

Тетрация как специальная функция

Дмитрий Кузнецов (Dmitrii Kouznetsov),

Институт лазерных наук, Университет электрокоммуникаций (Япония)

18 ноября 2009 г.

Аннотация

Голоморфная суперэкспонента (тетрация) по основанию e и ее обратная функция (арктетрация) аппроксимированы элементарными функциями.

1 Введение

Тетрация или суперэкспонента определяется как голоморфное решение F уравнения

$$F(z+1) = \exp_b(F(z)). \quad (1)$$

Такое уравнение рассматривалось с 1950х годов [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]; в частности, для “натурального” основания $b=e$. Термин “суперэкспонента”, или sexp , указывает на то, что функция F является *суперфункцией* [8, 10] от экспоненты.

Вообще говоря, для некоторой функции H , которую можно назвать *передаточной функцией* [10], суперфункция F есть голоморфное решение уравнения

$$F(z+1) = H(F(z)) . \quad (2)$$

Уравнение (1) является специальным случаем уравнения (2) для $H = \exp_b$. При этом умножение является суперфункцией сложения (прибавления константы), экспонента является суперфункцией от умножения на константу, а решение F уравнения (1) является суперфункцией от экспоненты, то есть суперэкспонентой.

Специальный случай суперэкспоненты F , голоморфной хотя бы в правой части комплексной плоскости, я называю “тетрацией”, $F = \text{tet}_b$, если эта функция удовлетворяет дополнительному условию

$$F(0) = 1 . \quad (3)$$

Четыре примера таких функций показаны на рисунке 1 для $b = \sqrt{2}$, $b = \exp(1/e)$, $b = 2$ и $b = e$.

Тетрация $\text{tet}_b(z)$ может интерпретироваться как результат z -кратного экспоненцирования единицы, по крайней мере для целых значений z :

$$\text{tet}_b(z) = \underbrace{\exp_b \left(\exp_b \left(\dots \exp_b(1) \dots \right) \right)}_{z \text{ exponentiations}} \quad (4)$$

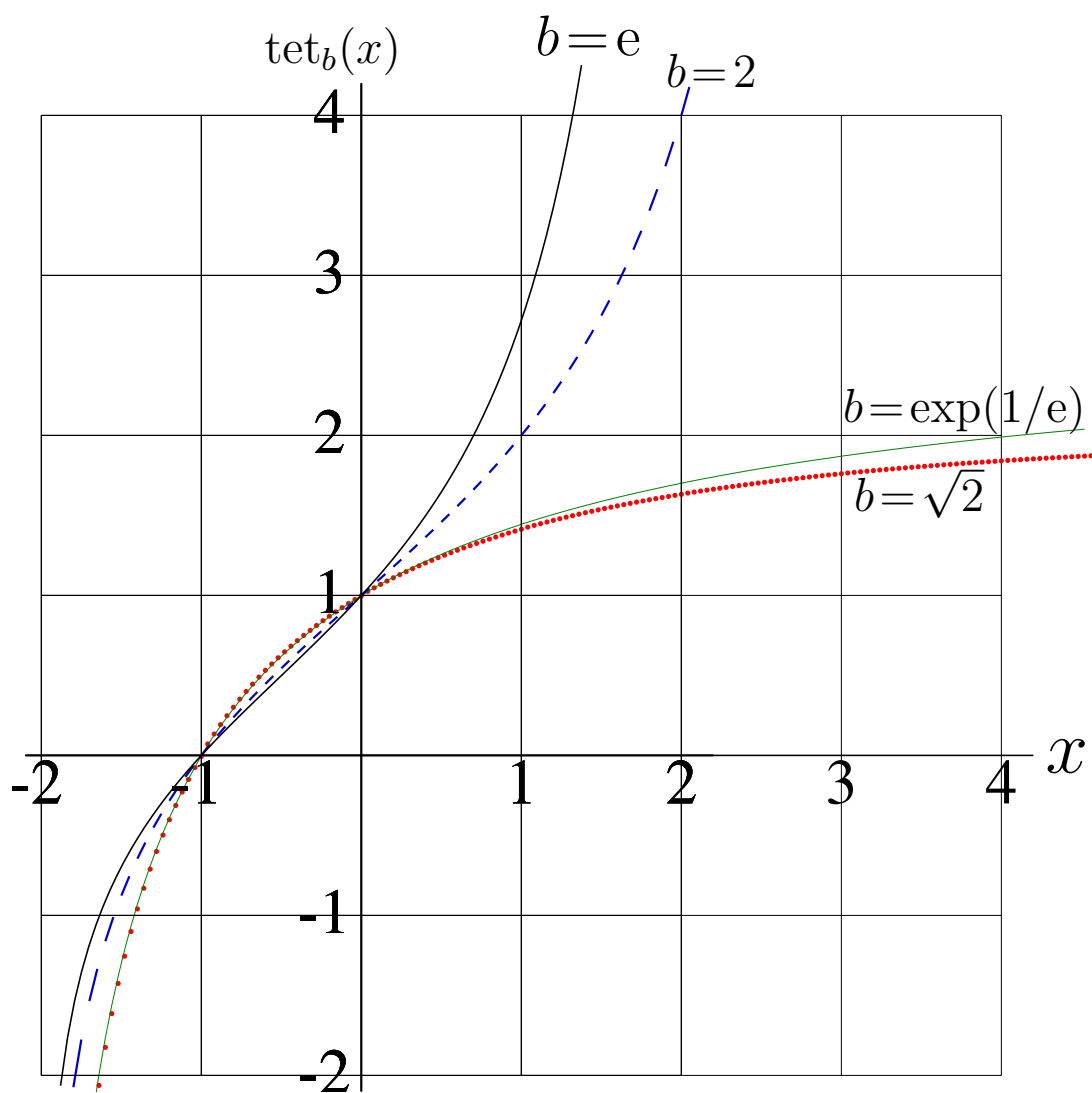


Рис. 1: Тетрация $\text{tet}_b(x)$ по основанию $b=e$ (толстая сплошная), $b=2$ (пунктир), $b=\exp(1/e)$ (тонкая сплошная) и $b=\sqrt{2}$ (точковая) как функция x .

Имя “тетрация” указывает, что эта функция является четвертым элементом в последовательности функций (++, прибавление константы, умножение на константу, экспонента, тетрация, пентация,..), где каждый элемент (кроме нулевого) является суперфункцией по отношению к предыдущему, и передаточной функцией по отношению к последующему. Физические приложения аппарата суперфункций, которые обосновывают использование термина “передаточная функция”, предложены в работах [7, 10].

Для комплексных значений аргумента, следует аппроксимировать решение уравнения (1). Способ аппроксимации зависит от b . При $1 < b \leq \exp(1/e)$, может использоваться так называемая *регулярная итерация* (regular iteration) для соответствующей функции Шрёдера [2, 3, 4, 5, 6, 8]; при больших значениях b , тетрация может вычисляться через интеграл Коши [7, 9]. Эти представления использовались при построении рисунка 1.

Для $b > \exp(1/e)$, решение можно вычислять через контурный интеграл [7], предполагая, что эта функция голоморфна на множестве

$$C = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2\}. \quad (5)$$

Такое представление прозволяет выразить производную tet' и вычислять обратную функцию, то есть, арктетрацию $\text{ate} = \text{tet}^{-1}$. Для такой обратной функции может использоваться обозначение “суперлогарифм”, slog , хотя tet^{-1} и не является суперфункцией от логарифма.

Арктетрация удовлетворяет уравнению

$$\text{ate}(\exp(z)) = \text{ate}(z) + 1 \quad (6)$$

Единственность решения ate , биголоморфного на множестве

$$G = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq \Re(L); |z| < |L|\} \quad (7)$$

исследуется в работах [7, 9]. Здесь $L \approx 0.318 + 1.337i$ есть стационарная точка логарифма, то есть решение уравнения $L = \log(L)$. В языке программирования Maple, константа L может быть предствлена как **conjugate(-LambertW(-1))**; а в языке Mathematica эта константа выражается как **Conjugate[-ProductLog[-1]]**.

В этой статье я предлагаю несложную аппроксимацию функций tet и ate , которая могут быть прототипом для их численного `complex < double >` представления. Здесь я рассматриваю только случай $b = e$; $\log = \ln = \log_e$ и $H = \exp = \exp_e$. Тетрация при других значениях основания $b > e^{1/e}$ может быть рассмотрена аналогичным образом. Ниже предлагается аппроксимация для функции $\text{tet} = \text{tet}_e$ показанной на рисунке 1 толстой сплошной кривой; но эта аппроксимация не ограничивается вещественными значениями аргумента.

2 Свойства функций tet и ate

Хорошая аппроксимация функции должна учитывать ее асимптотические свойства. В этой секции обсуждаются свойства функций $f = \text{tet}(z)$ и $f = \text{ate}(z)$, следующие из их предствления через контурный интеграл [7]. Поведение функций $f = \text{tet}(z)$ и $f = \text{ate}(z)$ в комплексной плоскости z показано на рисунке 2 с помощью линий $p = \Re(f) = \text{const}$ и $q = \Im(f) = \text{const}$. Уровни целых значений p и q показаны толстыми темными

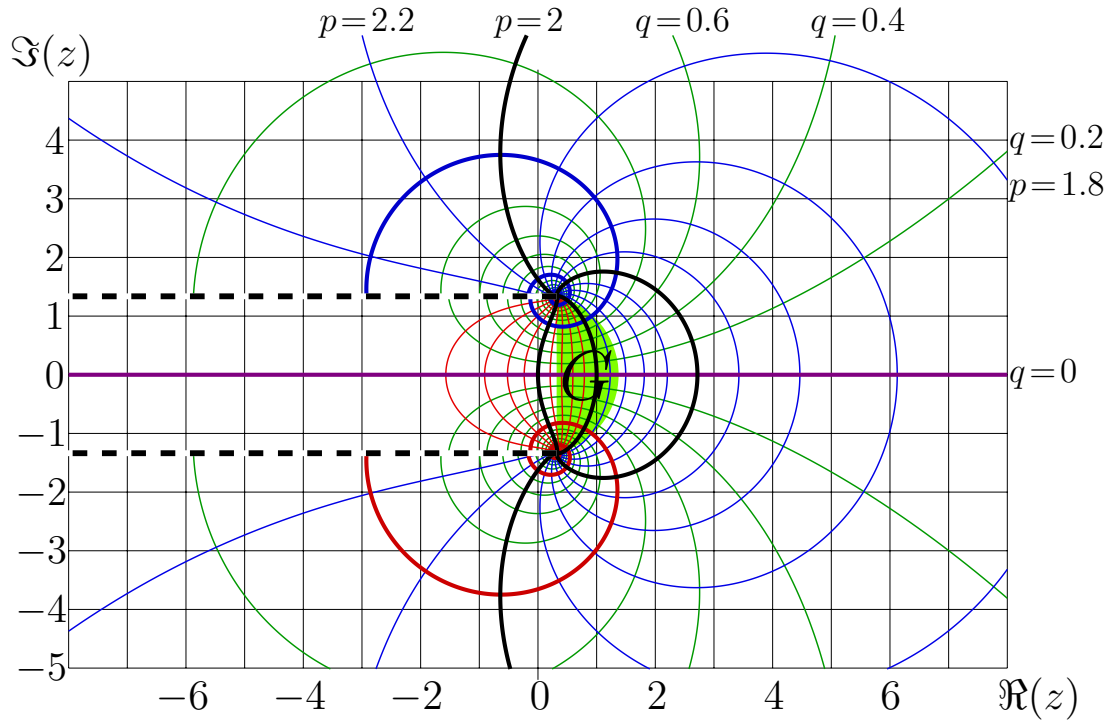
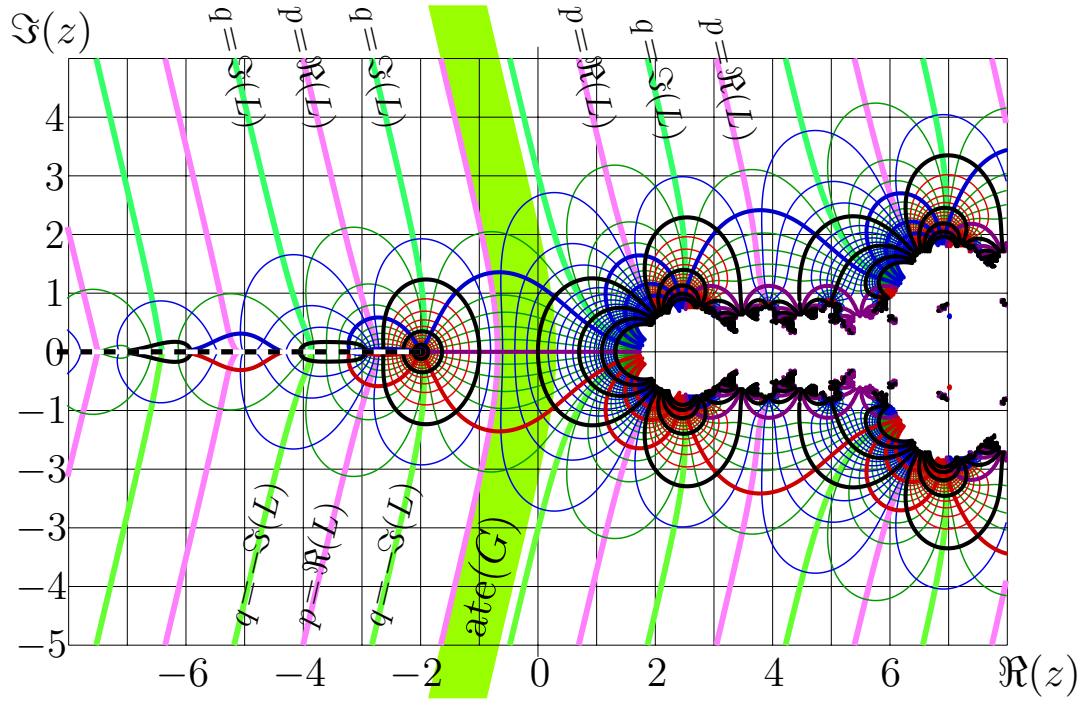


Рис. 2: Функции $f = \text{tet}(z)$ и $f = \text{ate}(z)$ в комплексной z -плоскости. Линии показывают уровни $p = \Re(f) = \text{const}$ и $q = \Im(f) = \text{const}$.

линиями. Толстые светлые линии показывают уровни $p = \Re(L)$ и $|q| = \Im(L)$. Тонкие линии показывают промежуточные уровни. Затененный серп показывает область G по формуле (7). Верхний угол этого серпа есть L , а нижний L^* . Затененная полоса показывает домен $\text{ate}(G)$.

Функция tet имеет точку ветвления -2 и разрез вдоль вещественной оси до $-\infty$. Положение этого разреза соответствует условию вещественности функции, то есть $\text{tet}(z^*) = \text{tet}(z)^*$.

Функция ate имеет две точки ветвления, и необходимо выбрать положение линий разреза. В работе [7], линии разреза соответствуют уровню $\Re(\text{ate}(z)) = -2$ (см. рисунок 8 в [7]); при этом разрезы “накручиваются” вокруг точек ветвления, и вычисление положений этих разрезов замедляет алгоритм вычисления арктетрации. Поэтому в этой работе линии разреза помещены вдоль прямых, параллельных вещественной оси.

Функция tet асимптотически приближается к своим предельным значениям L в верхней полуплоскости и L^* в нижней полуплоскости. Это приближение видно на рисунке 2 в той части, где линии $p = \Re(L)$ почти параллельны линиям $q = \Im(L)$. Стремление к значению L экспоненциальное [7]. Аппроксимация тетрации $\text{tet}(z)$ при больших значениях $\Im(z)$ должна использовать это свойство. В левой части комплексной плоскости, а также вблизи вещественной оси, кроме уравнения (1), функция $f = \text{tet}$ удовлетворяет также “обратному” соотношению, то есть

$$\log(f(z+1)) = f(z), \quad \forall z \in C : |\Im(f(z))| < \pi. \quad (8)$$

Уравнения (1) и (8) упрощают аппроксимирование функции. Для численного представления тетрации, достаточно аппроксимировать эту функцию в некоторой связной области комплексной плоскости, которая простирается от $-\mathrm{i}\infty$ до $\mathrm{i}\infty$ так, что ширина ее сечения при каждом значении $\Im(z) = \text{const}$ превышает единицу. Эта область может частично перекрываться с изображением $\text{tet}(G)$ домена G . В частности, этот район может быть полоской $|\Re(z)| \leq 1/2$, использованной в работе [7]; но может быть и “альтернативной полоской” $-1 \leq \Re(z) \leq 0$, предложенной для проверки аппроксимации. Аналогично, для представления функции ate , достаточно аппроксимировать ее в некоторой области, которая простирается от L^* до L так, что экспонента от левого края области попадает внутрь области (или, хотя бы, на правый край этой области). Ниже, я предлагаю такие аппроксимации, построенные на основе дискретного представления этих функций через контурный интеграл [7].

3 Численное представление тетрации: fima

Для того, чтобы отличать функции tet и ate от их аппроксимаций, я даю специальное имя каждой аппроксимации. Аппроксимации функции tet при больших значениях мнимой части аргумента получается из асимптотического разложения

$$\text{tet}(z) = L + \sum_{n,m} \mathcal{A}_{m,n} \exp(Lnz + \alpha mz) \quad (9)$$

Подставляя такое разложение в уравнение (1) и считая $\exp(Lz)$ малым параметром, получаю значение $\alpha = 2\pi\mathrm{i}$, и уравнения для коэффициентов $\mathcal{A}$.

Учет всего нескольких слагаемых в разложении (9) дает асимптотическую аппроксимацию, назову ее *fima* (Fast approximation at large IMaginary part of the Argument):

$$\text{fima}(z) = \sum_{n=0}^N a_n \varepsilon^n + \beta \varepsilon \exp(2\pi i z) , \quad (10)$$

где малый параметр

$$\varepsilon = \exp(Lz + R) , \quad (11)$$

а коэффициенты

$$a_0 = L \approx 0.3181315052047641353 + 1.3372357014306894089 i \quad (12)$$

$$a_1 = 1 \quad (13)$$

$$a_2 = \frac{1/2}{L-1} \approx -0.1513148971556517359 - 0.2967488367322413067 i \quad (14)$$

$$a_3 = \frac{a_2 + 1/6}{L^2 - 1} = \frac{2 + L}{6(L-1)(L^2-1)} \approx -0.03697630940906762 + 0.09873054431149697 i \quad (15)$$

$$a_4 = \frac{6 + 6L + 5L^2 + L^3}{24(L-1)^3(L+1)(L^2+L+1)} \approx 0.0258115979731401398 - 0.017386962126530755 i \quad (16)$$

$$a_5 = \frac{24 + 36L + 46L^2 + 40L^3 + 24L^4 + 9L^5 + L^6}{120(L-1)^4(L+1)^2(1+L+2L^2+L^3+L^4)} \approx -0.0079444196 + 0.00057925018 i \quad (17)$$

Параметр R вводится для того, чтобы положить $a_1 = 1$, обеспечивая несложные выражения и других коэффициентов a через стационарное значение L логарифма. Параметр R является таким комплексным числом, что, при фиксированных значениях $\Re(z)$ и больших значениях $\Im(z) \gg 1$,

$$\text{tet}(z) = L + \exp(LZ + R) + \mathcal{O}(\exp(2Lz)) . \quad (18)$$

Увеличение количества слагаемых в полиноме (10) и добавление полиномов от ε с множителями $\exp(2\pi i z)$, $\exp(4\pi i z)$, etc. может улучшить аппроксимацию, но для алгоритма с 14 десятичными знаками, описанного ниже, достаточно в сумме (10) взять 6 слагаемых, полагая $N=5$, и учесть одно-единственное дополнительное слагаемое, пропорциональное $\exp(2\pi i z)$.

Я оцениваю параметры R и β , аппроксимируя численное решение [7]:

$$R \approx 1.0779614375280 - 0.94654096394782 i \quad (19)$$

$$\beta \approx 0.12233176 - 0.02366108 i . \quad (20)$$

Можно ожидать, что эти значения аппроксимируют фундаментальные математические константы. Приближение *fima* по формуле (10) показано на верхнем графике рисунка 3 в тех же обозначениях, что и на рисунке 2. В нижней части рисунка 3 показано согласие

$$D_0 = -\lg \left| \exp(\text{fima}(z+1)) - \text{fima}(z) \right| . \quad (21)$$

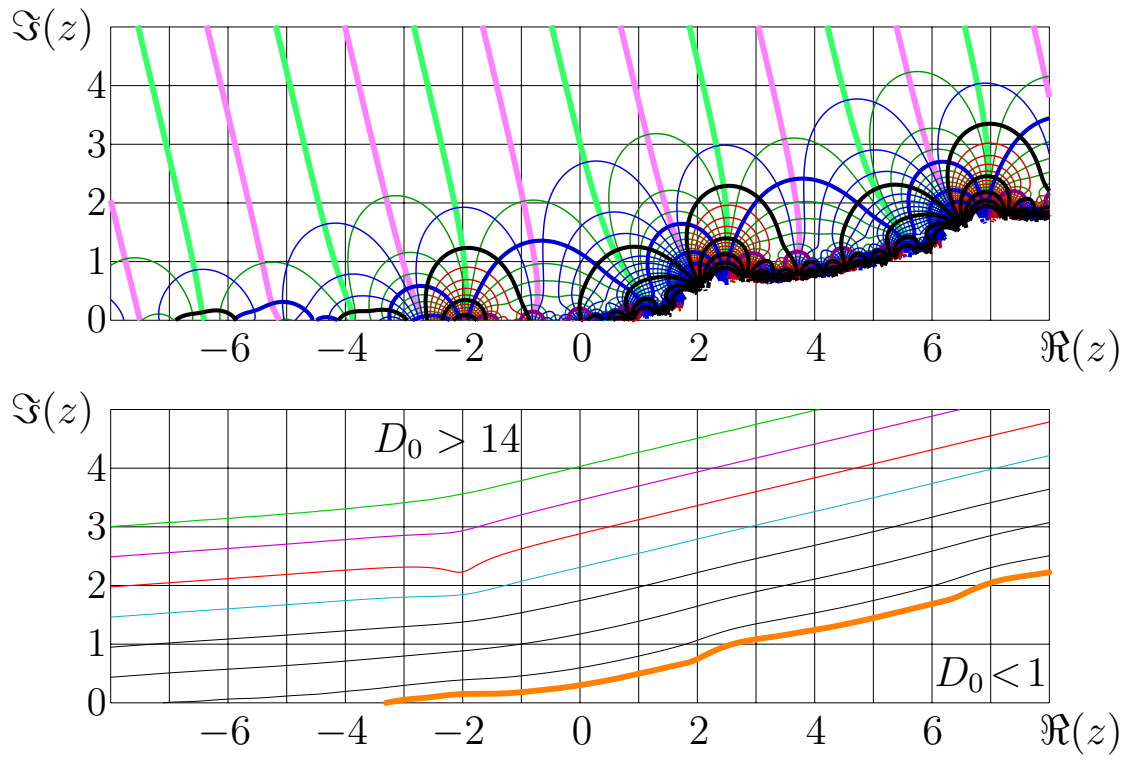


Рис. 3: Аппроксимация $f = \text{fma}(z)$ по формуле (10) и согласие D_0 по формуле (21) в комплексной z -плоскости.

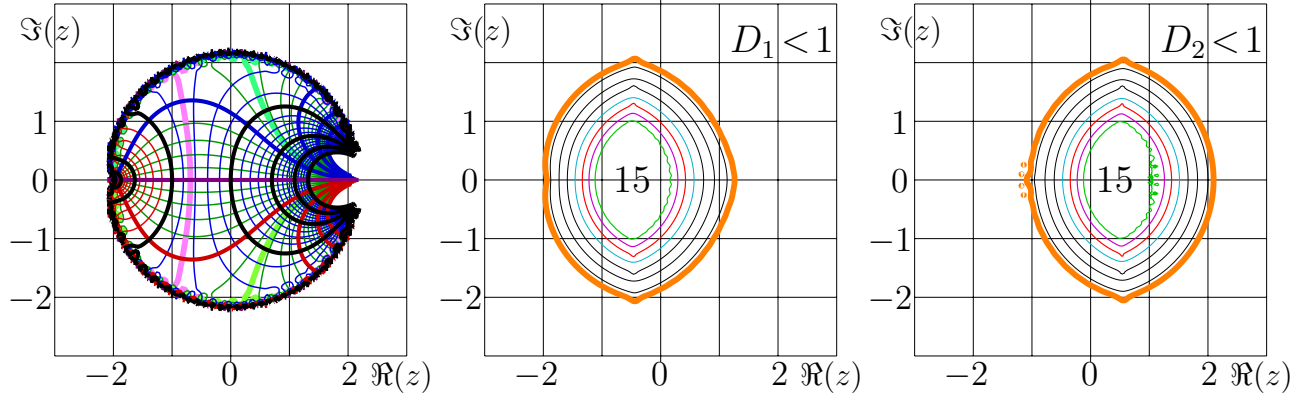


Рис. 4: Приближение $f = \text{naiv}(z)$ функции tet по формуле (22), слева; согласия D_1 и D_2 по формулам (23) и (24), центральный и правый графики.

Эта функция выражает невязку при подстановке $F \rightarrow \text{fma}$ в уравнение (1). Уровень $D=1$ показан очень толстой светлой, самой нижней линией; уровни $D=2, 4, 6$ показаны тонкими черными линиями; уровни $D=10, 12, 14$ показаны толстыми линиями. Функция согласия указывает, сколько верных десятичных цифр можно ожидать получить в этом приближении. В частности, для значений аргумента над всеми проведенными линиями, можно ожидать получить по крайней мере 14 корректных десятичных знаков, в то время как для значений под нижней самой толстой линией, даже первый десятичный знак такого приближения сомнителен.

Вместе с “сопряженным” приближением $\text{fma}(z^*)^*$, аппроксимация (10) покрывает значительную часть комплексной плоскости, но не годится вблизи вещественной оси.

4 Аппроксимация функции sehr : разложение в нуле

Ряд Тэйлора имеет радиус сходимости, равный расстоянию от точки разложения до ближайшей сингулярности. В случае тетрации, конечная сумма ряда Маклорена дает приближение

$$\text{naiv}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n z^n, \quad \text{tet}(z) = \text{naiv}(z) + \mathcal{O}(z^N) \quad (22)$$

которое аппроксимирует sehr при $|z| < 2$. Аппроксимация с $N=10$ показана на рисунке 4; использован генератор [11]. Аппроксимации первых коэффициентов c_n представлены в первом столбце таблицы 1. Нулевой столбец таблицы 1 указывает номер n коэффициента, первый столбец указывает значение коэффициента c_n в формуле (22).

Точность аппроксимации (22) может быть охарактеризована функциями согласия

$$D_1 = -\lg |\exp(\text{naiv}(z-1)) - \text{naiv}(z)| \text{ and} \quad (23)$$

$$D_2 = -\lg |\log(\text{naiv}(z+1)) - \text{naiv}(z)| \quad (24)$$

Эти функции построены на центральном и правом графиках рисунка 4. Знак “15” указывает область, где согласие больше 14. Рисунок указывает, что при $|z| \leq 1$, такая конечная сумма ряда Тэйлора дает порядка 15 значащих цифр.

Таблица 1. Приближенные значения коэффициентов в разложениях (22), (25) и (29).

n	c_n	s_n	$\Re(t_n)$	$\Im(t_n)$
0	1.000000000000000	0.30685281944005	0.37090658903229	1.33682167078891
1	1.09176735125832	0.59176735125832	0.01830048268799	0.06961107694975
2	0.27148321290170	0.39648321290170	-0.04222107960160	0.02429633404907
3	0.21245324817626	0.17078658150959	-0.01585164381085	-0.01478953595879
4	0.06954037613999	0.08516537613999	0.00264738081895	-0.00657558130520
5	0.04429195209047	0.03804195209047	0.00182759574799	-0.00025319516391
6	0.01473674209639	0.01734090876306	0.00036562994770	0.00028246515810
7	0.00866878181723	0.00755271038865	0.00002689538943	0.00014180498091
8	0.00279647939839	0.00328476064839	-0.00003139436775	0.00003583704949
9	0.00161063129058	0.00139361740170	-0.00001376358453	-0.00000183512708
10	0.00048992723148	0.00058758348148	-0.00000180290980	-0.00000314787679
11	0.00028818107115	0.00024379186661	0.00000026398870	-0.00000092613311
12	0.00008009461254	0.00010043966462	0.00000024961828	-0.00000013664223
13	0.00005029114179	0.00004090111776	0.00000007899707	0.00000003171468
14	0.00001218379034	0.00001654344436	0.00000000637479	0.00000002270476
15	0.00000866553367	0.00000663102846	-0.00000000341142	0.00000000512289
16	0.00000168778232	0.00000264145664	-0.00000000162203	0.00000000031619
17	0.00000149325325	0.00000104446533	-0.00000000038743	-0.00000000027282
18	0.00000019876076	0.00000041068839	-0.00000000001201	-0.00000000013440
19	0.00000026086736	0.00000016048059	0.00000000002570	-0.00000000002543
20	0.00000001470995	0.00000006239367	0.00000000000935	0.00000000000045
21	0.00000004683450	0.00000002412797	0.00000000000170	0.00000000000186
22	-0.00000000154924	0.00000000928797	-0.00000000000005	0.00000000000071
23	0.00000000874151	0.00000000355850	-0.00000000000016	0.00000000000012
24	-0.00000000112579	0.00000000135774	-0.00000000000005	-0.00000000000001
25	0.00000000170796	0.00000000051587	-0.00000000000001	-0.00000000000001

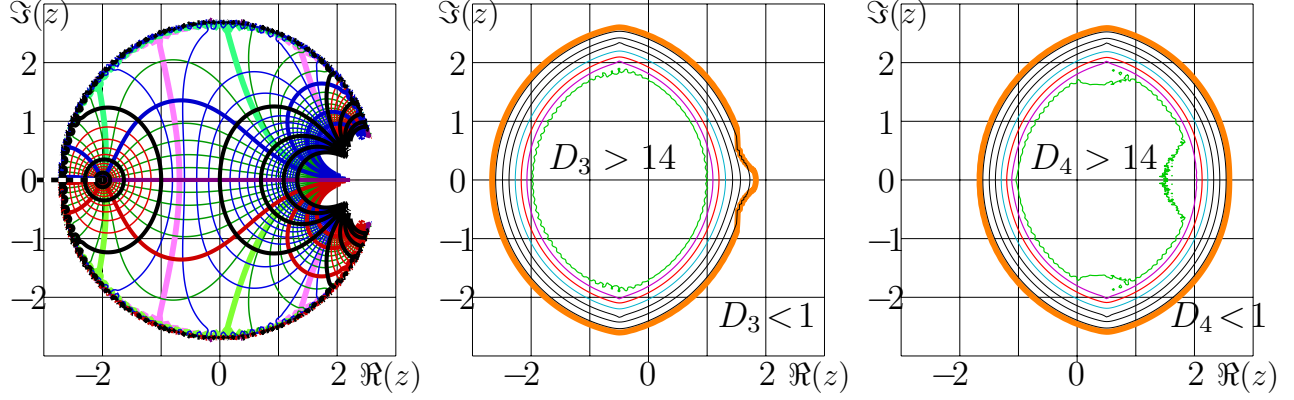


Рис. 5: Функция $f = \text{maclo}(z)$ по формуле (25) при $N = 101$ в комплексной z -плоскости, слева; согласия D_3 и D_4 по формулам (27) и (28), центр и справа.

Чтобы расширить область аппроксимации, имеет смысл “выключить” сингулярность в точке -2 , раскладывая функцию $\text{tet}(z) - \log(z+2)$ вместо функции $\text{tet}(z)$. Такое разложение дает приближение

$$\text{maclo}(z) = \log(z+2) + \sum_{n=0}^{N-1} s_n z^n ; \quad (25)$$

$$\text{tet}(z) = \text{maclo}(z) + \mathcal{O}(z^N) . \quad (26)$$

Название `maclo` (MAClaurin expansion with LOgarithm) указывает, что использовано разложение Маклорена и логарифм. Приближения коэффициентов разложения представлены во втором столбце таблицы 1.

Функция `maclo` показана на рисунке 5 для $N = 101$. При построении использован генератор [12]. Область аппроксимации тетрации функцией `maclo` шире, чем в случае непосредственного разложения тетрации в нуле. В правой части того же рисунка 5, показаны также согласия

$$D_3 = -\lg \left| \exp(\text{maclo}(z+1)) - \text{maclo}(z) \right| \quad (27)$$

$$D_4 = -\lg \left| \log(\text{maclo}(z-1)) - \text{maclo}(z) \right| \quad (28)$$

В центральной части, невязки при подстановке $\text{tet} \rightarrow \text{maclo}$ в уравнения (1), (8) имеют порядок величины 10^{-15} .

5 Разложение Тэйлора функции tet в точке $3i$.

В этой секции предложено разложение Тэйлора функции $\text{tet}(z)$ в точке $z = 3i$; назову такую аппроксимацию “tai” (TAYlor expansion centered at at the Imaginary axis):

$$\text{tai}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} t_n (z-3)^n \quad (29)$$

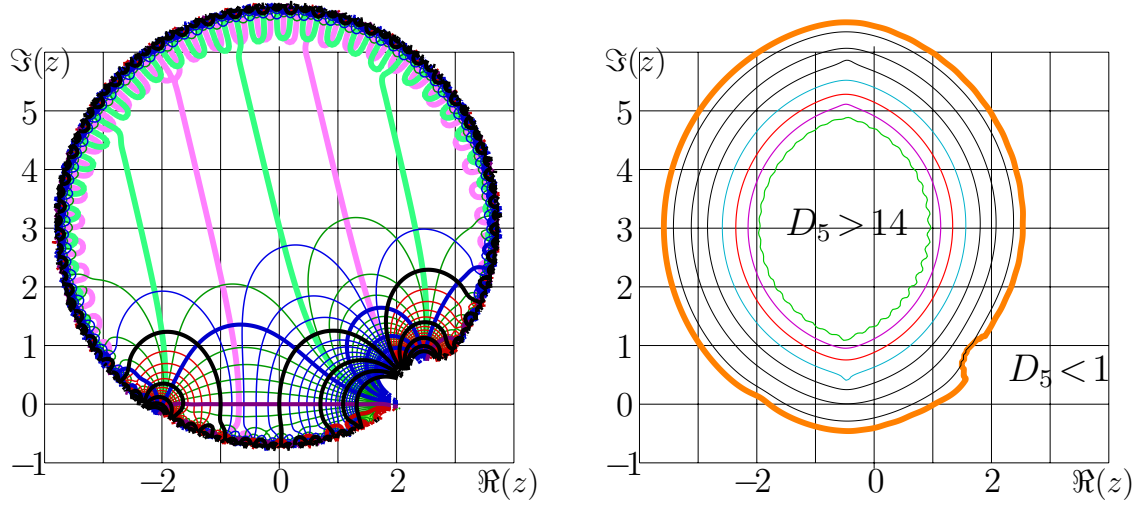


Рис. 6: Функция $f = \text{tai}(z)$ по формуле (29) при $N = 51$ в комплексной z -плоскости и согласие D_5 по формуле (30).

Коэффициенты этого разложения оценены в последних двух столбцах таблицы 1. Для $N = 51$, функция tai построена на рисунке 6. Рисунок построен с помощью генератора [13]. Погрешность аппроксимации решения уравнений (1), (8) характеризуется согласием

$$D_5 = -\lg |\log(\text{tai}(z+1)) - \text{tai}(z)|. \quad (30)$$

Это согласие построено в правой части рисунка 6.

Взаимное согласие аппроксимаций может быть характеризовано функциями

$$D_6 = -\lg |\text{fima}(z) - \text{tai}(z)| \quad (31)$$

$$D_7 = -\lg |\text{maclo}(z) - \text{tai}(z)| \quad (32)$$

Эти функции показаны на рисунке 7. В центральных областях невязка не превышает 10^{-14} . На основе рисунка 7, я предлагаю следующую аппроксимацию:

$$\text{fse}(z) = \begin{cases} \text{fima}(z) & , \quad 4.5 < \Im(z) \\ \text{tai}(z) & , \quad 1.5 < \Im(z) \leq 4.5 \\ \text{maclo}(z) & , \quad -1.5 \leq \Im(z) \leq 1.5 \\ \text{tai}(z^*)^* & , \quad -4.5 \leq \Im(z) < -1.5 \\ \text{fima}(z^*)^* & , \quad \Im(z) < -4.5 \end{cases} \quad (33)$$

Эту аппроксимацию интересно сравнить с результатами, опубликованными ранее. Ниже анализируется отклонение $\text{fse}(z) - F_4(z)$, где $F_4(z)$ есть аппроксимация, полученная с помощью контурного интеграла [7]. В левой части рисунка 8 показано согласие

$$D_8 = -\lg |\text{fse}(z) - F_4(z)| \quad (34)$$

аппроксимации fse с аппроксимацией F_4 тетрации через контурный интеграл [7]. Рисунок 8 выявляет дефекты каждой из аппроксимаций. Скачки при $\Im(z) = 1.5$ и при $\Im(z) = 2.5$ вызваны переходом от функции maclo к функции tai и от функции tai к функции fima в

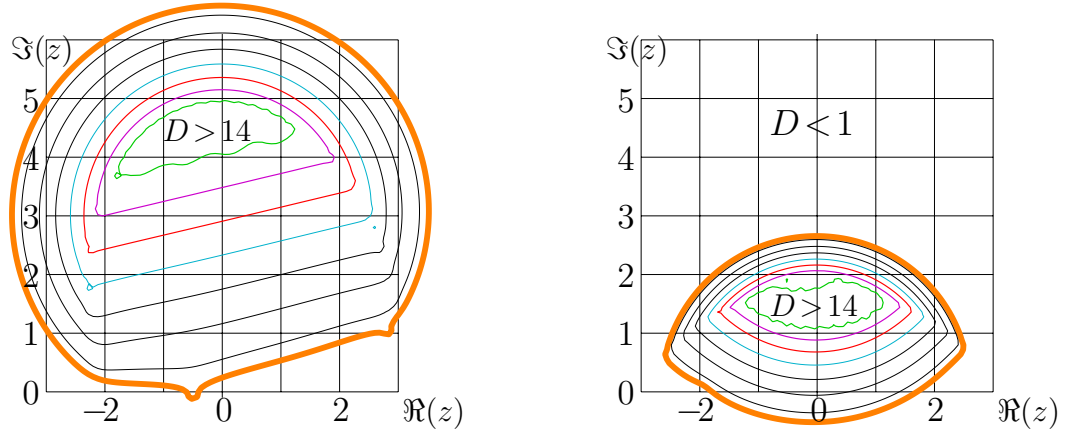


Рис. 7: Согласие $D = D_6$ по формуле (29) и согласие $D = D_7$ по формулам (31), (32) в комплексной z -плоскости.

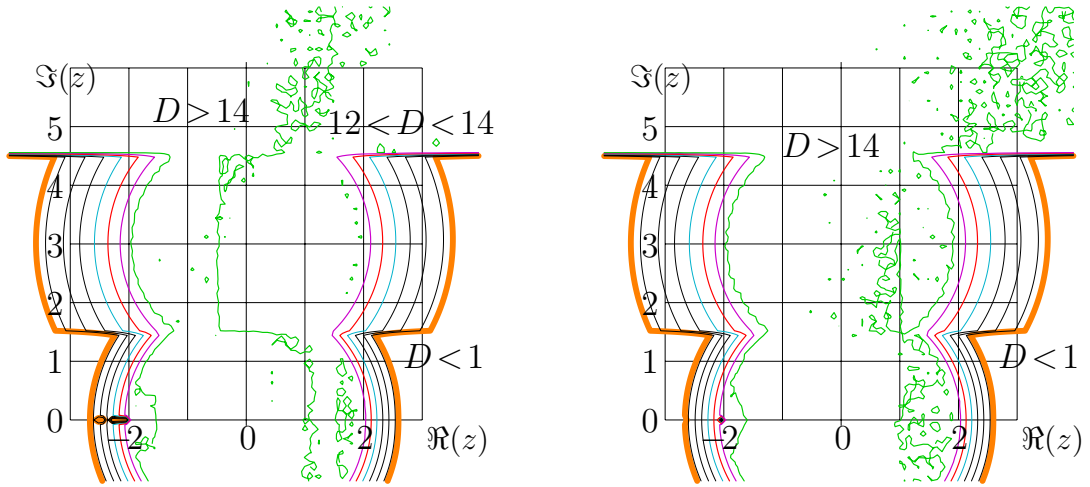


Рис. 8: Согласие $D = D_8$ по формуле (34), слева; аналогичное согласие для контурного интеграла со сдвинутой на -0.5 базовой областью .

комбинации FSE. Скачки при полуцелых значениях $\Re(z)$ вызваны разрывами функции F_4 , которая расширяет начальное приближение, справедливое для $|\Re(z)| < 1$, используя $|\Re(z)| \leq 1/2$ в качестве базового интервала. Ошибки округления приводят нерегулярной структуре. Внутри полосы $|\Re(z)| < 1.5$, взаимные отклонения этих трех аппроксимаций имеют порядок величины 10^{-14} .

В правой части фигуры 8 построено согласие для функции F_5 , которая аналогична функции F_4 , но базовый интервал сдвинут на $-1/2$. Аппроксимация F_5 имеет скачки при целых значениях вещественной части. Эти скачки тоже малы; согласие во всяком случае не хуже, чем для функции F_4 .

Таким образом, различие аппроксимаций имеет порядок величины 10^{-14} . На основе рисунков 7, 8, я предлагаю финальную аппроксимацию FSE (Fast Super Exponential) тетрации tet:

$$\text{FSE}(z) = \begin{cases} \text{FIMA}(z) & , \quad 4.5 < \Im(z) \\ \text{TAI}(z) & , \quad 1.5 < \Im(z) \leq 4.5 \\ \text{MACLO}(z) & , \quad -1.5 \leq \Im(z) \leq 1.5 \\ \text{TAI}(z^*)^* & , \quad -4.5 \leq \Im(z) < -1.5 \\ \text{FIMA}(z^*)^* & , \quad \Im(z) < -4.5 \end{cases} \quad (35)$$

где

$$\text{FIMA} = \begin{cases} \text{fima}(z) & , \quad \Im(z) > 4 + 0.2379 \Re(z) \\ \exp(\text{FIMA}(z-1)) & , \quad \Im(z) \leq 4 + 0.2379 \Re(z) \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{TAI} = \begin{cases} \text{tai}(z) & , \quad |\Re(z)| \leq 0.5 \\ \log(\text{TAI}(z+1)) & , \quad \Re(z) < -0.5 \\ \exp(\text{TAI}(z-1)) & , \quad \Re(z) > 0.5 \end{cases} \quad (37)$$

$$\text{MACLO} = \begin{cases} \text{tai}(z) & , \quad |\Re(z)| \leq 0.5 \\ \log(\text{MACLO}(z+1)) & , \quad \Re(z) < -0.5 \\ \exp(\text{MACLO}(z-1)) & , \quad \Re(z) > 0.5 \end{cases} \quad (38)$$

Эта аппроксимация дает по меньшей мере 14 верных десятичных знаков голоморфной тетрации tet и согласуется с результатами [7].

Насколько я могу судить, эта аппроксимация быстрее и точнее всех аппроксимаций голоморфной тетрации, публиковавшихся ранее. Большое число слагаемых сохранено в аппроксимациях (29) и (25) для того, чтобы обеспечить их хорошее перекрытие на рисунках 7 и 8. На конечной стадии имплементации, количество слагаемых в аппроксимациях рядов может быть уменьшено без потери точности. Особенно это относится к вычислению тетрации на вещественной оси достаточно обеспечить хорошую аппроксимацию функции tet(z) для $|z| \leq 1/2$, что составляет всего четвертушку от радиуса круга, в котором аппроксимация тетрации функцией maclo дает 14 знаков.

По просьбам коллег алгоритм вычисления переведен с языка C++ на язык Mathematica [14]. В качестве верификации этого алгоритма, первая, вторая, третья и четвертая производные тетрации tet построены на рисунке 9 как функции вещественного аргумента; разумеется, алгоритм вычисляет функцию tet и ее производные также и от комплексного аргумента.

Хорошее перекрытие областей аппроксимации тетрации tet различными алгоритмами подтверждает их пригодность. Возможна некоторая потеря точности при многократном

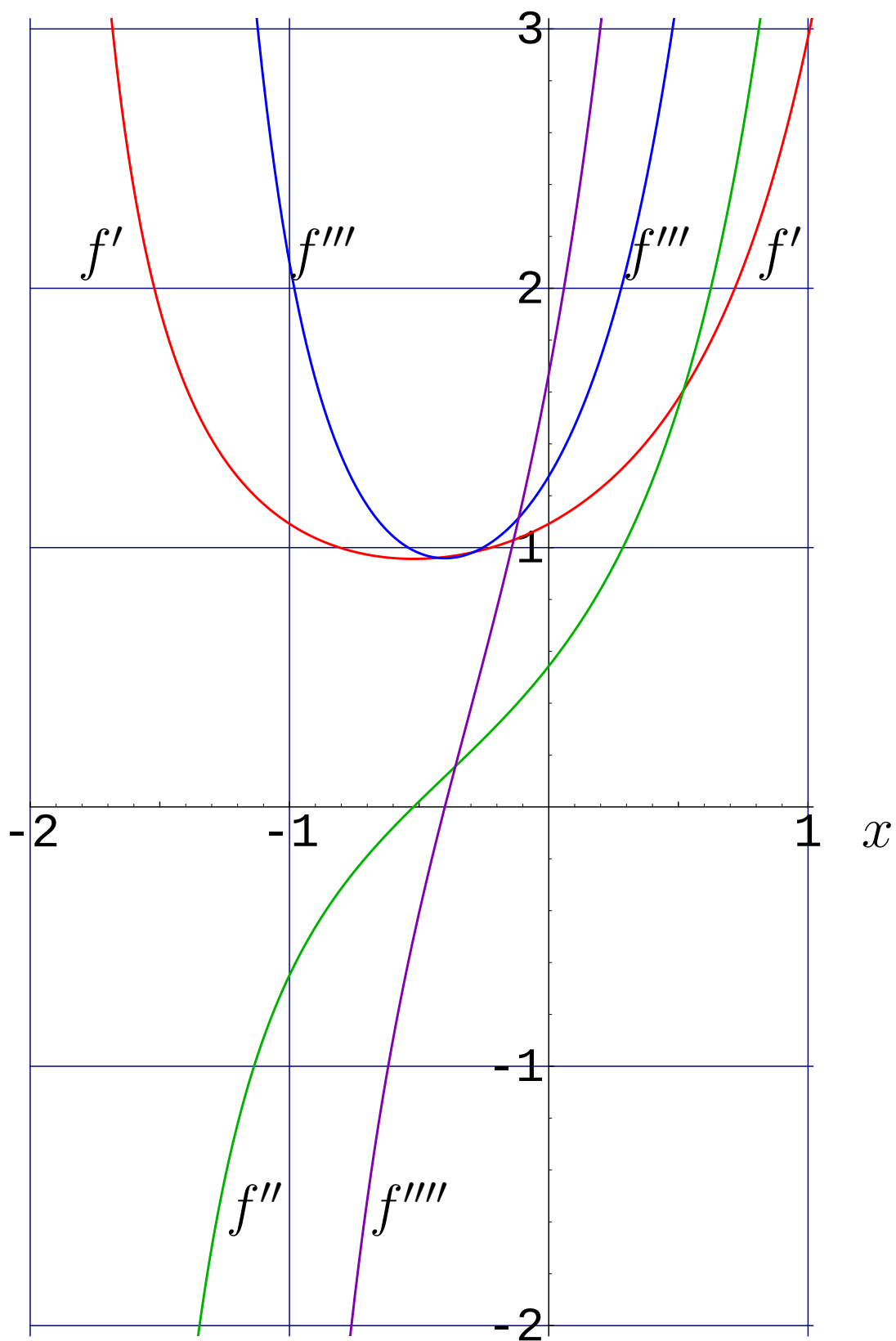


Рис. 9: Первые четыре производные от $f = \text{tet}(x)$ как функции вещественного x .

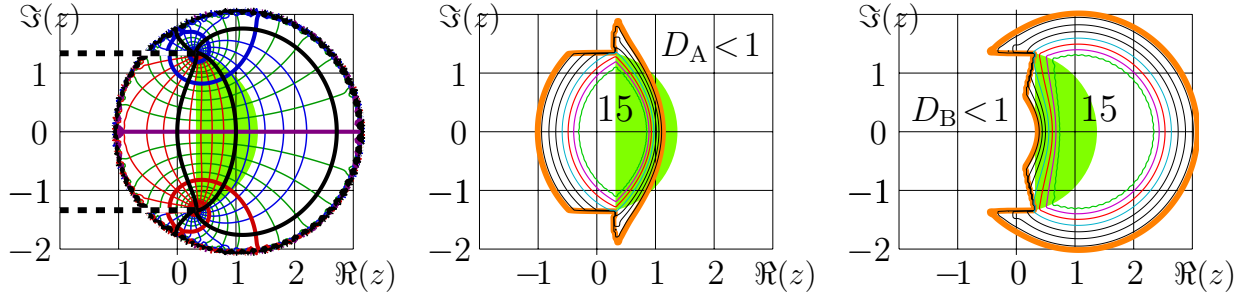


Рис. 10: Аппроксимация $\text{fsl}(z)$ по формуле (42), слева, и согласия по формулам (44) и (45); Область G по формуле (7) затенена.

экспоненцировании, требующемся для больших значений вещественной части аргумента. Сходство значений, полученных разными методами, указывает, что при умеренных значениях вещественной части аргумента, все три аппроксимации тетрации, то есть FSL по формуле (35), F_4 из работы [7] и ее модификация F_5 (см рисунок 8) имеют погрешность порядка 10^{-14} .

6 Аппроксимация арктетрации ate

Арктетрация ate , то есть обратная функция от tet , удовлетворяет условиям

$$\text{ate}(z) = \text{ate}(\exp(z)) - 1 \quad (39)$$

$$\text{ate}(z) = \text{ate}(\log(z)) + 1 \quad (40)$$

по крайней мере, пока $z \in G$; и $\text{ate}(1) = 0$. Эта функция может быть представлена как численное решение уравнения $\text{tet}(\text{ate}(z)) = z$; однако такое представление существенно медленнее, чем аппроксимация с помощью подходящих элементарных функций.

Первая (и наивная) попытка численного представления функции ate , это, естественно, разложение Тэйлора в единице. Коэффициенты такого разложения можно найти, обращая ряд paiv по формуле (22). Радиус сходимости такого обращенного ряда $|L| \approx 1.5$; и аппроксимация особенно плоха в окрестности стационарных точек L и L^* логарифма.

Лучше разложить функцию

$$\text{ate}(z) - \frac{\log(z-L)}{L} - \frac{\log(z-L^*)}{L^*} \quad (41)$$

в точке $z=1$. Такое разложение ведет к аппроксимации

$$\text{fsl}(z) = \frac{\log(z-L)}{L} + \frac{\log(z-L^*)}{L^*} + \sum_{n=0}^{N-1} u_n (z-1)^n; \quad (42)$$

$$\text{ate}(z) = \text{fsl}(z) + \mathcal{O}((z-1)^N) \quad (43)$$

Приближенные значения первых коэффициентов u этого разложения представлены в таблице 2. Аппроксимация fsl при $N=70$ представлена на рисунке 10.

Формально, разложение Тэйлора функции (41) в точке $z=1$ имеет тот же радиус сходимости, что и разложение Тэйлора функции ate . Однако практически, при численном

Таблица 2. Коэффициенты u_n в разложении (42).

n	u_n	n	u_n	n	u_n
0	1.41922521550451	10	0.000000003111805	20	0.00000000002293
1	-0.02606629029752	11	0.000000002940887	21	-0.00000000002462
2	0.00173304781808	12	-0.000000001896929	22	0.00000000000666
3	-0.00001952130725	13	0.000000000351784	23	0.00000000000322
4	-0.00006307006450	14	0.000000000204270	24	-0.00000000000354
5	0.00002567895998	15	-0.000000000171995	25	0.00000000000096
6	-0.00000559010027	16	0.000000000039882	26	0.00000000000051
7	-0.00000007279712	17	0.000000000019328	27	-0.00000000000055
8	0.00000065148872	18	-0.000000000019113	28	0.00000000000014
9	-0.00000027698138	19	0.000000000004947	29	0.00000000000009

представлении функции, аппроксимация (42) сходится существенно быстрее, чем непосредственное разложение Тэйлора функции ate . Функция fsl аппроксимирует функцию ate даже на границе круга сходимости ряда, и, в частности, вблизи концов серпа G по формуле (7), то есть, вблизи точек L и L^* . Функция fsl имеет те же точки ветвления L и L^* , что и функция ate , и тоже принимает бесконечные значения в этих точках.

Чтобы оценить невязки при подстановке $\text{ate} \rightarrow \text{fsl}$ в уравнения (39), (40), согласия

$$D_A = -\lg \left| \text{fsl}(\exp(z)) - 1 - \text{fsl}(z) \right| \quad (44)$$

$$D_B = -\lg \left| \text{fsl}(\log(z)) + 1 - \text{fsl}(z) \right| \quad (45)$$

построены на центральном и правом графиках рисунка 10. Как и раньше, символ “15” указывает район, где согласие лучше четырнадцати.

Район аппроксимации может быть расширен с помощью функции

$$\text{FSL}(z) = \begin{cases} \text{fsl}(z) & , \quad |\Im(z)| < \Im(L) \ \& \ |z-1| \leq |\log(z)-1| \ \& \ |z-1| \leq |\exp(z)-1| \\ \text{FSL}(\exp(z))-1, & |\Im(z)| < \Im(L) \ \& \ |z-1| > |\exp(z)-1| \\ \text{FSL}(\log(z))+1, & |\Im(z)| \geq \Im(L) \ \text{or} \ |z-1| > |\log(z)-1| \end{cases} \quad (46)$$

С помощью расширения (46), функция fsl позволяет накрыть всю комплексную плоскость одной-единственной аппроксимацией элементарной функцией (42). Чтобы проверить взаимное соответствие аппроксимаций FSE и FSL , рассмотрим согласия

$$D_c = -\lg \left| \text{FSL}(\text{FSE}(z)) - z \right| \quad (47)$$

$$D_d = -\lg \left| \text{FSE}(\text{FSL}(z)) - z \right| \quad (48)$$

Эти согласия показаны на рисунке 11. Рисунок подтверждает хорошую точность аппроксимаций. Погрешность аппроксимаций сравнима с ошибками округления при использовании переменных `complex < double >`.

7 Заключение

Разработан численный алгоритм FSE по формуле (35) для вычисления голоморфной

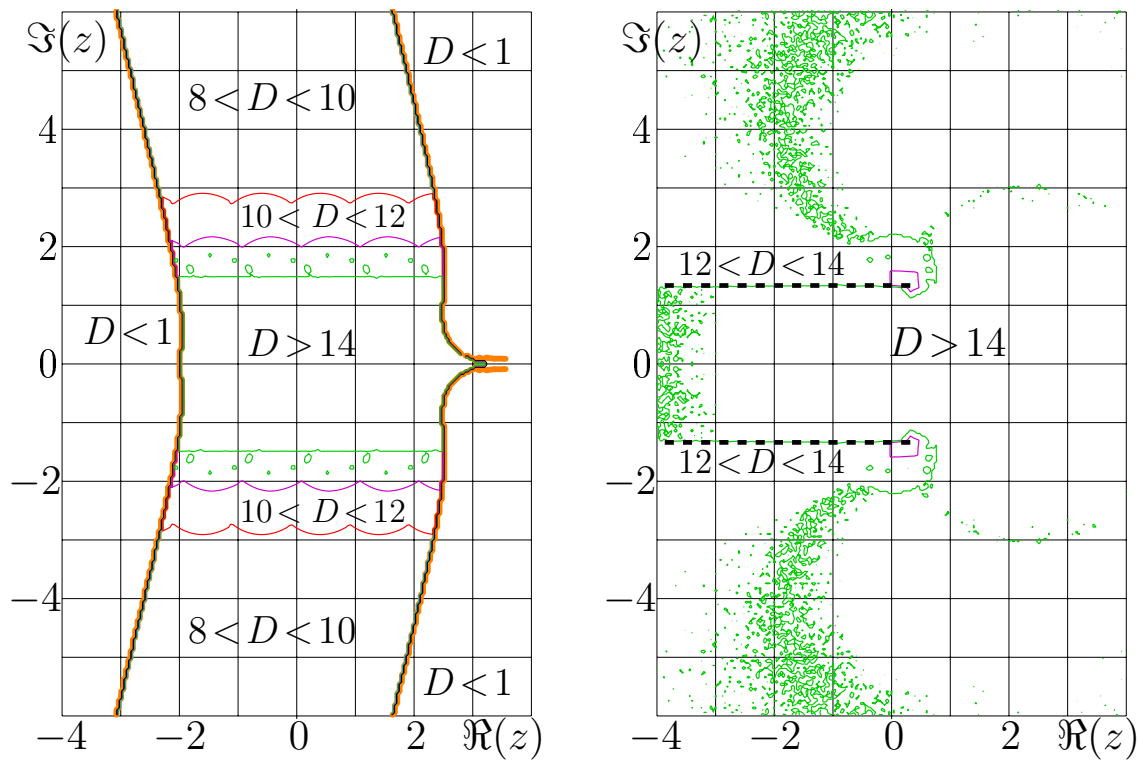


Рис. 11: Согласия аппроксимаций FSE и FSL по формулам (47) и (48).

тетрации (суперэкспоненты) по основанию e . Предложен также алгоритм FSL по формуле (46) для вычисления обратной функции. Пока эти алгоритмы самые точные и самые быстрые. Такие алгоритмы могут быть прототипами для численной реализации тетрации и арктетрации в компиляторах следующего поколения.

Благодарность. Спасибо Генрику Траппманну (Henryk Trappmann) за помощь и критику.

Список литературы

- [1] H. Kneser. "Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\varphi(\varphi(x)) = e^x$ und verwandter Funktionalgleichungen". Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1950, **187**, 56-67.
- [2] G. Szekeres, Regular iteration of real and complex functions. Acta Math. 1958, **100**, 203-258.
- [3] G. Szekeres. Fractional iteration of exponentially growing function. J. Austral. Math. Soc., 1961, **2** 301-320.
- [4] N. Bromer. Superexponentiation. Mathematics Magazine, **60** No. 3 (1987), 169-174
- [5] P. Walker. Infinitely differentiable generalized logarithmic and exponential functions. Mathematics of computation, 1991, **196**, 723-733.

- [6] P. Walker. On the solutions of an Abelian functional equation. Journal of mathematical analysis and applications, 1991, **155** No. 1, 93-110
- [7] D. Kouznetsov. Solution of $F(z+1) = \exp(F(z))$ in complex z -plane. Mathematics of Computation, **78** (2009), 1647-1670.
- [8] D. Kouznetsov, H. Trappmann. Portrait of the four regular super-exponentials to base $\sqrt{2}$. Mathematics of Computation, in press. Preprint ILS UEC, 2009, <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009sqrt2.pdf>
- [9] H.Trappmann, D.Kouznetsov. Uniqueness of holomorphic Abel functions. Preprint ILS UEC, 2009, <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009uniabel.pdf>
- [10] Д. Кузнецов, Г. Траппманн. Суперфункции и квадратный корень из факториала. Вестник МГУ, 2010, в печати. Препринт: <http://www.ils.uec.ac.jp/~dima/PAPERS/2009supefar.pdf>
- [11] генератор рисунка 4: <http://en.citizendium.org/wiki/TetrationPolynomial25power.jpg/code>
- [12] генератор рисунка 5: <http://en.citizendium.org/wiki/TetrationApproLP100.jpg/code>
- [13] генератор рисунка 6: <http://en.citizendium.org/wiki/TetrationTailorExpansion3ipower25.jpg/code>
- [14] генератор рисунка 9: <http://en.citizendium.org/wiki/TetrationDerivativesReal.jpg/code>
- [15] генератор рисунка 10: <http://en.citizendium.org/wiki/SLOGappro50.jpg/code>