x) \cos 2n\pi x \, dx \tag{11.10.4}$$

и формула Планы (Plana), а именно

$$R(y) = i \int_{0}^{\infty} \frac{y^{iw}\phi(iw) - y^{-iw}\phi(-iw)}{e^{2\pi w} - 1} \, dw. \tag{11.10.5}$$

Формула Рамануджана по-видимому является новой.

Удобнее начать с доказательства частного случая формулы. Предположим, что

$$\phi(u) = \frac{1}{\Gamma(1+u)}$$

и

$$J(y) = \int_{0}^{\infty} y^x \phi(x) \, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{y^x}{\Gamma(1+x)} \, dx.$$

Тогда

$$\int_{0}^{\infty} e^{-sy} J(y) \, dy = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(1+x)} \int_{0}^{\infty} e^{-sy} y^x \, dy = \int_{0}^{\infty} s^{-x-1} \, dx = \frac{1}{s \log s},$$

если $s > 1$. Из формулы обращения Лапласа следует, что

$$J(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{ys}}{s \log s} \, ds,$$

где $c > 1$. Если мы деформируем контур в серпантин вокруг мнимой оси и допустим вычет в полюсе $s = 1$, то получим

$$J(y) = e^y - \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-yx}}{x\{\pi^2 + (\log x)^2\}} \, dx.$$

11.11. Рамануджан приводит очень нетривиальное доказательство этой формулы. Он доказывает более обще, что

$$\int\limits_{-\xi}^{\infty} \frac{y^x}{\Gamma(1+x)}\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} x^{\xi-1}e^{-yx}\Big(\cos\pi\xi - \frac{\sin\pi\xi}{\pi}\log x\Big)\frac{dx}{\pi^2+(\log x)^2} = e^y, \tag{11.11.1}$$

если $y \geqslant 0$ и $\xi \geqslant 0$. Если мы обозначим левую часть (11.11.1) через $p(y, \xi)$ и продифференцируем по ξ, то получим

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{y^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)} - \frac{\sin\pi\xi}{\pi}\int\limits_0^\infty x^{\xi-1}e^{-yx}\,dx = y^{-\xi}\Big\{\frac{1}{\Gamma(1-\xi)} - \frac{\Gamma(\xi)\sin\pi\xi}{\pi}\Big\} = 0.$$

Следовательно, $p(y, \xi)$ — это функция $P(y)$ только переменной y. Но если мы продифференцируем по y, то получим

$$\frac{dP}{dy} = \int\limits_{-\xi}^{\infty}\frac{y^{x-1}}{\Gamma(x)}\,dx - \int\limits_0^\infty x^{\xi}e^{-yx}\Big(\cos\pi\xi - \frac{\sin\pi\xi}{\pi}\log x\Big)\frac{dx}{\pi^2+(\log x)^2} =$$

$$= \int\limits_{-\xi-1}^{\infty}\frac{y^x}{\Gamma(x+1)}\,dx - \int\limits_0^\infty x^{\xi}e^{-yx}\Big(\cos\pi\xi - \frac{\sin\pi\xi}{\pi}\log x\Big)\frac{dx}{\pi^2+(\log x)^2} =$$

$$= p(y, \xi+1) = P(y).$$

Следовательно, $P(y) = Ce^y$, и мы можем найти значение C, положив $y = 0$ и $\xi = 0$.[1]

Мы можем теперь заменить $\phi(u)$ на

$$\phi(u) - \frac{\phi(0)}{\Gamma(1+u)}$$

в общей формуле, поэтому мы можем предположить $\phi(0) = 0$. Мы можем также предположить, что $\phi(u)$ вещественная для вещественных u. Эти упрощения не носят существенного характера, но они позволят нам упростить наш формальный анализ[2].

[1] Мы также можем доказать (11.11.1) с помощью «преобразования Лапласа».

[2] Мы можем начать с проверки формулы для любой конкретной $\phi(u)$, для которой $\phi(0) \neq 0$, но я не знаю ни одной такой функции, для которой (C) стала бы достаточно тривиальной.

11.12. Мы можем вывести формулу Рамануджана из формулы Планы следующим образом. Мы снова предположим, что $\phi(u)$ принадлежит классу $\mathscr{R}(A,\, P,\, \delta)$. Тогда

$$\Phi_1(-x) = \sum_1^\infty (-1)^n \phi(n) x^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi u} x^{-u} \phi(-u)\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\sin \pi i w} x^{-iw} \phi(-iw)\, dw; \quad (11.12.1)$$

теперь мы можем взять $c = 0$, поскольку $\phi(0) = 0$. Следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\Phi_1(-yx)}{x\{\pi^2 + (\log x)^2\}}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\sin \pi i w} y^{-iw} \phi(-iw)\, dw \int_0^\infty \frac{x^{-iw}}{x\{\pi^2 + (\log x)^2\}}\, dx.$$

Но

$$\int_0^\infty \frac{x^{-iw}}{x\{\pi^2 + (\log x)^2\}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iwt}}{\pi^2 + t^2}\, dt = e^{-\pi|w|},$$

и поэтому

$$\int_0^\infty \frac{\Phi_1(-yx)}{x\{\pi^2 + (\log x)^2\}}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi|w|}}{\sin \pi i w} y^{-iw} \phi(-iw)\, dw,$$

которая сводится к интегралу Планы (11.10.5) тривиальными преобразованиями.

Полное обсуждение формулы Планы можно найти в книге Линделёфа (Lindelöf) *Calcul des résidus*. Линделёф доказывает (11.10.5) при следующих условиях

$$e^{-2\pi|w|} y^{v+iw} \phi(v + iw) \to 0, \quad \text{(i)}$$

когда $|w| \to \infty$, равномерно в любой конечной полосе $-\delta \leqslant v \leqslant V$, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|w|} |y^{v+iw}|\, |\phi(v + iw)|\, dw \to 0, \quad \text{(ii)}$$

когда $v \to \infty$. Очевидно, что эти условия выполнены, если $\phi(u)$ принадлежит классу $\mathscr{R}(A,\ P,\ \delta)$ при $A < 2\pi$ и

$$0 < y < e^{-P},$$

и, в частности, при таких y, этим условиям удовлетворяют функции $\phi(u)$, которые рассматривались здесь. Таким образом, формула Рамануджана (C) верна в виде (11.10.1), и для этих y, для тех же самых $\phi(u)$, для которых мы доказали (A).

11.13. Я добавлю замечание о «формуле Планы». Ее можно доказать непосредственно, как следствие теоремы Коши, но следует рассмотреть, как ее можно вывести из формулы Пуассона, которая являясь формулой для «вещественной переменной», вероятно, более известна. Давайте запишем формулу Пуассона (11.10.4) в виде

$$R(y) = 2\sum_1^\infty J_n;$$

запишем $e^{-\beta}$ с $\beta > P$ вместо y и v вместо x. Тогда

$$J_n = \Re\Big\{\int_0^\infty \phi(v)e^{-(\beta-2n\pi i)v}\,dv\Big\} = \Re\Big\{i\int_0^\infty \phi(iw)e^{-\beta iw-2n\pi w}\,dw\Big\},$$

снова по теореме Коши, для доказательства здесь требуется только чтобы $A < 2\pi$.[1] Просуммировав, получаем формулу Планы.

11.14. Предположим, к примеру, что

$$\phi(u) = \frac{\Gamma(r+u)}{\Gamma(r)\Gamma(1+u)},$$

где $r > 0$. Тогда $\phi(u)$ принадлежит классу $\mathscr{R}$ при $0 < \delta < r$, для любого положительного A и любого P, и, согласно (11.10.1), получаем

$$(1-y)^{-r} - \int_0^\infty \frac{\Gamma(r+x)}{\Gamma(r)\Gamma(1+x)}y^x\,dx = \int_0^\infty \frac{(1+yx)^{-r}}{x\{\pi^2+(\log x)^2\}}\,dx.$$

Интеграл слева является элементарным, когда r целое число, и тогда интеграл справа можно вычислить в элементарных функциях.

[1] Вместо $A < \pi$.

11.15. Формулы (D) представляют собой эвристическую теорию преобразований Фурье, которая, естественно, справедлива только при очень ограничительных условиях.

Предположим, к примеру, что $\lambda(u)$ — целая функция и что

$$\lambda(1) = \lambda(3) = \lambda(5) = \ldots = 0, \tag{11.15.1}$$

поэтому

$$\Lambda(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \lambda(n)}{n!} x^n = \sum_0^\infty \frac{\lambda(2m)}{2m!} x^{2m} \tag{11.15.2}$$

четная, и пусть

$$\lambda_1(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1+u) \cos \frac{1}{2} u\pi \, \lambda(-u-1). \tag{11.15.3}$$

Тогда $\lambda_1(u)$ — тоже целая функция, поскольку полюса $\Gamma(1+u)$ в точках -1, -3, ... взаимно сокращаются с нулями $\cos \frac{1}{2} u\pi$, а полюса -2, -4, ... с нулями $\lambda(-u-1)$, и

$$\lambda_1(1) = \lambda_1(3) = \lambda_1(5) = \ldots = 0. \tag{11.15.4}$$

Также

$$\lambda_1(2m) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2m! \lambda(-2m-1)$$

и

$$\lambda_1(-2m-1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda(2m) \lim_{\varepsilon \to 0} \{\Gamma(-2m+\varepsilon) \cos \tfrac{1}{2}(2m+1-\varepsilon)\pi\} = (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda(2m)}{2m!}.$$

Следовательно, если мы запишем

$$M(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_0^\infty (-1)^m \lambda(-2m-1) x^{2m}$$

и обозначим через Λ_1, M_1 функции, образованные из λ_1, также как Λ, M образованы из λ, тогда

$$\Lambda_1(x) = M(x), \quad M_1(x) = \Lambda(x);$$

и (D1), и соответствующая формула с λ_1 принимают вид

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Lambda(x)\cos yx\,dx = M(y), \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty M(x)\cos yx\,dx = \Lambda(y).$$

Это обычные формулы косинус-преобразования Фурье. Если мы предположим, вместо (11.15.1), что

$$\lambda(0) = \lambda(2) = \lambda(4) = \ldots = 0,$$

и определим $\lambda_1(u)$ формулой

$$\lambda_1(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1+u)\sin\frac{1}{2}u\pi\lambda(-u-1),$$

то аналогично придем к синус-преобразованию.

Таким образом,

$$\lambda(u) = \frac{2^{u/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2-u/2)} = 2^{-1-u/2}\frac{\Gamma(-u/2)}{\Gamma(-u)}$$

удовлетворяет условиям (11.15.1). В этом случае

$$\lambda_1(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1+u)\cos\frac{1}{2}u\pi\cdot\frac{2^{-1/2+u/2}\Gamma(1/2+u/2)}{\Gamma(1+u)}=\frac{2^{u/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2-u/2)}=\lambda(u)$$

и

$$\Lambda(x) = M(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^m}{m!}\Big(\frac{1}{2}x^2\Big)^m = e^{-x^2/2}.$$

Формулы выражают свойство «самодвойственности» $e^{-x^2/2}$.

С другой стороны, существуют многие известные взаимодействия, которые не выражаются таким образом. Так,

$$\int_0^\infty e^{-y}\cos yx\,dx = \frac{1}{1+y^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos yx}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi e^{-|y|}. \tag{11.15.5}$$

Первая из формул является (когда $|y|<1$) вариантом формулы (D1), с $\lambda(u)=1$, но тогда

$$\lambda_1(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1+u)\cos\frac{1}{2}u\pi$$

не является целой функцией, поэтому мы не можем получить такое же выражение для второй формулы (что очевидно, поскольку $e^{-|y|}$ не раскладывается в степенной ряд по y).

11.16. Я разработал теорию формул (D) в моей работе (**11**). Я сформулирую ее здесь в несколько более общей форме, принадлежащей Ф. М. Гудспиду (Mr. F. M. Goodspeed), получение формулы (11.15.5) связано с его теорией.

Предположим, что $\chi(u)$ — целая функция и что

$$\left|\frac{\chi(u)}{2^{|v|/2}\Gamma(|v|/2+iw/2)}\right| < Ce^{P|v|+A|w|}, \tag{11.16.1}$$

где $A<\pi$ при всех u. Тогда из теоремы Коши следует, что

$$\Lambda(x)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n\chi(n)}{2^{n/2}\Gamma(n/2+1/2)}x^n = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi u}\frac{x^u\chi(u)}{2^{u/2}\Gamma(u/2+1/2)}\,du, \tag{11.16.2}$$

когда

$$-1<c<0, \quad 0<x<e^{-P}$$

и ряд сходится. Интеграл равномерно сходится в любом интервале $0<\delta\leqslant x\leqslant\Delta<\infty$, поэтому $\Lambda(x)$ регулярна при всех положительных x.

Если теперь $y>0$, то

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Lambda(x)\cos yx\,dx &= \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos yx\,dx\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi u}\frac{x^u\chi(u)}{2^{u/2}\Gamma(u/2+1/2)}\,du = \\ = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi u}\frac{\chi(u)}{2^{u/2}\Gamma(u/2+1/2)}\,du\int_0^\infty x^u\cos yx\,dx. &\end{aligned} \tag{11.16.3}$$

Проверка справедливости инверсии не вполне тривиальна, но следует по тому же пути, что и обсуждение того же вопроса в (**11**).

Теперь

$$\int_0^\infty x^u \cos yx\, dx = \Gamma(u+1)\cos\tfrac{1}{2}(u+1)\pi y^{-u-1}.$$

Если мы подставим это значение в (11.16.3) и упростим с помощью формулы удвоения для гамма-функции, то получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Lambda(x)\cos yx\, dx = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi u} 2^{u/2+1/2}\frac{y^{-u-1}\chi(u)}{\Gamma(-u/2)}\, du =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi u}\frac{y^u \chi(-u-1)}{2^{u/2}\Gamma(1/2+u/2)}\, du$$

(с другим c, но по-прежнему с $-1 < c < 0$). Этот интеграл вновь может быть вычислен по теореме Коши, с результатом

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Lambda(x)\cos yx\, dx = M(y), \tag{11.16.4}$$

где

$$M(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \chi(-n-1)}{2^{n/2}\Gamma(n/2+1/2)} x^n. \tag{11.16.5}$$

Этот ряд также является сходящимся при $0 < x < e^{-P}$, и $M(x)$ регулярна при всех положительных x. И из симметрии рассуждений очевидно, что

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty M(x)\cos yx\, dx = \Lambda(y). \tag{11.16.6}$$

11.17. Собственные формулы Рамануджана для косинус-преобразований являются несколько менее общими. Если мы запишем

$$\frac{\chi(u)}{2^{u/2}\Gamma(u/2+1/2)} = \frac{\lambda(u)}{\Gamma(u+1)}$$

или

$$\chi(u) = \frac{2^{-u/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(u/2+1)}\lambda(u)$$

и предположим, что $\lambda(u)$ удовлетворяет условиям (11.15.1), тогда мы получаем, что формулы § 11.16 сводятся к формулам § 11.15. «Порядки» условий эквивалентны. В анализе § 11.16 используется преимущество симметрии, и он является более общим в двух отношениях. В первую очередь, предположение, что $\chi(u)$ является целой функцией, является менее ограничивающим, чем предположение, что $\lambda(u)$ — целая функция, поскольку оно позволяет функции $\lambda(u)$ иметь полюса при $u = -2, -4, \ldots$ Более важно, что в § 11.15 и $\Lambda(x)$, и $M(x)$ являются четными и аналитическими функциями, регулярными в начале координат, а в § 11.16 они определены в виде степенных рядов только для положительных x, а затем продолжены на отрицательные значения x с помощью четности[1].

Таким образом, если мы положим

$$\chi(u) = \frac{2^{u/2}\Gamma(u/2+1/2)}{\Gamma(u+1)},$$

то

$$\Lambda(x) = e^{-x}, \quad M(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}$$

при $x > 0$. Условия § 11.16 выполнены, и если мы определим $\Lambda(x)$ и $M(x)$ при $x < 0$ с помощью четности, то получим формулу (11.15.5).

Если мы положим

$$\chi(u) = 1,$$

то получим

$$\Lambda(x) = M(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2^{n/2}\Gamma(n/2+1/2)}x^n$$

[1] В (D1) мы оказываемся в промежуточной ситуации. Если мы запишем формулу в виде

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Lambda(x)\cos yx\,dx = M(y),$$

то $\Lambda(x)$ определяется как $\Lambda(x)$ из § 11.16, но $M(y)$ регулярна в начале координат. В § 11.15 мы делаем соотношение симметричным с помощью конкретизации.

при $x > 0$, и применимы те же самые замечания. Эта $\Lambda(x)$, которую также можно представить в виде

$$1 - xe^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-t^2/2}\, dt = \int_0^\infty e^{-w^2/2 - xw} w\, dw,$$

является одним из примеров «самодвойственных» функций, полученных Харди и Титчмаршем.

Наконец, выбор

$$\chi(u) = \frac{\pi 2^{-u}}{\Gamma(1/2 - u/2)\Gamma(1 + u/2)}$$

приводит к

$$\Lambda(x) = M(x) = e^{-x^2/2}.$$

Этот случай рассматривался в § 11.15.

11.18. Я сказал в моей вводной лекции, что Рамануджан был знаком с большинством формальных идей, которые лежат в основе недавней работы Ватсона, Титчмарша и моей по «ядрам Фурье» и «самодвойственным функциям». Здесь мы сталкиваемся с таким случаем.

Очевидно, что необходимые и достаточные условия для того, чтобы $\Lambda(x)$ из § 11.16 была самодвойственной, имеют вид

$$\chi(u) = \chi(-u - 1). \tag{11.18.1}$$

Если мы запишем

$$\psi(u) = \pi^{-1}\Gamma\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u\Big)\Gamma\Big(1 - \frac{1}{2}u\Big)\chi(-u), \tag{11.18.2}$$

то (11.18.1) принимает вид

$$\psi(u) = \psi(1 - u). \tag{11.18.3}$$

Интегральное выражение для $\Lambda(x)$ имеет вид

$$\Lambda(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi u} \frac{x^u \chi(u)}{2^{u/2}\Gamma(u/2 + 1/2)}\, du.$$

Если мы заменим u на $-u$, подставим вместо $\chi(-u)$ выражение из (11.18.2) и произведем некоторые простые упрощения, то получим

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{u/2-1}\Gamma\Big(\frac{1}{2}u\Big)x^{-u}\psi(u)\,du, \tag{11.18.4}$$

т. е. (за исключением числового множителя) формулу для самодвойственных функций, полученную Титчмаршем и мной.

Все это имеет аналоги в теории «общих преобразований», но я отложу их обсуждение на конец лекции.

Формула (E)

11.19. Мы можем записать (E) в виде

$$\int\limits_0^\infty \Lambda(x)M(x)\,dx = \sum_0^\infty (-1)^n\lambda(-n-1)\mu(n), \tag{11.19.1}$$

где $\Lambda(x)$ и $M(x)$ – два бесконечных ряда в подынтегральном выражении для (E). Мы можем также рассмотреть более общую формулу

$$\int\limits_0^\infty \Lambda(x)M(x)x^{s-1}\,dx = \sum_0^\infty (-1)^n\frac{\Gamma(s+n)}{n!}\lambda(-n-s)\mu(n) =$$

$$= \Gamma(s)\Big\{\lambda(-s)\mu(0) - \frac{s}{1}\lambda(-s-1)\mu(1) + \frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\lambda(-s-2)\mu(2) - \ldots\Big\}. \tag{11.19.2}$$

Мы можем формально вывести (11.19.2) из (B), записав

$$\int\limits_0^\infty \Lambda(x)M(x)x^{s-1}\,dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\mu(n)\int\limits_0^\infty \Lambda(x)x^{n+s-1}\,dx =$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n\frac{\Gamma(s+n)}{n!}\lambda(-s-n)\mu(n),$$

и существуют несколько случаев, в которых справедливость этой процедуры можно подтвердить. Однако все они имеют чрезвычайно особый характер, и Рамануджан, похоже, использовал другие рассуждения даже когда $M(x)$ равна $\cos yx$, когда этот способ доказательства вряд ли применим. В этом случае

$$\mu(2m) = (-1)^m y^{2m}, \quad \mu(2m+1) = 0,$$

и (11.19.1) сводится к (D1).

Формула принимает более простой вид, если ее записать в обозначениях § 11.4. Тогда

$$\phi(u) = \frac{\lambda(u)}{\Gamma(1+u)}, \quad \psi(u) = \frac{\mu(u)}{\Gamma(1+u)}$$

и $\Phi(x)$ определена так же, как в § 11.4, и аналогично $\Psi(x)$, и (11.19.2) принимает вид

$$\int_0^\infty \Phi(x)\Psi(x)x^{s-1}\,dx = \frac{\pi}{\sin s\pi}\sum_0^\infty \phi(-n-s)\psi(n). \tag{11.19.3}$$

Эта формула имеет более простой вид, но может ввести в заблуждения, и (11.19.2) действительно лучше в качестве стандартной формы. Можно понять это, рассмотрев наиболее очевидные частные случаи.

Если мы возьмем

$$\lambda(u) = \alpha^u, \quad \mu(u) = \beta^u,$$

где $0 < \beta < \alpha$, в (11.19.2), мы получим формулу

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)x}x^{s-1}\,dx = \Gamma(s)\Big\{\alpha^{-s} - \frac{s}{1}\alpha^{-s-1}\beta + \frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\alpha^{-s-2}\beta^2 + \dots\Big\} = \frac{\Gamma(s)}{(\alpha+\beta)^s},$$

верную при всех положительных s. Но если мы положим $\phi(u) = \alpha^u$, $\psi(u) = \beta^u$ в (11.19.3), то получим формулу

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+\alpha x)(1+\beta x)} = \frac{\pi}{\sin s\pi}(\alpha^{-s} + \alpha^{-s-1}\beta + \alpha^{-s-2}\beta^2 + \dots) = \frac{\pi}{\sin s\pi}\frac{\alpha^{1-s}}{\alpha-\beta},$$

которая всегда неверна.

Правильная формула имеет вид

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+\alpha x)(1+\beta x)} = \frac{\pi}{\sin s\pi}\,\frac{\alpha^{1-s}-\beta^{1-s}}{\alpha-\beta},$$

которая верна при $0 < s < 2$. Мы можем записать правую часть в виде

$$\frac{\pi}{\sin s\pi}(\alpha^{-s}+\alpha^{-s-1}\beta+\alpha^{-s-2}\beta^2+\ldots-\alpha^{-1}\beta^{1-s}-\alpha^{-2}\beta^{2-s}-\ldots) =$$

$$= \frac{\pi}{\sin s\pi}\{\phi(-s)\psi(0)+\phi(-s-1)\psi(1)+\ldots-\phi(-1)\psi(1-s)-\phi(-2)\psi(2-s)-\ldots\}.$$

Здесь мы имеем два ряда вместо одного, и фактически, как мы сейчас увидим, «правильная» формула для общего интеграла — это не (11.19.3), а

$$\int_0^\infty \Phi(x)\Psi(x)x^{s-1}dx = \frac{\pi}{\sin s\pi}\left\{\sum_0^\infty \phi(-n-s)\psi(n) - \sum_0^\infty \phi(-n-1)\psi(n+1-s)\right\}. \tag{11.19.4}$$

Она сводится к (11.19.3), когда $\phi(u)$ обращается в нуль в точках $u = -1$, -2, ..., как, например,

$$\phi(u) = \frac{\alpha^u}{\Gamma(1+u)}.$$

Следовательно, лучше работать с формулой (11.19.2). Я лишь отмечу связь этой формулы со стандартными формулами из теории преобразований Меллина. Существует строгое исследование этого вопроса в неопубликованной работе Гудспида.

11.20. Мы можем рассматривать (11.19.2) как форму теоремы «Парсеваля» для преобразований Меллина. Эта теорема утверждает, что если

$$f(x) = \int_0^\infty F(x)x^{s-1}\,dx, \quad g(s) = \int_0^\infty G(x)x^{s-1}\,dx, \tag{11.20.1}$$

то, при определенных условиях,

$$\int_0^\infty F(x)G(x)x^{s-1}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(u)g(s-u)\,du. \tag{11.20.2}$$

Теперь при определенных условиях, которые мы подробно рассматривали в § 11.4, мы имеем

$$\int_0^\infty \Lambda(x)x^{s-1}\,dx = \Gamma(s)\lambda(-s), \quad \int_0^\infty M(x)x^{s-1}\,dx = \Gamma(s)\mu(-s), \quad (11.20.3)$$

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(u)\lambda(-u)x^{-u}\,du, \quad M(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(u)\mu(-u)x^{-u}\,du. \quad (11.20.4)$$

Фактически, формулы (11.20.3) — это варианты формулы (B), и если мы запишем

$$\phi(u) = \frac{\lambda(u)}{\Gamma(1+u)}, \quad \psi(u) = \frac{\mu(u)}{\Gamma(1+u)},$$

то формулы (11.20.4) становятся вариантами формулы (11.4.4).

Выбирая $F(x) = \Lambda(x)$, $G(x) = M(x)$ в (11.20.1), получаем из (11.20.2)

$$\int_0^\infty F(x)G(x)x^{s-1}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(u)\Gamma(s-u)\lambda(-u)\mu(u-s)\,du.$$

Если это верно при k между 0 и σ, то последний интеграл, вычисляемый с помощью вычетов в правой части, равен

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\Gamma(s+n)\lambda(-s-n)\mu(n),$$

и мы получаем (11.19.2). Разумеется, необходимо тщательно проверить все рассуждения.

Если мы рассматриваем ϕ и ψ вместо λ и μ, то имеем

$$\int_0^\infty \Phi(x)x^{s-1}\,dx = \frac{\pi}{\sin s\pi}\phi(-s), \quad \int_0^\infty \Psi(x)x^{s-1}\,dx = \frac{\pi}{\sin s\pi}\psi(-s),$$

$$\int_0^\infty \Phi(x)\Psi(x)x^{s-1}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\pi}{\sin u\pi}\frac{\pi}{\sin(s-u)\pi}\phi(-u)\psi(u-s)\,du,$$

и когда мы вычисляем этот интеграл с помощью вычетов, то приходим к (11.19.4). И только когда $\phi(u)$ обращается в нуль в отрицательных целых значениях u, только тогда наша предыдущая формула (11.19.3) верна.

11.21. Формула (11.19.2) представляет собой очень сильный инструмент для вычисления определенных интегралов. Если, к примеру,

$$\lambda(u) = \frac{1}{\Gamma(a+1+u)}\Big(\frac{1}{2}\alpha\Big)^{2u}, \quad \mu(u) = \frac{1}{\Gamma(b+1+u)}\Big(\frac{1}{2}\beta\Big)^{2u},$$

то

$$\Lambda(x) = 2^a\alpha^{-a}x^{-a/2}J_a(\alpha\sqrt{x}), \quad M(x) = 2^b\beta^{-b}x^{-b/2}J_b(\beta\sqrt{x}).$$

Формула сводится после нескольких тривиальных преобразований[1] к формуле

$$\int_0^\infty J_a(\alpha x)J_b(\beta x)x^{s-1}\,dx = 2^{s-1}\alpha^{-s-b}\beta^b\frac{\Gamma(s/2+a/2+b/2)}{\Gamma(b+1)\Gamma(1-s/2-a/2-b/2)}\times$$

$$\times F\Big(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b,\ \frac{1}{2}s-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b,\ b+1,\ \frac{\beta^2}{\alpha^2}\Big),$$

которая верна, когда $0 < \beta < \alpha$ и интеграл сходится[2].

Формулы (F)

11.22. Последняя группа формул содержит дальнейшее подтверждение моего утверждения, приведенного в начале § 11.18. Я буду рассматривать их, как и Рамануджан, просто как формулы и ничего не скажу здесь об условиях, при которых они верны. Предположим, что в наших предыдущих обозначениях

$$\lambda(u) = \alpha^u p(u), \quad \mu(u) = \beta^u q(u),$$

где $0 < \beta < \alpha$ и

$$p(u)q(-u-1) = 1.$$

---

[1] x^2 вместо x, $\frac{1}{2}(s+a+b)$ вместо s.

[2] Т. е. если $-a-b < s < 2$.

Тогда

$$\Lambda(x) = F(\alpha x), \quad M(x) = G(\beta x),$$

где

$$F(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} p(n) x^n, \quad G(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} q(n) x^n,$$

и из (11.19.2) получаем

$$\int_0^\infty F(\alpha x) G(\beta x)\, dx = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\beta^n}{\alpha^{n+1}} = \frac{1}{\alpha+\beta}. \tag{11.22.1}$$

Например, решением интегрального уравнения будет

$$F(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n!} \cos(c\sqrt{n}) x^n, \quad G(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^n}{\operatorname{ch}\{c\sqrt{n+1}\}}.$$

Теперь

$$\int_0^\infty \alpha^{s-1}\, d\alpha \int_0^\infty F(\alpha x) G(\beta x)\, dx = \int_0^\infty G(\beta x)\, dx \int_0^\infty F(\alpha x) \alpha^{s-1}\, d\alpha =$$

$$= f(s) \int_0^\infty x^{-s} G(\beta x)\, dx = \beta^{s-1} f(s) g(1-s),$$

где $f(s)$ и $g(s)$ определены согласно (F2). Поскольку первый интеграл здесь равен

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{s-1}}{\alpha+\beta}\, d\alpha = \frac{\pi}{\sin s\pi} \beta^{s-1},$$

мы получаем (F3).

Теперь я напомню некоторые фундаментальные формулы теории «ядер Фурье». Если $K(x)$ — ядро Фурье, т. е. если из

$$\int_0^\infty A(x) K(xy)\, dx = B(y) \tag{11.22.2}$$

следует

$$\int_0^\infty B(x)K(xy)\,dx = A(y) \tag{11.22.3}$$

для «произвольной» $A(x)$ и

$$k(s) = \int_0^\infty K(x)x^{s-1}\,dx,$$

тогда

$$k(s)k(1-s) = 1. \tag{11.22.4}$$

Более обще, если из (11.22.2) следует

$$\int_0^\infty B(x)H(xy)\,dx = A(y) \tag{11.22.5}$$

и $h(s)$ определено подобно $k(s)$, то

$$k(s)h(1-s) = 1. \tag{11.22.6}$$

Я думаю, Рамануджан никогда не записывал именно этих уравнений, но (F4) и (F5) формально почти то же самое. Так, если

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{F(xi) + F(-xi)\}, \quad H(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{G(xi) + G(-xi)\},$$

то

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\{\int_0^\infty F(xi)x^{s-1}\,dx + \int_0^\infty F(-xi)x^{s-1}\,dx\Big\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{i^{-s} + (-i)^{-s}\}f(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{1}{2}s\pi f(s)$$

и, аналогично,

$$h(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{1}{2}s\pi g(s),$$

поэтому (11.22.6) превращается в (F3).

Все это было, естественно, простым формализмом в руках Рамануджана. Переход к правильному анализу требует идей, выходящих за пределы его кругозора, теории Планшереля (Plancherel) и обобщений Ватсона. Но формальный базис необходим в качестве основания для всех этих теорий, и им Рамануджан овладел.

11.23. Я завершу лекцию некоторыми замечаниями по теме, о которой я упомянул в § 11.18, об обобщении формул (D) на теорию «общих преобразований».

Предположим, что

$$k(s) = \frac{\kappa(s)}{\kappa(1-s)}, \tag{11.23.1}$$

т. е. (11.22.4) обращается в тождество. Тогда

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} k(u) x^{-u}\, du$$

является ядром Фурье с преобразованием Меллина $k(s)$.

Если мы начнем с формулы

$$R(x) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{r(n)}{\kappa(n+1)} x^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin u\pi} \frac{r(-u)}{\kappa(1-u)} x^{-u}\, du$$

и продолжим рассуждения по схеме из § 11.16, то получим

$$\int_0^\infty R(x)K(xy)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin u\pi} \frac{r(-u)}{\kappa(1-u)}\, du \int_0^\infty K(xy) x^{-u}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin u\pi} \frac{r(-u)}{\kappa(1-u)} k(1-u) y^{u-1}\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi}{\sin u\pi} \frac{r(-u)}{\kappa(u)} y^{u-1}\, du = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{r(-n-1)}{\kappa(n+1)} y^n,$$

поэтому

$$R(x)=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{r(n)}{\kappa(n+1)}x^n,\quad S(x)=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{r(-n-1)}{\kappa(n+1)}x^n \tag{11.23.2}$$

являются парой «K-преобразований», удовлетворяющих

$$\int_0^\infty R(x)K(xy)\,dx=S(y),\quad \int_0^\infty S(x)K(xy)\,dx=R(y). \tag{11.23.3}$$

Условие «самодвойственности» $R(x)$ имеет следующий вид:

$$r(u)=r(-u-1).$$

Таким образом, если

$$K(x)=\sqrt{x}J_\nu(x),$$

то

$$k(s)=2^{s-1/2}\frac{\Gamma(s/2+\nu/2+1/4)}{\Gamma(\nu/2+3/4-s/2)}$$

и мы можем положить

$$\kappa(s)=2^{s/2}\Gamma\Big(\frac12 s+\frac12\nu+\frac14\Big).$$

Тогда

$$R(x)=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{r(n)}{\Gamma(n/2+\nu/2+3/4)}2^{-n/2}x^n$$

и

$$S(x)=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{r(-n-1)}{\Gamma(n/2+\nu/2+3/4)}2^{-n/2}x^n$$

являются парой преобразований Ханкеля.

Если

$$K(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1-x^2},$$

то

$$k(s)=\operatorname{ctg}\frac12 s\pi$$

и мы можем положить

$$\kappa(s) = \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}s\pi.$$

В этом случае

$$R(x) = \sum_0^\infty (-1)^n r(2n)x^{2n}, \quad S(x) = \sum_0^\infty (-1)^n r(-2n-1)x^{2n},$$

интегралы (11.23.3) являются главными значениями. Если $r(u) = 1$, то

$$R(x) = S(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

и можно получить другие простые рациональные функции, самодвойственные для $K(x)$, выбрав в качестве $r(u)$ подходящий полином. Здесь я тоже должен ограничиться лишь наброском теории, добавив только, что весь анализ § 11.22–23 также был выполнен Гудспидом.

Комментарии к лекции XI

§ 11.2. Цитата из Литтлвуда взята из его обзора *Сборника трудов*.

§ 11.3. Теорема Карлсона доказана в книге Титчмарша *Theory of functions*, 185–186.

Эту теорему обобщали различными способами. Во-первых, мы можем ослабить условие на порядок $\phi(u)$ и также можем заменить условия

$$\phi(0) = \phi(1) = \ldots = 0$$

более общими условиями типа $\phi(\lambda_n) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Наиболее общую теорему такого рода мне сообщил Н. Левинсон (Mr. N. Levinson), она имеет вид *если* (i) $\phi(u)$ – *регулярная функция и* $O(e^{A|u|})$ *при некоторых* A *в правой полуплоскости*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |\phi(iw)| - \pi|w|}{1+w^2}\, dw = -\infty, \tag{ii}$$

$$\phi(\lambda_n) = 0, \tag{iii}$$

где λ_n – *возрастающая последовательность положительных чисел такая, что*

$$\lambda_n < Bn, \quad \sum_{n \leqslant R} \frac{1}{\lambda_n} > \log R - C$$

для некоторых B *и* C, *то* $\phi(u) = 0$.

§ 11.4. Обсуждение формулы Меллина см. в Титчмарш *Fourier integrals*, 7–9 и 46–48.

Доказательство (A) дается по работе Харди *Acta Math.* 42 (1920), 327–339. Условия на $\phi(u)$ здесь также можно ослабить, например,

$$\phi(u) = O(e^{A|u|}) \quad (\text{для некоторого } A), \quad \phi(iw) = O(|w|^{-2} e^{\pi|w|}).$$

Гудспид в неопубликованной работе доказал «λ_n» обобщение (A). *Если* $u = v + iw$

$$0 < \lambda_n < \lambda_{n+1}, \quad 0 < An \leqslant \lambda_n \leqslant Bn, \quad g(u) = \prod_1^\infty \Big(1 - \frac{u^2}{\lambda_n^2}\Big),$$

и $f(u)$ *принадлежит* $\mathscr{R}(C, D, \delta)$, *где* $C < \pi/B$ *и* $\delta > 0$ *для некоторых* D, *то ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{f(\lambda_n)}{g'(\lambda_n)} x^{\lambda_n}$$

сходится при подходящей группировке слагаемых при достаточно малых x *и представляет собой аналитическую функцию* $H(x)$, *регулярную для всех положительных* x, *и*

$$\int_0^\infty x^{s-1} H(x)\, dx = \frac{f(-s)}{g(s)}$$

при $0 < s < \delta$. *Если также* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$, *то ряд сходится в обычном смысле.*

§ 11.6. Связь (B) с интерполяционной формулой Ньютона указана Нараяном Айяром (**2**).

Теорию формулы Ньютона см. в книге Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, 222, *et. scr.* В книге Уиттекера и Робинсона *Calculus of observations* приводится много полезной информации, но без использования теории функций.

Доказательство возможности почленного интегрирования см. в Харди *Trans. Camb. Phil. Soc.* 21 (1912), 1–48, (5–6) и в *Messenger of Math.* 39 (1910), 136–139. Аналогичная теорема, связанная с выводом (A), приведена в конце параграфа.

§ 11.7. Анализ Рамануджана может быть продолжен, например, на случаи, в которых

$$\chi(z) = \sum c_r z^{p_r},$$

где $p_r \to \infty$, p_r не обязательно целые числа и конечное количество этих чисел могут быть отрицательными. Это обобщение содержит случай $\lambda(u) = e^{\alpha u}$ при всех вещественных α. Случай, фактически рассматривавшийся в

его анализе, формулируется следующим образом:

$$\lambda(u) = \frac{1}{a + e^u} \quad (0 < a < 1).$$

§ 11.8. Существует прямое доказательство формулы (iii) с помощью теоремы Коши в Харди (**5**).

Обсуждение формулы (iv) в М. Рис *Acta Math.* 40 (1916), 185–190, и в Харди и Литтлвуд *ibid* 41 (1917), 119–196 (156–162).

§ 11.9. Теорию рядов Лагранжа и Бурмана см., например, в Уиттекер и Ватсон *Modern analysis*, ed. 4 (1927), 128–133.

Наиболее полные результаты о разложении в ряды триномиальных уравнений см. в Биркеланд (Birkeland), *Math. Zeitschrift*, 26 (1927), 566–578. Биркеланд приводит полные ссылки на исходные работы Меллина и других исследователей.

§ 11.10–13. Суть доказательства взята из Харди (**3**), но рассуждения Рамануджана из § 11.11 ранее не публиковались.

Формула обращения Лапласа, использованная в § 11.10, является еще одним формальным вариантом формулы Фурье, см. Титчмарш *Fourier integrals*, 6-7 и 48–49.

Прямое доказательство формулы Планы с помощью теоремы Коши см. в Линделёф *Le Calcul des résidus*, 55–62.

§ 11.15–18. См. Харди (**11**) и Гудспид (**1**). Предпоследний пример § 11.17 взят из Харди и Титчмарш *Quarterly Journal of Math.* (Оксфорд), 1 (1930), 196–231, (210), и (11.18.4) см. на стр. 198 той же работы.

§ 11.19–20. Любопытно, что Рамануджан, похоже, никогда не получал (11.19.2) или даже (11.19.1) в общем виде. В записных книжках и отчетах одна из функций всегда четна.

Обсуждение формулы Парсеваля для преобразования Меллина см. в книге Титчмарш *Fourier integrals*, 94–95. Здесь $s = \sigma + it$, $0 < k < \sigma$ и $x^k F$ и $x^{\sigma-k} G$ принадлежат $L^2(0, \infty)$. Интегралы (11.20.1) являются «среднеквадратичными» интегралами, и (11.20.2) верна в обычном смысле для всех s с вещественной частью, равной σ.

Гудспид, используя метод, подобный методу из § 11.4, доказал, что (11.19.4) *верна, когда*

(1) $\phi(u)$ *целая функция и принадлежит* $\mathscr{R}(A, B, \eta)$, *где* $A < \pi$, *для некоторых* B *и любого положительного* η;

(2) $\psi(u)$ *принадлежит* $\mathscr{R}(C, D, \delta)$, *где* $C < \pi$, *для некоторых* D, *и* δ *не меньше* 1;

(3) $$0 < s < 2;$$

(4) $$\phi(-u - s)\psi(u) = o(e^{E|w|}),$$

где $E < 2\pi$ *равномерно по* w, *когда* $v \to \infty$.

Следует отметить, что $\phi(u)$ встречается в теореме с аргументами n, $-n-s$ и $-n-1$, а $\psi(u)$ — с аргументами n и $n+1-s$. Следовательно, условия, что $\phi(u)$ — целая и $\psi(u)$ — регулярная при $\sigma > -1$, являются естественными.

§ 11.21. См. замечания в конце § 11.5. В этом случае все $\lambda(u)$ и $\mu(u)$ приближенно ведут себя как $e^{i\pi|w|}$, и все $\phi(u)$ и $\psi(u)$ — приближенно как $e^{\pi|w|}$ в направлении мнимой оси. И последний интеграл не обязательно является абсолютно сходящимся. Не сложно проверить справедливость преобразований в том или ином конкретном случае.

Интеграл впервые был вычислен Вебером и Шафхайтлином (Weber and Schafheitlin): см. Ватсон Bessel functions, 398–410.

§ 11.22 Теорию «ядер Фурье» и «общих преобразований» см. в Харди и Титчмарш Proc. London Math. Soc. (2), 35 (1933), 116–155, Ватсон *ibid* 156–199 или Титчмарш *Fourier integrals*, гл. VIII.

Эта тема привлекла довольно много внимания со времен опубликования работы Ватсона. Полный список ссылок, вплоть до 1937 года, см. в книге Титчмарша.

§ 11.23. Гудспид доказал, что *если* $\kappa(u)$ *вещественна на вещественной оси и двойственна функции, регулярной при* $v \geqslant -\delta$, *где* δ *— положительное число,* $r(u)$ *— целая функция и*

$$\frac{r(u)}{\kappa(1+u)}, \quad \frac{r(-1-u)}{\kappa(1+u)}$$

принадлежат классам $\mathscr{R}(A, B, \delta)$ *и* $\mathscr{R}(C, D, \delta)$ *с* $A < \pi$ *и* $C < \pi$, *то* $k(s)$ *определяет преобразование Ватсона, в котором* $R(x)$ *и* $S(x)$ *двойственны.*

Лекция XII
Эллиптические и модулярные функции

12.1. Я собираюсь закончить книгу рассказом о работах Рамануджана по теории эллиптических и модулярных функций, и это для меня самая сложная задача. В этой области и глубина, и ограниченность знаний Рамануджана проявились наиболее ярко, и очень сложно определить, что он открыл самостоятельно, а что почерпнул из других источников. Кроме того, я не являюсь специалистом в этой теории.

Рамануджан никогда не утверждал, что он сделал какое-либо большое открытие в общей теории эллиптических функций и, похоже, что он где-то изучил основы теории из книг настолько, насколько он был заинтересован в них. В этом заключается яркое различие между его отношением к этой теории и его отношением к теории простых чисел, где он с определенностью утверждал, что все его результаты получены им самим. Он никогда не писал, что он *изобрел* тета-функции или модулярные уравнения, хотя он полностью излагает эту теорию в своих собственных обозначениях. В библиотеке Мадрасского университета имелись книги Кэйли и Гринхилла, и он мог многое узнать из них. Действительно, Литтлвуд говорит, что «Рамануджан каким-то образом приобрел, в сущности, полные знания о формальной стороне теории эллиптических функций» и его незнание теории функций комплексного переменного и теоремы Коши кажется странным в сочетании с этим, а затем добавляет, что «достаточным и, по-моему мнению, необходимым объяснением будет то, что его учебником была очень странная и специфическая книга Гринхилла *Эллиптические функции*». В книге Гринхилла комплексные переменные и двоякопериодичность не упоминаются до 254 страницы, и двоякопериодичность каким-то образом выводится из свойств декартовых овалов. Фактически, Гринхилл знал лишь немногим больше «теории функций», чем Рамануджан.

Как я уже говорил, я не являюсь экспертом в этом вопросе и буду очень сильно опираться в последующем на работы профессора Ватсона. Во-первых, на его лекцию в Лондонском математическом обществе, которая содержит краткое изложение соответствующих глав из записных

книжек Рамануджана. Во-вторых, он передал мне рукопись, содержащую доказательства почти всех формул Рамануджана, без которой моя работа очень много бы потеряла.

12.2. Соответствующие главы имеют номера XVI–XXI, они, по мнению Ватсона, «показывают Рамануджана с его наилучшей стороны». XVI главу он начинает с функции

$$\Pi(a,\, b) = (1 + a)(1 + ab)(1 + ab^2)\ldots,$$

и вся его последующая работа основана на этой функции. Он получает целый ряд теорем, которые, в основном, можно найти у Эйлера, Гаусса, Хайне или в других книгах, хотя среди них есть такие, которые, похоже, являются новыми[1]. Я не буду ссылаться на эти формулы, за исключением тех случаев, когда это необходимо для моих текущей цели, которая заключается в поиске в записных книжках доказательства модулярных уравнений третьей степени.

Рамануджан также записал формулу

$$f(a,\, b) = 1 + (a + b) + ab(a^2 + b^2) + a^3b^3(a^3 + b^3) + \ldots$$

(показатели степени при ab являются треугольными числами). Таким образом, в классических обозначениях[2]

$$f(a,\, b) = \vartheta_3(v,\, \tau),$$

где

$$v = \frac{1}{4\pi i}\log\frac{a}{b}, \quad \tau = \frac{1}{2\pi i}\log ab,$$

или еще раз

$$f(a,\, b) = \rho(z,\, q),$$

где

$$\rho(z,\, q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n, \quad z = e^{2\pi i v} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}, \quad q = e^{\pi i \tau} = (ab)^{1/2}.$$

[1] Особенно 16.17 (в нумерации записных книжек), на которую я снова сошлюсь в § 12.12.

[2] Т. е. использованных в книге Таннери и Молка.

Рамануджан приводит фундаментальную формулу Якоби для разложения функции в следующем виде:

$$f(a,\,b) = \Pi(a,\,ab)\Pi(b,\,ab)\Pi(-ab,\,ab).$$

Наконец, он записывает[1]

$$\begin{aligned}
\phi(q) &= f(q,\,q) = 1 + 2q + 2q^4 + \ldots,\\
\psi(q) &= f(q,\,q^3) = 1 + q + q^3 + q^6 + \ldots,\\
f(-q) &= f(-q,\,-q^2) = 1 - q - q^2 + q^5 + \ldots,\\
\chi(q) &= \Pi(q,\,q^2) = (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\phi(q) = \vartheta_3(0,\,\tau).$$

Далее, если, в соответствии с Таннери и Молком, мы определим q_0, q_1, q_2 и q_3 следующим образом:

$$q_0 = \prod_1^\infty (1-q^{2n}),\ q_1 = \prod_1^\infty (1+q^{2n}),\ q_2 = \prod_1^\infty (1+q^{2n-1}),\ q_3 = \prod_1^\infty (1-q^{2n-1}),$$

тогда

$$\begin{aligned}
\chi(q) &= q_2,\\
f(-q) &= (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots = q_0 q_3,\\
\psi(q) &= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots} = \frac{q_0}{q_3}.
\end{aligned}$$

Последняя пара формул представляет собой знаменитые тождества Эйлера и Гаусса. Также имеем

$$\psi(q^2) = \frac{1}{2} q^{-1/2}\vartheta_2(0,\,\tau)$$

(эта формула нам понадобится в дальнейшем).

12.3. В этих обозначениях многие формулы возникают в странном измененном виде. Так, «теорема об обращении» (существует τ,

[1] Я заменил его x произвольным q.

соответствующее заданному k^2) имеет следующий вид. Запишем c вместо k^2, определим K и K' как определенные интегралы или гипергеометрические ряды и положим

$$e^{-\pi K'/K} = \Pi(c),$$

тогда уравнение

$$q = \Pi(c)$$

имеет решение

$$c = 1 - \frac{\phi^4(-q)}{\phi^4(q)}.$$

Далее, теорема

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$$

принимает следующий вид: если $q = e^{-y}$ и

$$S(\theta, y) = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}y} + \frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{\operatorname{sh}\frac{3}{2}y} + \ldots, \quad C(\theta, y) = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}y} + \frac{\cos\frac{3}{2}\theta}{\operatorname{ch}\frac{3}{2}y} + \ldots,$$

тогда

$$S^2 + C^2 = \tfrac{1}{4}k^2\phi^4(y).$$

Фактически,

$$S(\theta, y) = \frac{kK}{\pi}\operatorname{sn}\frac{K\theta}{\pi}, \quad C(\theta, y) = \frac{kK}{\pi}\operatorname{cn}\frac{K\theta}{\pi}$$

и

$$K = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2(0, \tau) = \tfrac{1}{2}\pi\phi^2(y).$$

Доказательства этих формул прямым возведением в квадрат рядов находятся в книгах Якоби *Fundamenta nova* и Эннепера *Elliptische Funktionen*.

Модулярное уравнение третьей степени

12.4. Модулярное уравнение степени n — это соотношение между модулями k и l, которое соответствует замене q на $q^{1/n}$,[1] т. е.

$$n\frac{L'}{L} = \frac{K'}{K}, \tag{12.4.1}$$

где K, K', L, L' — полные эллиптические интегралы с модулями k и l.

[1] Или на q^n, когда $L'/L = nK'/K$. См. § 12.7.

Рамануджан вывел свои модулярные уравнения из соотношений между своими функциями f, ϕ, ψ, т. е. из соотношений между ϑ-функциями.

$$\phi^2(q) - \phi^2(q^5) = 4qf(q, q^9)f(q^3, q^7),^1$$

и

$$\psi^2(q) - q\psi^2(q^5) = f(q, q^4)f(q^2, q^3).^2$$

Первая из них в традиционных обозначениях имеет вид

$$\vartheta_3^2(0, \tau) - \vartheta_3^2(0, 5\tau) = 4e^{\pi i\tau}\vartheta_3(-2\tau, 5\tau)\vartheta_3(-\tau, 5\tau).$$

Тождества доказаны «элементарными» методами, а весь процесс является «алгебраическим».

Я ограничусь обсуждением уравнения третьего порядка и начну с объяснения двух стандартных методов доказательства. Первый основан на прямом преобразовании интегралов и представляет версию Якоби исходного доказательства Лежандра. Второй метод получен намного позже Шрётером (Schröter) и во многом похож на метод Рамануджана.

12.5. Доказательство Якоби изложено во многих учебниках. Мы пытаемся найти решение уравнения

$$\frac{m\,dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}, \tag{12.5.1}$$

где

$$X = (1-x^2)(1-k^2x^2), \quad Y = (1-y^2)(1-l^2y^2), \quad 0 < k < 1, \quad 0 < l < 1,$$

выбирая

$$y = \frac{U}{V}, \tag{12.5.2}$$

где U и V — взаимно простые полиномы переменной x, чья степень не превосходит 3, y обращается в нуль одновременно с x и положительно при положительных x. Очевидно (поскольку y — нечетная функция переменной x), что

$$U = x(\alpha + \beta x^2), \quad V = \gamma + \delta x^2,$$

где α, β, γ, δ — константы.

[1] 19.10(iv).
[2] 19.10(v).

Далее,

$$m\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(1-y^2)(1-l^2y^2)}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} > 0$$

для малых x, поэтому m — положительное число, и $y = 1$, когда $x = 1$, поскольку иначе y будет иметь точку ветвления при $x = 1$. Затем, (12.5.1) и также (12.5.2) не изменятся, когда мы заменим x и y на $1/kx$ и $1/ly$, поэтому значения

$$y = 1,\ -1,\ \frac{1}{l},\ -\frac{1}{l}$$

соответствуют

$$x = 1,\ -1,\ \frac{1}{k},\ -\frac{1}{k}.$$

Поскольку

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{U'V - UV'}{\sqrt{(V^2-U^2)(V^2-l^2U^2)}}\,dx,$$

то имеем

$$(V^2-U^2)(V^2-l^2U^2) = T^2(1-x^2)(1-k^2x^2),$$

где T — уравнение четвертой степени, поэтому

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{U'V-UV'}{T\sqrt{X}}\,dx, \quad U'V - UV' = \frac{T}{m}.$$

Далее, поскольку никакие два из $V \perp U$, $V \perp lU$ не могут иметь общего множителя, имеем

$$V+U = (1+x)A^2, \qquad V+lU = (1+kx)C^2,$$
$$V-U = (1-x)B^2, \qquad V-lU = (1-kx)D^2,$$

где A, B, C, D — линейные. Следовательно (поскольку y — нечетная функция),

$$\frac{1-y}{1+y} = \frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1-cx}{1+cx}\right)^2$$

или

$$y = \frac{x(2c+1+c^2x^2)}{1+c(c+2)x^2}$$

при некоторых c. Уравнение должно оставаться тем же при замене x и y на $1/kx$ и $1/lu$, после чего оно принимает вид

$$y = \frac{kx}{l}\,\frac{c(c+2)+k^2x^2}{c^2+(2c+1)k^2x^2};$$

и поэтому

$$k^2 = \frac{c^3(c+2)}{2c+1}, \quad l^2 = c\Big(\frac{c+2}{2c+1}\Big)^3. \tag{12.5.3}$$

Исключая c, получим соотношение между k и l. Фактически,

$$k'^2 = 1-k^2 = \frac{(1+c)^3(1-c)}{2c+1}, \quad l'^2 = 1-l^2 = (1+c)\Big(\frac{1-c}{2c+1}\Big)^3 \tag{12.5.4}$$

и поэтому

$$\sqrt{kl}+\sqrt{k'l'} = \frac{c(c+2)}{2c+1}+\frac{(1+c)(1-c)}{2c+1} = 1, \tag{12.5.5}$$

когда выбраны подходящие значения корней. Это соотношение в виде Лежандра. Легко вывести соотношение в виде Якоби

$$u^4 - v^4 + 2uv(1-u^2v^2) = 0, \tag{12.5.6}$$

где $k = u^4$ и $l = v^4$.

Сравнивая значения x и y при малых x, получаем

$$m = \frac{1}{2c+1}. \tag{12.5.7}$$

12.6. Уравнения (12.5.3), (12.5.5) и (12.5.6) — фактически различные виды модулярного уравнения третьей степени, но, чтобы увидеть это, нам нужно показать, что они соответствуют (12.4.1) при $n = 3$, а также 12.5.1.

Легко увидеть[1], что если $0 < k^2 < 1$, то уравнение

$$k^2 = c^3\frac{c+2}{2c+1} \tag{12.6.1}$$

[1] С помощью «графических» соображений и уравнения

$$\frac{k^2}{l^2} = \Big(c\frac{2c+1}{c+2}\Big)^2.$$

по c имеет в точности два вещественных корня: один — между 0 и 1, а другой — между -2 и -1, и что в этих корнях $l^2 > k^2$ и $l^2 < k^2$ соответственно. Если в уравнениях (12.5.4) мы положим

$$\frac{1-c}{2c+1} = \gamma, \quad \frac{1-\gamma}{2\gamma+1} = c, \tag{12.6.2}$$

то

$$k'^2 = \gamma\Big(\frac{\gamma+2}{2\gamma+1}\Big)^3, \quad l'^2 = \gamma^3\frac{\gamma+2}{2\gamma+1}. \tag{12.6.3}$$

Из анализа, приведенного в § 12.5, следует, что

$$\frac{1}{m'}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-l'^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k'^2y^2)}}$$

при

$$m' = \frac{1}{2\gamma+1}.$$

Следовательно, интегрируя от 0 до 1,

$$\frac{L'}{m'} = K',$$

в то время как из (12.5.1) получаем

$$mL = K.$$

Таким образом,

$$\frac{L'}{L} = mm'\frac{K'}{K},$$

и необходимо только показать, что

$$mm' = \frac{1}{3}.$$

Но

$$mm' = \frac{1}{(2c+1)(2\gamma+1)}$$

и

$$2\gamma+1 = \frac{3}{2c+1}, \quad mm' = \frac{1}{3}$$

по формуле (12.6.2).

12.7. Уравнение (12.5.5) симметрично по k и l и соответствует

$$\frac{L'}{L} = n\frac{K'}{K}$$

(т. е. замене q на q^n), а также (12.4.1). Мы можем непосредственно установить это. Если мы положим

$$c = -\frac{c'+2}{2c'+1}, \quad c' = -\frac{c+2}{2c+1}$$

в (12.5.3), то получим

$$k^2 = c'\Big(\frac{c'+2}{2c'+1}\Big)^3, \quad l^2 = \frac{c'^3(c'+2)}{2c'+1},$$

т. е. (12.5.3) с c' вместо c и переставленными k и l. Также c' лежит между -2 и -1, когда c лежит между 0 и 1, и наоборот, поэтому c' является вторым корнем уравнения (12.6.1). Если γ' связано с c' так же, как γ с c, то

$$(1+2c)(1+2c') = -3, \quad (1+2\gamma)(1+2\gamma') = -3,$$

и поэтому

$$(1+2c')(1+2\gamma') = 3$$

и

$$\frac{L'}{L} = 3\frac{K'}{K}.$$

12.8. Второй метод доказательства основан на прямых действиях с тета-рядами. Уравнение (12.5.5) эквивалентно уравнению

$$\vartheta_3(0,\tau)\vartheta_3(0,3\tau) = \vartheta_4(0,\tau)\vartheta_4(0,3\tau) = \vartheta_2(0,\tau)\vartheta_2(0,3\tau) \qquad (12.8.1)$$

или уравнению

$$2\sum{}' q^{m^2+2n^2} = \sum q^{(\mu+1/2)^2+3(\nu+1/2)^2}, \qquad (12.8.2)$$

где $\sum$ означает суммирование по всем целым числам и $\sum'$ — по всем целым числам противоположной четности. Если мы теперь положим

$$m+n = u, \quad m-n = v$$

так, что

$$m^2+3n^2=\Big(\frac{u+v}{2}\Big)^2+3\Big(\frac{u-v}{2}\Big)^2=u^2-uv+v^2=\Big(u-\frac{1}{2}v\Big)^2+3\Big(\frac{1}{2}v\Big)^2,$$

тогда левая часть (12.8.2) принимает вид

$$2\sum_{u,\,v\ \text{нечетны}} q^{(u-v/2)^2+3(v/2)^2}.$$

Далее, если мы положим

$$u-\frac{1}{2}v=\mu+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}v=\nu+\frac{1}{2}$$

так, что

$$u=\mu+\nu+1,\quad v=2\nu+1,$$

и пусть μ и ν пробегают по всем числам противоположной четности, тогда u и v пробегают по всем нечетным числам, и поэтому

$$\sum_{u,\,v\ \text{нечетны}} q^{(u-v/2)^2+3(v/2)^2}=\sum{}' q^{(\mu+1/2)^2+3(\nu+1/2)^2},$$

где штрих имеет тот же смысл, что и раньше. Наконец, если

$$\mu'=-\mu-1,\quad \nu'=\nu,$$

то

$$\Big(\mu'+\frac{1}{2}\Big)^2+3\Big(\nu'+\frac{1}{2}\Big)^2=\Big(\mu+\frac{1}{2}\Big)^2+3\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)^2,$$

и μ' и ν' пробегают по всем числам одинаковой четности. Следовательно,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{(\mu+1/2)^2+3(\nu+1/2)^2}=2\sum{}' q^{(\mu+1/2)^2+3(\nu+1/2)^2}=2\sum{}' q^{m^2+3n^2},$$

что совпадает с (12.8.2).

12.9. Это доказательство во многом подобно доказательству, полученному Шрётером для уравнения этой и некоторых более высоких

степеней. Шрётер получил общее тождество

$$\vartheta_3(x,\,\alpha\tau)\vartheta_3(y,\,\beta\tau) = \sum_{r=1}^{\alpha+\beta-1} q^{\alpha r^2} e^{2rnix}\vartheta_3\{x+y+r\alpha\tau,\,(\alpha+\beta)\tau\}\times$$
$$\times\,\vartheta_3\{\beta x-\alpha y+r\alpha\beta\tau,\,\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau\}, \quad (12.9.1)$$

где α и β — произвольные положительные целые числа. В книге Таннери и Молка приведено сравнительно простое доказательство этой формулы, где оно применено к случаям $n = 3$ и $n = 5$. Шрётер также рассмотрел случаи 11, 23 и 31. Так, уравнение степени 23 представлено им в виде

$$(kl)^{1/4} + (k'l')^{1/4} + 2^{2/3}(klk'l')^{1/12} = 1,$$

который также встречается в записных книжках[1]. Похоже, что Рамануджан знал формулу (12.9.1). У него была формула[2] для

$$f(a,\,b)f(c,\,d),$$

т. е. для $\vartheta_3(v,\,\tau)\vartheta_3(v',\,\tau')$ в виде суммы бесконечного ряда, которая была также получена Шрётером, и в некоторых случаях этот ряд становится конечным. «Эти компактные формулы», говорит Ватсон, «не были приведены в записных книжках, но ввиду многочисленных частных случаев, приводимых им, он должен был знать об их существовании».

Рамануджан приводит известные формы для случаев

$$3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 23$$

(с многими вариантами в более простых случаях) и новые формы для случаев

$$13,\ 17,\ 19,\ 31,\ 47,\ 71.$$

Так, уравнение степени 13 приводится в виде[3]

$$\begin{cases} m = \left(\dfrac{l}{k}\right)^{1/2} + \left(\dfrac{l'}{k'}\right)^{1/2} - \left(\dfrac{ll'}{kk'}\right)^{1/2} - 4\left(\dfrac{ll'}{kk'}\right)^{1/3}, \\ \dfrac{13}{m} = \left(\dfrac{k}{l}\right)^{1/2} + \left(\dfrac{k'}{l'}\right)^{1/2} - \left(\dfrac{kk'}{ll'}\right)^{1/2} - 4\left(\dfrac{kk'}{ll'}\right)^{1/3} \end{cases}$$

[1] 20.15(i).
[2] 16.36(i), (ii).
[3] 20.8(iii), (iv).

и уравнение степени 17 — в виде[1]

$$\begin{cases} m=\left(\frac{l}{k}\right)^{1/2}+\left(\frac{l'}{k'}\right)^{1/2}+\left(\frac{ll'}{kk'}\right)^{1/2}-2\left(\frac{ll'}{kk'}\right)^{1/4}\left\{1+\left(\frac{l}{k}\right)^{1/4}+\left(\frac{l'}{k'}\right)^{1/4}\right\}, \\ \frac{17}{m}=\left(\frac{k}{l}\right)^{1/2}+\left(\frac{k'}{l'}\right)^{1/2}+\left(\frac{kk'}{ll'}\right)^{1/2}-2\left(\frac{kk'}{ll'}\right)^{1/4}\left\{1+\left(\frac{k}{l}\right)^{1/4}+\left(\frac{k'}{l'}\right)^{1/4}\right\}. \end{cases}$$

Ватсон теперь получил доказательства всех этих формул. Он отмечает, что «хотя модулярные уравнения степеней 13, 17 и 19 были получены другими авторами, они обычно приводились в более сложном виде, и, действительно, при изучении модулярных уравнений Рамануджана в общем виде мне всегда казалось, что знание о работах других людей отрицательно сказывается, поскольку обычно сбивает с кратчайшего пути».

Существует также много «смешанных» модулярных уравнений, или уравнений составной степени. Например, если модули k, κ, l, λ соответствуют q, q^3, q^5 и q^{15} соответственно, то[2]

$$(k\lambda)^{1/4}-(k'\lambda')^{1/4}=(\kappa l)^{1/4}-(\kappa' l')^{1/4}$$

и[3]

$$(k\lambda)^{1/8}\{(1+k)^{1/4}(1+\lambda)^{1/4}-(1-k)^{1/4}(1-\lambda)^{1/4}\}+ \\ +(k'\lambda')^{1/8}\{(1+k')^{1/4}(1+\lambda')^{1/4}-(1-k')^{1/4}(1-\lambda')^{1/4}\}=\sqrt{2}.$$

Я больше не буду рассказывать о результатах такого рода. Я предпочитаю расшифровать из записных книжек собственное доказательство Рамануджана для уравнения третьей степени, которое возникает здесь как кульминация очень сложной цепочки рассуждений. Разумеется весьма вероятно, что он знал более короткое доказательство, подобное доказательству из § 12.8.

12.10. Рамануджан в действительности вывел (12.8.1) и (12.5.5) из двух тождеств[4], содержащих ряды типа «Ламберта», а именно

$$q\psi(q^2)\psi(q^6)=\frac{q}{1-q^2}-\frac{q^5}{1-q^{10}}+\frac{q^7}{1-q^{14}}-\frac{q^{11}}{1-q^{22}}+\ldots, \qquad (12.10.1)$$

$$\phi(q)\phi(q^3)=1+2\left(\frac{q}{1-q}-\frac{q^2}{1+q^2}+\frac{q^4}{1+q^4}-\frac{q^5}{1-q^5}+\ldots\right), \qquad (12.10.2)$$

---

[1] 20.12(iii), (iv).
[2] 20.11(iii).
[3] 20.11(iv).
[4] 19.3(i), (ii)

знаки в каждом из рядов повторяются по модулю 6. Из этого следует

$$4q\psi(q^2)\psi(q^6) = \phi(q)\phi(q^3) - \phi(-q)\phi(-q^3);^{1} \tag{12.10.3}$$

и поскольку

$$\phi(q) = \vartheta_3(0,\tau), \quad \phi(-q) = \vartheta_4(0,\tau), \quad \psi(q^2) = \frac{1}{2}q^{-1/4}\vartheta_2(0,\tau),$$

формула (12.10.3) эквивалентна (12.8.1). Осталось проследить происхождение формул (12.10.1)) и (12.10.2), я смог это сделать только с помощью решений Ватсона.

Я называю соотношение между f, ϕ, ψ «тривиальным», если оно является прямым следствием их выражений в виде произведений. Таким образом, соотношение

$$\frac{f(q,-q^2)}{f(-q,q^2)} = \frac{\phi(q)}{\phi(q^3)} \tag{12.10.4}$$

является «тривиальным». Если мы запишем

$$1-q^n = (n), \quad 1+q^n = (\overline{n}),$$

тогда оно принимает вид

$$\frac{(\overline{1})(4)(\overline{7})(10)\dots}{(1)(\overline{4})(7)(\overline{10})\dots}\,\frac{(2)(\overline{5})(8)(\overline{11})\dots}{(\overline{2})(5)(\overline{8})(11)\dots} = \frac{(2)(4)(6)\dots(\overline{1})^2(\overline{3})^2(\overline{5})^2\dots}{(6)(12)(18)\dots(\overline{3})^2(\overline{9})^2(\overline{15})^2\dots}.$$

Эту формулу можно проверить, заметив, что

$$(\overline{n}) = \frac{(2n)}{(n)}$$

и сравнив множители.

Аналогично, соотношение

$$\frac{qf(-q^4,-q^8)}{f(-q^2,-q^{10})}\phi(q^6)\phi(q^{12}) = q\psi(q^2)\psi(q^6) \tag{12.10.5}$$

является «тривиальным».

12.11. Доказательства формул (12.10.1) и (12.10.2) могут быть прослежены к более ранним формулам, а именно

$$\frac{f(a,b)}{f(-a,-b)}\phi^2(-ab) = 1 + 2\Big(\frac{a+b}{1+ab} + \frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} + \dots\Big),^{2} \tag{12.11.1}$$

---

[1] Этой формулы нет в явном виде в записных книжках.

[2] 16.33(следствие).

и

$$f^2(a,\,b)-f^2(-a,\,-b)=4af\Big(\frac{b}{a},\,a^3b\Big)\psi(a^2b^2).^1 \tag{12.11.2}$$

Временно предположим правильность этих формул. Ряд в скобках в (12.11.1) равен

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n+b^n}{1+a^nb^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\{a^{(m+1)n}b^{mn}+a^{mn}b^{(m+1)n}\}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\Big(\frac{a^{m+1}b^m}{1-a^{m+1}b^m}+\frac{a^mb^{m+1}}{1-a^mb^{m+1}}\Big).$$

Следовательно, (12.11.1) эквивалентно

$$\frac{f(a,\,b)}{f(-a,\,-b)}\phi^2(-ab)=1+2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\Big(\frac{a^{m+1}b^m}{1-a^{m+1}b^m}+\frac{a^mb^{m+1}}{1-a^mb^{m+1}}\Big). \tag{12.11.3}$$

Если мы положим $a=q$, $b=-q^2$ и воспользуемся (12.10.4), тогда из (12.11.3) следует (12.10.2).

Также из (12.11.3) следует

$$\Big\{\frac{f(a,\,-b)}{f(-a,\,b)}-\frac{f(-a,\,b)}{f(a,\,-b)}\Big\}\phi^2(ab)=4\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{a^{m+1}b^m}{1-a^{2m+2}b^{2m}}-\frac{a^mb^{m+1}}{1-a^{2m}b^{2m+2}}\Big).$$

Если мы преобразуем левую часть с помощью (12.11.2) и «тривиального» тождества

$$f(a,\,-b)f(-a,\,b)=f(-a^2,\,-b^2)\phi(ab),$$

то получим

$$\frac{f^2(a,\,-b)-f^2(-a,\,b)}{f(a,\,-b)f(-a,\,b)}\phi^2(ab)=\frac{4af(-b/a,\,-a^3b)}{f(a,\,-b)f(-a,\,b)}\phi^2(ab)\psi(a^2b^2)=$$

$$=\frac{4af(-b/a,\,-a^3b)}{f(-a^2,\,-b^2)}\phi(ab)\psi(a^2b^2).$$

[1] 16.30(iv).

Следовательно,

$$\frac{af(-b/a,\,-a^3b)}{f(-a^2,\,-b^2)}\phi(ab)\psi(a^2b^2)=\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{a^{m+1}b^m}{1-a^{2m+2}b^{2m}}-\frac{a^mb^{m+1}}{1-a^{2m}b^{2m+2}}\Big).$$

Наконец, если мы заменим a и b на q и q^5 и воспользуемся (12.10.5), то получим

$$q\psi(q^2)\psi(q^6)=\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{q^{6m+1}}{1-q^{12m+2}}-\frac{q^{6m+5}}{1-q^{12m+10}}\Big),$$

что совпадает с (12.10.1).

Таким образом, все сводится к доказательству (12.11.1) и (12.11.2).

12.12. Первая из этих формул эквивалентна равенству

$$\frac14+\sum_1^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos 2n\pi v=\frac{1}{4\pi}\frac{\vartheta_1'(0,\,\tau)\vartheta_4(v+1/2,\,\tau)}{\vartheta_2(0,\,\tau)\vartheta_3(v+1/2,\,\tau)}. \tag{12.12.1}$$

Таннери и Молк доказывают формулы такого типа с помощью теоремы Коши. Мы можем вывести (12.11.1) из (12.12.1), положив

$$q=e^{\pi i\tau}=(ab)^{1/2},\quad z=e^{2\pi iv}=\Big(\frac{a}{b}\Big)^{1/2},$$

а затем выполнив «тривиальное» преобразование. Доказательство Рамануджана имеет совершенно другую природу. Он выводит (12.12.1) из замечательной формулы[1] с многими параметрами, а именно

$$\frac{\Pi(xy,\,x^2)\Pi(x/y,\,x^2)\Pi(-x^2,\,x^2)\Pi(-\alpha\beta x^2,\,x^2)}{\Pi(\alpha xy,\,x^2)\Pi(\beta x/y,\,x^2)\Pi(-\alpha x^2,\,x^2)\Pi(-\beta x^2,\,x^2)}=$$

$$=1+\Big(xy\frac{1-\alpha}{1-\beta x^2}+\frac{x}{y}\frac{1-\beta}{1-\alpha x^2}\Big)+$$

$$+\Big\{(xy)^2\frac{(1-\alpha)(x^2-\alpha)}{(1-\beta x^2)(1-\beta x^4)}+\Big(\frac{x}{y}\Big)^2\frac{(1-\beta)(x^2-\beta)}{(1-\alpha x^2)(1-\alpha x^4)}\Big\}+$$

$$+\Big\{(xy)^3\frac{(1-\alpha)(x^2-\alpha)(x^4-\alpha)}{(1-\beta x^2)(1-\beta x^4)(1-\beta x^6)}+\dots\Big\}+\dots \tag{12.12.2}$$

[1] 16.17.

Эта формула, похоже, является новой. Она, однако, выводится из известной формулы, которая, возможно, восходит к Эйлеру, а именно

$$\frac{\Pi(b,\,x)}{\Pi(-a,\,x)} = 1 + \frac{a+b}{1-x} + \frac{(a+b)(a+bx)}{(1-x)(1-x^2)} + \ldots^{1}$$

При приложении формулы (12.12.2) для доказательства (12.11.1)

$$xy = a, \quad \frac{x}{y} = b, \quad \alpha = \beta = -1.$$

12.13. Наконец, (12.11.2) эквивалентна формуле

$$\vartheta_3^2(v,\,\tau) - \vartheta_4^2(v,\,\tau) = 2\vartheta_2(0,\,2\tau)\vartheta_2(2v,\,2\tau),$$

которая выводится Таннери и Молком из теории квадратичных преобразований Ландена. Рамануджан выводит ее из

$$f(a,\,b)f(c,\,d) - f(-a,\,-b)f(-c,\,-d) = 2af\Big(\frac{b}{c},\,\frac{c}{b}abcd\Big)f\Big(\frac{b}{d},\,\frac{d}{b}abcd\Big),^{2}$$

где $ab = cd$. Прямое доказательство этой формулы является достаточно простым, если мы запишем левую часть в виде

$$2\sum_{m+n \text{ четно}} a^{m(m+1)/2}b^{m(m-1)/2}c^{n(n+1)/2}d^{n(n-1)/2}$$

и положим

$$m+n = 2M, \quad m-n = 2N,$$

когда суммирование происходит по всем целым числам M, N.

12.14. Очевидно, что доказательство § 12.10 – 12.13, рассматриваемое просто как доказательство уравнения Лежандра, является очень длинным и сложным и не выдерживает сравнения с экономичными доказательствами § 12.5 – 12.8. Сравнение, однако, является совершенно не справедливым. Доказательство § 12.8 является, к примеру, *специализированным* доказательством, упрощенным для конкретной формулы, и кажется почти очевидным, что у Рамануджана имелись упрощенные

[1] 16.2. Простое доказательство этой формулы см. в *Сборнике трудов*, номер 11, 57–58.

[2] 16.29(ii).

доказательства подобного рода. Он, разумеется, иногда использовал подобные методы (как показано в доказательстве, процитированном в § 12.13), и доказательство из § 12.8 является таким, вне зависимости от того, знал ли он его или нет, какое он, разумеется, мог составить. Доказательство, которое я собрал вместе в § 12.10 – 12.13, является доказательством совершенно иного рода, оно содержит большие части теории эллиптических функций, и модулярные уравнения возникают только как одна из кульминаций в реконструкции теории Рамануджаном.

Сингулярные модули

12.15. Я не стану столь подробно рассказывать о работе Рамануджана в тесно связанной теории «сингулярных модулей». Большая часть этой работы уже опубликована[1], и Ватсон в своей серии работ по сингулярным модулям доказал все результаты Рамануджана и приложил большие усилия, чтобы прояснить возможный метод их получения. Я начну с очень краткого обзора основ традиционной теории.

Известно, что

$$\wp(\mu u,\, \omega_1,\, \omega_2) = R(\wp), \tag{12.15.1}$$

где

$$\wp = \wp(u) = \wp(u,\, \omega_1,\, \omega_2),$$

и R — рациональная функция, когда μ — целое число. Может ли это быть верным при других μ? Если это так, то $2\mu\omega_1$, $2\mu\omega_2$ являются периодами $\wp(u)$ и

$$\mu\omega_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \mu\omega_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,$$

где α, β, γ, δ — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$\beta \neq 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{12.15.2}$$

Мы можем предположить

$$\beta > 0 \tag{12.15.3}$$

(поскольку иначе мы можем поменять знак α, β, γ, δ и μ). Обратно, когда выполнены эти условия, $\wp(\mu u)$ является эллиптической функцией

[1] *Сборник трудов*, номер 6, 23–39.

с периодами ω_1, ω_2, и поэтому, рациональной функцией $\wp$ и $\wp'$. Наконец, поскольку она нечетная, она является рациональной функцией одного переменного $\wp$.

Ситуация не изменится, если заменить ω_1 и ω_2 на $\lambda\omega_1$ и $\lambda\omega_2$, поэтому имеет значение только отношение

$$\tau = \omega_1/\omega_2.$$

В этой ситуации мы скажем, что «существует комплексное умножение на μ для τ». Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu = \alpha + \beta\tau, \quad \mu\tau = \gamma + \delta\tau, \tag{12.15.4}$$

поэтому

$$\tau = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau} \tag{12.15.5}$$

с целыми α, β, γ, δ, удовлетворяющими (12.15.2) и (12.15.3). Таким образом, τ является корнем с положительной мнимой частью уравнения

$$\beta\tau^2 + (\alpha - \delta)\tau - \gamma = 0. \tag{12.15.6}$$

Легко проверить, что любое число $A + B\mu$, где A и B — целые числа, является множителем для τ, если μ равно одному.

12.16. Запишем

$$\rho = (-\gamma,\ \alpha - \delta,\ \beta) > 0 \tag{12.16.1}$$

и

$$-\gamma = a\rho, \quad \alpha - \delta = b\rho, \quad \beta = c\rho. \tag{12.16.2}$$

Тогда

$$a + b\tau + c\tau^2 = 0, \tag{12.16.3}$$

где

$$a > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - 4ac = -n < 0, \tag{12.16.4}$$

и

$$\tau = -\frac{b - i\sqrt{n}}{2c}. \tag{12.16.5}$$

Далее, мы запишем

$$\alpha + \delta = \rho_1. \tag{12.16.6}$$

Тогда

$$\rho_1 + b\rho = 2\alpha \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\rho_1 + b\rho), \quad \beta = c\rho, \quad \gamma = -a\rho, \quad \delta = \frac{1}{2}(\rho_1 - b\rho), \tag{12.16.7}$$

и

$$\mu = \alpha + \beta\tau = \frac{1}{2}(\rho_1 + i\rho\sqrt{n}). \tag{12.16.8}$$

Обратно, если существуют целые числа a, b, c, удовлетворяющие (12.16.4), и ρ, ρ_1, удовлетворяющие

$$\rho > 0, \quad \rho_1 + b\rho \equiv 0 \pmod 2, \tag{12.16.9}$$

α, β, γ, δ тогда определяются по формулам (12.16.7), τ — по формуле (12.16.5) и $\mu = \alpha + \beta\tau$, тогда существует комплексное умножение τ на μ.

Далее, если

$$\varepsilon = 0 \quad (b \text{ четно}), \quad \varepsilon = 1 \quad (b \text{ нечетно}), \tag{12.16.10}$$

$$M = \frac{1}{2}(-\varepsilon + i\sqrt{n}), \tag{12.16.11}$$

тогда M тоже является множителем для τ. Для него легко проверить, что

$$\mu = \alpha - \frac{1}{2}(b - \varepsilon)\rho + \rho M, \tag{12.16.12}$$

$$M = \frac{1}{2}(b - \varepsilon) + c\tau, \quad M\tau = -a - \frac{1}{2}(b + \varepsilon)\tau. \tag{12.16.13}$$

Поскольку последние уравнения имеют вид (12.15.4), M является множителем (когда μ равно одному).

С другой стороны, если M является множителем для τ, из (12.16.12) и из последнего замечания § 12.15 следует, что μ является множителем.

12.17. Если τ удовлетворяет (12.15.5), A, B, C, D — целые числа, удовлетворяющие $AD - BC = 1$, и

$$\tau' = \frac{C + D\tau}{A + B\tau}, \tag{12.17.1}$$

поэтому

$$J(\tau') = J(\tau), \tag{12.17.2}$$

тогда τ' удовлетворяет уравнению

$$a' + b'\tau' + c'\tau'^2 = 0 \tag{12.17.3}$$

с тем же детерминантом, что и (12.16.3), поэтому b' имеет ту же четность, что и b, и ε' и M', соответствующие τ', совпадают с ε и M. Следовательно, существует умножение для τ' на M, и поэтому на любое μ, которое является множителем для τ. Значения τ, для которых существует умножение, и соответствующие множители однозначно определяются значениями $J(\tau)$.

12.18. Если заданы τ и любое положительное число m, то значения

$$J\Big(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\Big)$$

для различных α, β, γ, δ, удовлетворяющих уравнению

$$\alpha\delta - \beta\gamma = m,$$

являются корнями уравнения $F(x, J) = 0$, где

$$J = J(\tau)$$

степени m. Если τ удовлетворяет (12.15.5), тогда

$$F(J, J) = 0. \tag{12.18.1}$$

Следовательно, каждая $J(\tau)$, соответствующая τ, для которого существует комплексное умножение, удовлетворяет алгебраическому уравнению. Мы назовем эти $J(\tau)$ сингулярными инвариантами и соответствующие $k^2(\tau)$ – сингулярными модулями, сингулярные модули также удовлетворяют алгебраическим уравнениям. Все эти уравнения разрешимы в радикалах (хотя это утверждение основано на соображениях из теории групп, которой Рамануджан совсем не знал).

12.19. Все это связано с теорией алгебраических форм. Предположим, что

$$f = ax^2 + bxy + cy^2,$$

где

$$(a, b, c) = 1$$

эквивалентна

$$f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$$

при

$$x' = \alpha x + \beta y, \quad y' = \gamma x + \delta y, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

поэтому

$$\begin{gathered} a = a'\alpha^2 + b'\alpha\gamma + c'\gamma^2, \quad b = 2a'\alpha\beta + b'(\beta\gamma + \alpha\delta) + 2c'\gamma\delta, \\ c = a'\beta^2 + b'\beta\delta + c'\delta^2, \quad (a', b', c') = 1, \\ b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c' = -n. \end{gathered} \tag{12.19.1}$$

Тогда b и b' имеют одинаковую четность, и если τ и τ' являются корнями уравнений

$$a + b\tau + c\tau^2 = 0, \quad a' + b'\tau' + c'\tau'^2 = 0, \tag{12.19.2}$$

то M из § 12.16 имеет одинаковые значения для τ и τ'. Таким образом, существует комплексное умножение на M для обоих τ и τ'. Также τ и τ' удовлетворяют

$$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{12.19.3}$$

и поэтому

$$J(\tau') = J(\tau). \tag{12.19.4}$$

Обратно, предположим, что (12.19.4) является истинной, что существует комплексное умножение для τ и τ' и что τ и τ' удовлетворяют уравнениям (12.19.2) при $(a, b, c) = 1$ и $(a', b', c') = 1$. Поскольку (12.19.4) является истинной, то существуют целые числа α, β, γ, δ, удовлетворяющие (12.19.3). Следовательно, уравнение

$$a'(\alpha + \beta\tau)^2 + b'(\alpha + \beta\tau)(\gamma + \delta\tau) + c'(\gamma + \delta\tau)^2 = 0$$

имеет те же корни, что и

$$a + b\tau + c\tau^2 = 0.$$

Отсюда легко следует, что a, b, c удовлетворяют (12.19.1) и что формы f и f' эквивалентны.

Таким образом, (12.19.4) является необходимым и достаточным условием эквивалентности, и степень (12.18.1) равна числу класса $h(-n)$ для детерминанта $-n$.

Похоже, что Рамануджан ничего не знал об арифметической стороне теории.

12.20. Наиболее ясно теория формулируется в терминах $J(\tau)$. Другие модулярные функции более удобны для вычислений, поскольку уравнения, которым удовлетворяет $J(\tau)$, обычно имеют большие коэффициенты.

Обычно записывают

$$f(\tau) = q^{-1/24}\prod_1^\infty(1+q^{2n-1}) = \Big(\frac{4}{kk'}\Big)^{1/12},$$

$$f_1(\tau) = q^{-1/24}\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}) = \Big(\frac{4k'^2}{k}\Big)^{1/12},$$

$$f_2(\tau) = 2^{1/2}q^{1/12}\prod_1^\infty(1+q^{2n}) = \Big(\frac{4k^2}{k'}\Big)^{1/12}.$$

Тогда

$$f^8 = f_1^8 + f_2^8, \quad f f_1 f_2 = \sqrt{2}.$$

Если

$$n = 4ac - b^2 = 8m + 3 \not\equiv 0 \pmod 3,$$

то простейший инвариант имеет вид

$$f\{\sqrt{-n}\} = f_n = f,$$

а если

$$n = 8m - 1 \not\equiv 0 \pmod 3,$$

то он имеет вид

$$2^{-1/2} f\{\sqrt{-n}\} = F_n = F.$$

Рамануджан, однако, использовал инварианты

$$G_n = 2^{-1/4} f\{\sqrt{-n}\} = 2^{-1/4} f_n \quad (n \text{ нечетные}),$$

$$g_n = 2^{-1/4} f_1\{\sqrt{-n}\} \quad (n \text{ четные}).$$

Уравнения, связывающие f, f_1 и f_2 с $J(\tau)$, имеют вид

$$j(\tau) = 1728J(\tau) = 256\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2} = \frac{(f^{24}-16)^3}{f^{24}} =$$

$$= \frac{(f_1^{24}+16)^3}{f_1^{24}} = \frac{(f_2^{24}+16)^3}{f_2^{24}},$$

и f^{24}, $-f_1^{24}$, $-f_2^{24}$ — три корня уравнения

$$(x-16)^3 - xj(\tau) = 0.$$

12.21. Рамануджан получил значения простейших из своих сингулярных модулей прямо из модулярных уравнений. Он приводит полное доказательство только для одного случая, а именно для $n = 5$. В этом случае

$$G_5 = 2^{-1/4} f\{\sqrt{-5}\} = \Big(\frac{1}{2kk'}\Big)^{1/12}$$

и

$$G_{1/5} = G_5$$

(из преобразования $\tau' = -1/\tau$).

Если

$$u = 2^{-1/4} f(\tau), \quad v = 2^{-1/4} f(5\tau),$$

то

$$\Big(\frac{u}{v}\Big)^3 + \Big(\frac{v}{u}\Big)^3 = 2\Big(u^2v^2 - \frac{1}{u^2v^2}\Big).$$

Это форма Шлёфли (Schläfli) модулярного уравнения степени 5, которая также встречается в записных книжках[1]. Если $\tau = i/\sqrt{5}$, $q = e^{-\pi/\sqrt{5}}$, то

$$u = G_{1/5}, \quad v = G_5, \quad v = u, \quad u^4 - u^{-4} = 1,$$

и

$$G_5 = \Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^{1/4}.$$

[1] 19.13(xiv).

Аналогично, если мы используем форму[1]

$$Q + \frac{1}{Q} + 7 = 2^{3/2}\Big(P + \frac{1}{P}\Big),$$

где

$$P = 2^{1/2}(kk'll')^{1/4}, \quad Q = \Big(\frac{ll'}{kk'}\Big)^{1/3},$$

модулярного уравнения степени 7, то мы можем показать, что

$$G_7 = 2^{1/4}.$$

Ватсон в своей работе (**20**) получил значения всех новых сингулярных модулей Рамануджана, которые он, похоже, получил таким способом.

12.22. Во многих случаях Рамануджан приводит значения сингулярных модулей, которые он вряд ли получил строго.

Предположим, для определенности, что

$$n = 8m - 1 \not\equiv 0 \pmod 3.$$

Если количество типов классов форм с детерминантом $-n$ равно N и число классов в каждом типе рано r, поэтому число классов равно $h = Nr$, тогда $j(\tau)$ и F_n удовлетворяет уравнениям степени h, разрешимым в радикалах. Решение уравнений зависит от решения ряда вспомогательных уравнений, число и степень которых определяется в терминах N и r. Так, когда $n = 7$, $N = 1$, $r = 1$ и $F_7 = 1$ является рациональным и когда $n = 23$, $N = 1$, $r = 3$ и F_{23} определяется одним кубическим уравнением

$$F^3 - F - 1 = 0.$$

В работе (**13**) Ватсон рассматривает случаи, в которых $N = 1$, а в работе (**25**) — также случаи, в которых $N = 2$ или $N = 4$. Когда $N = 2$, необходимы два уравнения. Так, если $n = 55$, $N = 2$, $r = 2$, $h = 4$, то F удовлетворяет уравнению четвертой степени

$$F^4 - 2F^3 + F - 1 = 0,$$

[1] 19.19(ix).

которое сводится к

$$\left(F-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{5}}{4}$$

присоединением $\sqrt{5}$. Если $n=455$, $N=4$, $r=5$, $h=20$, то F удовлетворяет уравнению степени 20, которое можно свести к уравнению пятой степени присоединением $\sqrt{5}$ и $\sqrt{13}$.

Раманужан не знал ничего из этой арифметической теории и при изучении больших значений n, когда отсутствуют модулярные уравнения, в основном должен был руководствоваться угадыванием и интуицией. Ватсон в своих работах (**8, 9**) и (**19**) построил весьма вероятную реконструкцию аргументов, которыми, по-видимому, пользовался Раманужан. Все они включают в себя предположения, что определенные числа удовлетворяют уравнениям подходящих степеней. В этих предположениях, которые всегда согласуются с арифметической теорией, он, по-видимому, руководствовался интуицией вместе с вычислениями.

Так, в (**8**) Ватсон реконструирует вычисление Раманужаном значения g_{210} (значение также полученное Вебером) и выводит один из наиболее поразительных результатов Раманужана, а именно, что

$$k=(\sqrt{2}-1)^2(2-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2(8-3\sqrt{7})\times \\ \times(\sqrt{10}-3)(4-\sqrt{15})^2(\sqrt{15}-\sqrt{14})(6-\sqrt{35}),$$

когда

$$q=e^{-\pi\sqrt{210}}.$$

Этот результат Раманужан строго доказал, получив значение g_{210} с помощью очень любопытной алгебраической леммы.

Комментарии к лекции XII

§ 12.1. Каталог, на который мы ссылались на стр. 20 (замечание на стр. 10), содержит Кэйли, Гринхилла, Таннери и Молка, книгу А. К. Диксона *Элементарные свойства эллиптических функций*, книгу Аппела и Лакора (Lacour) *Principles de la théorie des fonctions elliptiques* и первое издание книги Уиттекера *Современный анализ*. Однако очевидно, что Раманужан не читал никакого изложения теории эллиптических функций, основанного (как в книге Таннери и Молка или Уиттекера) на общей теории функций.

Цитата из Литтлвуда взята из его обзора *Сборника трудов*.

§ 12.2. Существуют доказательства тождества Якоби и вывод тождеств Эйлера и Гаусса в Харди и Райт, § 19.8–9.

§ 12.3. См. лекцию Ватсона (**10**), Якоби *Fundamenta nova*, § 41 и Эннепера (Enneper) *Elliptische Funktionen*, § 13.

Последнее предложение подтверждается доказательством (из работы 18 *Сборника трудов*), воспроизведенным в § 9.2.

§ 12.5. См. Кэйли, гл. vii и viii, (особенно стр. 188–190) Гринхилла гл. x (особенно стр. 323). Лучшее изложение см. в Эннепере гл. ix (особенно стр. 225–237), но трактовка Якоби частного случая $n = 3$ сформулирована очень кратко в приложении (стр. 518).

§ 12.9. См. Таннери и Молк, ii, 163–166, и iv, 230–231, 242–244.

§ 12.12. Формулу (12.12.1) см. в Таннери и Молк, iii, 120–134 и iv, 105 (таблица CVIII). (12.12.2) сводится к формуле Якоби, приведенной в § 12.2, при $\alpha = \beta = 0$.

§ 12.13. См. Таннери и Молк, ii, 114–119 и 268 (таблица XLVII).

§ 12.15–19 Мой набросок традиционной теории основан на Таннери и Молк, iv, 254–260.

§ 12.19. Число классов здесь равно числу *примитивных* классов с детерминантом $-n$, в этих рассуждениях мы предполагаем, что $(a, b, c) = 1$. Все доказательство основано на теории Кронекера форм $ax^2 + bxy + cy^2$, в которой b не обязательно четное число и определитель равен $b^2 - 4ac$, таким образом, определитель $x^2 + 7y^2$ равен -28. В более старой теории Гаусса форма имеет вид $ax^2 + 2bxy + cy^2$ и определитель равен $b^2 - ac$, таким образом, определитель $x^2 + 7y^2$ равен -7.

У меня есть письмо к Рамануджану от профессора В. Е. Х. Бервика (W. E. H. Berwick), которое частично объясняет последнее предложение этого параграфа. Профессор Бервик, подтвердив получение работы Рамануджана «Модулярные уравнения и аппроксимации числа π» (статья 6 *Сборника трудов*), и приводит ряд ссылок, объясняя, что J удовлетворяет неприводимому уравнению степени h и что k^2 иногда можно, но не всегда, выразить рационально в терминах J. В частности, он указывает, что $J(i\sqrt{257})$ и $k^2(i\sqrt{257})$ удовлетворяют уравнениям степени 16, разрешимым с помощью цепочек из четырех квадратных уравнений.

§ 12.20. См. Ватсон (**13**).

§ 12.21. Доказательство для $n = 5$ приведено в статье 6 *Сборника трудов*.

§ 12.22. Все примеры взяты из работ Ватсона.

Литература

A. Книги

L. E. Dickson. *Introduction to the theory of numbers*, Chicago 1929 [Dickson, *Introduction*].

L. E. Dickson. *History of the theory of numbers*, 3 vols., Washington 1919–1923 [Dickson, *History*].

G. H. Hardy. *Ramanujan's work* (lithographed lectures at the Institute for Advanced Study, Princeton 1936).

G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1938 [Hardy and Wright].

A. E. Ingham. *The distribution of prime numbers*, Cambridge tracts in mathematics, no. 30, 1932 [Ingham].

E. Landau. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 2 vols. (paged consecutively), Leipzig 1909 [Landau, *Handbuch*].

E. Landau. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3 vols., Leipzig 1927 [Landau, *Vorlesungen*].

Collected papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge 1927 [*Papers*].

B. Заметки, обзоры и т. д.

[В ссылках на периодические издания используются следующие аббревиатуры: *JLMS*, Journal of the London Mathematical Society; *PLMS*, Proceedings of the London Mathematical Society; *PCPS*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society; *QJM*, Quarterly Journal of Mathematics; *OQJ*, Quarterly Journal of Mathematics (Oxford).]

P. V. Seshu Aiyar. The late Mr Srinivasa Ramanujan, B. A., F. R. S. *Journal Indian Math. Soc.*, 12 (1920), 81–86.

G. H. Hardy. Mr S. Ramanujan's mathematical work in England. *Journal Indian Math. Soc.*, 9 (1917), 30–48.

G. H. Hardy. S. Ramanujan, F. R. S. *Nature*, 105 (1920), 494. [Также опубликовано в *Journal Indian Math. Soc.*, 12 (1920), 90–91.]

G. H. Hardy. Srinivasa Ramanujan. *PLMS* (2), 19 (1921), xl–lviii. [Также опубликовано в несколько измененном виде в *Proc. Royal Soc.* (A), 99 (1921), xiii–xxix.]

J. E. Littlewood. Collected papers of Srinivasa Ramanujan. *Math. Gazette*, 14 (1929), 425–428. [Также опубликовано в несколько измененном виде в *Nature*, 123 (1929), 631–633.]

R. Ramachaundra Rao. In memoriam S. Ramanujan. *Journal Indian Math. Soc.*, 12 (1920), 87–90.

C. Оригинальные труды

S. Narayana Aiyar

1. Mr S. Ramanujan's theorems on prime numbers. *Journal Indian Math. Soc.*, 5 (1913), 60–61.

2. Some theorems in summation. *Journal Indian Math. Soc.*, 5 (1913), 183–186.

W. N. Bailey

1. A generalization of an integral due to Ramanujan. *JLMS* 5 (1930), 200–202.

2. The partial sum of the coefficients of the hypergeometric series, *JLMS*, 6 (1931), 40–41.

3. A note on an integral due to Ramanujan. *JLMS*, 6 (1931), 210–217.

4. On one of Ramanujan's theorems. *JLMS*, 7 (1932), 34–30.

S. Chowla

1. Congruence properties of partitions. *JLMS*, 9 (1934), 247.

E. T. Copson

1. An approximation connected with $e^{-}x$. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (2), 3 (1933), 201–206.

H. B. C. Darling

1. On a proof of one of Ramanujan's theorems. *JLMS*, 5 (1930), 8–9.

2. Proofs of certain identities and congruences enunciated by S. Ramanujan. *PLMS* (2), 19 (1921), 350–372.

3. On Mr Ramanujan's congruence properties of $p(n)$. *PCPS* 19 (1919), 217–218.

P. Erdös

1. Note on the number of prime divisors of integers. *JLMS*, 12 (1937), 308–314.

T. Estermann

1. On the divisor problem in a class of residues. *JLMS*, 3 (1928), 247–260.

F. M. Goodspeed

1. Some generalizations of a formula of Ramanujan. *OQJ*, 10 (1939), 210–218.

H. Gupta

1. A table of partitions. *PLMS* (2), 39 (1935), 142–149.

2. A table of partitions (II). *PLMS* (2), 42 (1937), 546–549.

3. On a conjecture of Ramanujan. *Proc. Indian Acad. Soc.* (A), 4 (1936), 625–629.

G. H. Hardy

1. A formula of Ramanujan. *JLMS*, 3 (1928), 238–240.

2. A formula of Ramanujan in the theory of primes. *JLMS*, 12 (1937), 94–98.

3. Another formula of Ramanujan. *JLMS*, 12 (1937), 314–318.

4. Some formulae of Ramanujan. *PLMS* (2), 22 (1924), *Records of proceedings at meetings*, xii–xiii.

5. Proof of a formula of Mr Ramanujan. *Messenger of Math.*, 44 (1916), 18–21.

6. Note on some points of the integral calculus (LII): on some definite integrals considered by Mellin. *Messenger of Math.*, 49 (1920), 85–91.

7. Note on Ramanujan's trigonometrical function $c_q(n)$, and certain series of arithmetical functions. *PCPS*, 20 (1921), 263–271.

8. A chapter from Ramanujan's notebook. *PCPS*, 21 (1923), 492–503.

9. Note on Ramanujan's arithmetical function $\tau(n)$. *PCPS*, 23 (1927), 675–680.

10. A further note on Ramanujan's arithmetical function $\tau(n)$, *PCPS*, 34 (1938), 309–316.

11. Ramanujan and the theory of Fourier transforms. *OQJ*, 8 (1937), 245–254.

J. Hodgkinson

1. Note on one of Ramanujan's theorems. *JLMS*, 6 (1931), 42–43.

A. E. Ingham

1. Some asymptotic formulae in the theory of numbers. *JLMS*, 2 (1927), 202–208.

2. Note on Riemann's ζ-function and Dirichlet's L-functions. *JLMS*, 6 (1930), 107–112.

W. Krečmar

1. Sur les propriétés de la divisibilité d'une fonction additive. *Bull. Acad. Sci. URSS*, 7 (1933), 763–800.

D. H. Lehmer

1. On a conjecture of Ramanujan. *JLMS*, 11 (1936), 114–118.

2. On the Hardy–Ramanujan series for the partition function. *JLMS*, 12 (1937), 171–176.

3. An application of Schläfli's modular equation to á conjecture of Ramanujan. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44 (1938), 84–90.

4. The series for tho partition function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43 (1938), 271–296.

5. On the remainders and convergence of the series for the partition function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40 (1939), 362–373.

P. A. MacMahon

1. The parity of $p(n)$, the number of partitions of n, when $n \leqslant 1000$. *JLMS* 1 (1926), 225–226.

2. Note on the parity of the number which enumerates the partitions of a number. *PCPS*, 20 (1921), 281–283.

L. J. Mordell

1. Note on certain modular relations considered by Messrs Ramanujan, Darling and Rogers. *PLMS* (2), 20 (1922), 408–416.

2. On Mr Ramanujan's empirical expansions of modular functions. *PCPS*, 19 (1917), 117–124.

3. On the representation of numbers as a sum of $2r$ squares. *QJM*, 48 (1920), 93–104.

4. The value of the definite integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at^2+bt}}{e^c t + d}\, dt$. *QJM*, 48 (1920), 329–342.

5. On the representation of a number as a sum of an odd number of squares. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 23 (1919), 361–372.

6. The definite integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at^2+bt}}{e^c t + d}\, dt$ and the analytical theory of numbers. *Acta math.*, 61 (1933), 323–360.

A. Page

1. A statement by Ramanujan. *JLMS*, 7 (1932), 105–112.

E. G. Phillips

1. Note on summation of series. *JLMS*, 4 (1929), 114–116.

2. Note on a problem Ramanujan. *JLMS*, 4 (1929), 310–313.

S. S. Pillai

1. On the sum function of the number of prime factors of N. *Journal Indian Math. Soc.*, 20 (1933), 70–86.

C. T. Preece

1. Theorems stated by Ramanujan (I): theorems on integrals. *JLMS*, 3 (1928), 212–216.

2. Theorems stated by Ramanujan (III): theorems on transformation of series and integrals. *JLMS*, 3 (1928), 274–282.

3. Theorems stated by Ramanujan (VI): theorems on continued fractions. *JLMS*, 4 (1929), 34–39.

4. Theorems stated by Ramanujan (X). *JLMS*, 6 (1931), 22–32.

5. Theorems stated by Ramanujan (XIII). *JLMS*, 6 (1931), 95–99.

6. The product of two generalized hypergeometric series. *PLMS* (2), 22 (1924), 370–380.

H. Rademacher

1. Bestimmung einer gewissen Einheitswurzel in der Theorie der Modulfunktionen. *JLMS*, 7 (1932), 14–19.

2. On the partition function $p(n)$. *PLMS* (2), 43 (1937), 241–254.

3. A convergent series for the partition function $p(n)$. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 23 (1937), 78–84.

H. Rademacher and H. S. Zuckermann

1. On the Fourier coefficients of certain modular forms of positive dimension. *Annals of Math.*, 39 (1938), 433–462.

2. A new proof of two of Ramanujan's identities. *Annals of Math.*, 40 (1939), 473–489.

R. A. Rankin

1. Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions (I). *PCPS*, 35 (1939), 351–356.

2. Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions (II). *PCPS*, 35 (1939), 357–372.

3. Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions (III). *PCPS*, 36 (1940), 150–151.

L. J. Rogers

1. Second memoir on the expansion of certain infinite products. *PLMS* (1), 25 (1894), 318–343.

2. On two theorems of combinatory analysis and some allied identities. *PLMS* (2) 16 (1917), 315–336.

3. On a type of modular relation. *PLMS* (2), 19 (1921), 387–397.

4. Proof of certain identities in combinatory analysis. *PCPS*, 19 (1919), 211–214.

G. K. Stanley

1. Two assertions made by Ramanujan. *JLMS*, 3 (1928), 232–237 [*Corrigenda JLMS*, 4 (1929), 32].

G. Szegö

1. Über einige von S. Ramanujan gestellte Aufgaben. *JLMS*, 3 (1928), 225–232.

P. Turan

1. On a theorem of Hardy and Ramanujan. *JLMS*, 9 (1934), 274–276.

2. Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan. *JLMS*, 11 (1936), 125–133.

G. N. Watson

1. Theorems stated by Ramanujan (II): theorems on summation of series. *JLMS*, 3 (1928), 216–225.

2. Theorems stated by Ramanujan (IV): theorems on approximate integration and summation of series. *JLMS*, 3 (1928), 282–289.

3. A new proof of the Rogers–Ramanujan identities. *JLMS*, 4 (1929), 4–9.

4. Theorems stated by Ramanujan (VII): theorems on continued fractions. *JLMS*, 4 (1929), 39–48.

5. Theorems stated by Ramanujan (VIII): theorems on divergent series. *JLMS*, 4 (1929), 82–86.

6. Theorems stated by Ramanujan (IX): two continued fractions. *JLMS*, 4 (1929), 231–237.

7. Theorems stated by Ramanujan (XI). *JLMS*, 6 (1931), 59–65.

8. Theorems stated by Ramanujan (XII): a singular modulus. *JLMS*, 6 (1931), 65–70.

9. Theorems stated by Ramanujan (XIV): a singular modulus. *JLMS*, 6 (1931), 126–132.

10. Ramanujan's note books. *JLMS*, 6 (1931), 137–153.

11. The final problem: an account of the mock theta functions. *JLMS*, 11 (1936), 55–80.

12. Theorems stated by Ramanujan (V): approximations connected with e^x. *PLMS* (2), 29 (1929), 293–308.

13. Singular moduli (III). *PLMS* (2), 40 (1936), 83–142.

14. The mock theta functions (II). *PLMS* (2), 42 (1937), 274–304.

15. Singular moduli (V). *PLMS* (2), 42 (1937), 377–397.

16. Singular moduli (VI). *PLMS* (2), 42 (1937), 398–409.

17. Two tables of partitions. *PLMS* (2), 42 (1937), 550–556.

18. Ramanujan's continued fraction. *PCPS*, 31 (1935), 7–17.

19. Some singular moduli (I). *OQJ*, 3 (1932), 81–98.

20. Some singular moduli (II). *OQJ*, 3 (1932), 189–212.

21. Ramanujan's integrals and Gauss's sums. *OQJ*, 7 (1936), 175–183.

22. Proof of certain identities in combinatory analysis. *Journal Indian Math. Soc.*, 20 (1933), 57–69.

23. Über Ramanujansche Kongruenzeigenschaften der Zerfällungsanzahlen. *Math. Zeitschrift*, 39 (1935), 712–731.

24. Ramanujans Vermutung über Zerfällungsanzahlen. *Journal für Math.*, 179 (1938), 97–128.

25. Singular moduli (IV). *Acta arithmetica*, 1 (1936), 284–323.

F. J. W. Whipple

1. A fundamental relation between generalised hypergeometric series. *JLMS*, 1 (1926), 138–145.

2. The sum of the coefficients of a hypergeometric series. *JLMS*, 5 (1930), 192.

3. On well-poised series, generalised hypergeometric series having parameters in pairs, each pair with the same sum. *PLMS* (2), 24 (1926), 247–263.

B. M. Wilson

1. Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan. *PLMS* (2), 21 (1923), 235–255.

J. R. Wilton

1. A note on Ramanujan's arithmetical function $\tau(n)$. *PCPS*, 25 (1929), 121–129.

2. On Ramanujan's arithmetical function $\Sigma_{r,s}(n)$. *PCPS*, 25 (1929), 255–264.

H. S. Zuckermann

1. The computation of the smaller coefficients of $J(\tau)$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45 (1939), 917–919.

2. Identities analogous to Ramanujan's identities involving the partition function. *Duke Math. Journal*, 5 (1939), 88–110.

3. On the expansions of certain modular forms of positive dimension. *Amer. Journal of Math.*, 42 (1940), 127–152.

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 332–48–92, (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135–54–37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 15 этаж).
4. Магазины:

   Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)
   «Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)
   «Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

   С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Годфри Гарольд Харди

Двенадцать лекций о Рамануджане

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка С. В. Высоцкий
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 23.04.02. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 19,53. Уч. изд. л. 19,65.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага газетная.
Печать офсетная. Тираж 700 экз. Заказ № 1700.
АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru
Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.